۳-۱۵ مسائل خودآزمایی

محاسبه میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی و عایق یا کمیتهای مربوط مانند مقاومت، ظرفیت، انرژی ذخیره شده، نیرو و گشتاور هدف اکثر این مسائل است. چندین عـامل بـر شکـل‌گیری مـیدان الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی یا یک میدان اولیه در مجاورت اجسام مؤثر بوده و باید در محاسبه میدان الکتریکی مد نظر قرار گیرند. این عوامل عبارتند از: چگونگی توزیع بارهای الکتریکی در فضا، ابعاد و شکل هندسی اجسام، موقعیت مکانی بارهای الکتریکی نسبت به اجسام و قابلیت گذردهی برای عایقها. به طور کلی، بارهای الکتریکی تولید میدان الکتریکی اولیه‌ای می‌نمایند که پس از برخورد با یک جسم هادی یا عایق منجر به بروز بارهای القایی در جسم می‌گردد. اگر جسم مورد نظر هـادی بـاشد بارهای القایی فقط روی سطح آن پدید می‌آیند. اندازه و نحوه توزیع بارهای الکتریکی روی سطح یک جسم هادی مبتنی بر این ویژگی است که میدان کل، یعنی مجموع میدان اولیه و میدان ثانویه ناشی از بارهای القایی، در درون جسم هادی همواره صفر می‌باشد. بارهای القایی در اجسام عایق می‌توانند از هر دو نوع سطحی و حجمی باشند، در حالی‌که در اجسام هادی این‌گونه بارها فقط پذیرای توزیع سطحی هستند. استفاده از قانون گوس، که برحسب بردار $\mathbf{D}$ (چگالی شار الکتریکی) بیان شـود بـدون تـردید ساده‌ترین روش محاسبه میدان الکتریکی در حضور اجسام می‌باشد. لیکن، این روش محدود به موارد معدودی است که توزیع بارها، شکل هندسی اجسام و در مورد عایقها قابلیت گذردهی آنها از ویژگیهای لازم برخوردار باشند. مواردی که محاسبه میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی یا عایق با استفاده از قانون گوس میسر است عبارتند از:

۱) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر توزیع بار الکتریکی اولیه فقط تابعی از یک مختصه مثلاً z بوده، جسم هادی یا عایق در امتدادهای x و y از دو طرف تا بینهایت ادامه داشته باشند، و در صورتی‌که جسم مورد نظر عایق بوده و قابلیت گذردهی آن ثابت یا حداکثر تابعی از z باشد، آنگاه میدان $\mathbf{D}$ به وجود آمده فقط مؤلفه z داشته و این مؤلفه در تمام نقاط درون عایق و فضای بین توزیع بار و عایق اندازه ثابتی خواهد داشت. با توجه به اینکه میدان الکتریکی توزیع باری که فقط تابعی از z است در ناحیه بین توزیع بار و عایق یا هادی همواره به‌صورت $\mathbf{E} = E_\circ \hat{\mathbf{a}}_z$ (که در آن $E_\circ$ مقدار ثابتی است) می‌باشد، گاهی اوقات به جای توزیع بار از میدان اولیه یکنواخت استفاده می‌شود بدون اینکه در ماهیت مسئله تغییری پدید آید. به عنوان مثال، اگر میدان اولیه $\mathbf{E} = E_\circ \hat{\mathbf{a}}_z$ در خلأ بر لایه عایقی با قابلیت گذردهی نسبی $\varepsilon_r = \varepsilon_r(z)$ که ناحیه $|z| < d$ از فضا را اشغال کرده است اِعمال شود، میدان کل $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا (درون و بیرون عایق) برابر $\mathbf{D} = \varepsilon_\circ E_\circ \hat{\mathbf{a}}_z$ است صرف نظر از اینکه تغییرات ε_r نسبت بـه z چگـونه باشد. اگر به جای یک لایه عایق، چندین لایه عایق موازی با ضخامتهای مختلف ولی محدود و بـا قابلیتهایی گذردهی که هر کدام تابع دلخواهی از z باشند داشته باشیم، باز نتیجه $\mathbf{D} = \varepsilon_\circ E_\circ \hat{\mathbf{a}}_z$ در تمام نقاط فضا صادق خواهد بود. همچنین، اگر میدان اولیه یکنواخت مزبور به یک یا چند لایه هادی موازی و با ضخامتهای محدود اِعمال شود، میدان کل $\mathbf{E}$ در بیرون هادیها همانند میدان اولیه باقی مانده و در درون هادیها صفر می‌شود. در صورتی که ضخامت لایه عایق یا هادی نامحدود باشد، اگرچه یکنواخت بودن میدان $\mathbf{D}$ در عایق و اطراف آن و میدان $\mathbf{E}$ در بیرون هادی هم‌چنان برقرار است ولی این میدانها دیگر

مساوی میدانهای اولیه متناظر نخواهند بود. برای آشنایی با روش بررسی مسائل نوع اخیر به حل مسئله ۱۳ توجه کنید.

۲) در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر توزیع بار الکتریکی اولیه فقط تابعی از مختصه شعاعی r بوده، جسم هادی یا عایق در امتداد محور z از دو طرف تا بینهایت ادامه داشته و دارای تقارن استوانه‌ای باشد (به عبارت دیگر، فضای اشغال شده توسط جسم با رابطه $a<r<b$ که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند بیان شود)، و در صورتی که جسم مورد نظر عایق بوده و قابلیت گذردهی آن ثابت یا حداکثر تابعی از r باشد، آنگاه میدان $\mathbf{D}$ به وجود آمده فقط مؤلفه r داشته و از رابطه $\mathbf{D}=\dfrac{Q}{2\pi r}\hat{\mathbf{a}}_r$ به دست می‌آید که در آن Q بار آزاد محصور در یک سطح گوسی استوانه‌ای به شعاع r، طول واحد و محوری منطبق بر محور z می‌باشد. به عنوان مثال، اگر خط باری بینهایت طویل با چگالی توزیع یکنواخت ρ_{L_0} در امتداد محور z قرار داشته باشد و تعدادی لایه استوانه‌ای عایق که قابلیتهای گذردهی آنها توابعی دلخواه از r هستند خط بار را احاطه کرده باشند، میدان $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا و از جمله در درون همه عایقها از رابطه یکسان $\mathbf{D}=\dfrac{\rho_{L_0}}{2\pi r}\hat{\mathbf{a}}_r$ به دست می‌آید صرف نظر از اینکه تغییرات ε_r عایقها نسبت به r چگونه باشد. در صورتی که لایه یا لایه‌های استوانه‌ای هم‌محور هادی باشند، میدان کل $\mathbf{E}$ در همه هادیها صفر و در بیرون آنها از رابطه $\mathbf{E}=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{a}}_r$ به دست می‌آید که در آن Q بار آزاد اولیه محصور در یک سطح گوسی به شعاع r، طول واحد و محوری منطبق بر محور z می‌باشد. باید توجه شود که بار القایی آزاد فقط در صفر نمودن میدان درون هادی نقش دارد و در محاسبه Q وارد نمی‌شود.

۳) در دستگاه مختصات کروی اگر توزیع بار الکتریکی اولیه فقط تابعی از مختصه شعاعی r بوده، جسم هادی یا عایق دارای تقارن کروی باشد (به عبارت دیگر، فضای اشغال شده توسط جسم با رابطه $a<r<b$ که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند، بیان شود)، و در صورتی که جسم مورد نظر عایق بوده و قابلیت گذردهی آن ثابت یا حداکثر تابعی از r باشد، آنگاه میدان $\mathbf{D}$ حاصل، از رابطه $\mathbf{D}=\dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{a}}_r$ به دست می‌آید که در آن Q بار آزاد محصور در یک سطح کروی به شعاع r و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد. به عنوان مثال اگر بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات قرار داشته باشد و این بار را چندین لایه عایق کروی هم‌مرکز که قابلیت‌های گذردهی آنها توابعی دلخواه از مختصه کروی r هستند احاطه کرده باشند، میدان $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا، اعم از درون و بیرون عایقها، از رابطه بالا به دست می‌آید. در صورتی که لایه‌های کروی از جنس هادی باشند، میدانهای کل $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ در درون آنها صفر و در بیرون آنها از رابطه $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}=\dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{a}}_r$ به دست می‌آیند که در آن Q بار آزاد اولیه محصور در سطح گوسی کروی به شعاع r و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد. بارهای القایی آزاد، چون با اندازه‌های مساوی ولی ناهمنام روی سطوح هادی ظاهر می‌شوند، تأثیری بر میدان الکتریکی در نقاط بیرون هادی ندارند.

در صورتی که اجسام عایق و هادی، هر دو حضور داشته باشند، بدیهی است که در درون هادیها

$\mathbf{E}=\mathbf{o}$ و $\mathbf{D}=\mathbf{o}$ بوده و در سایر نقاط (عایق یا خلأ) میدان $\mathbf{D}$ به شرحی که در بالا گذشت با استفاده از قانون گوس در دستگاه مختصات مناسب محاسبه می‌شود. موارد جالب دیگری که محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس میسر است عبارتند از: الف) دو صفحه هادی بینهایت موازی (عمود بر محور z) که فضای بین آنها را عایقی با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ اشغال نموده باشد، ب) دو سطح استوانه‌ای بینهایت طویل هادی که محورشان منطبق بر محور z باشد و فضای بین آنها را جسم عایقی با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon(\varphi,z)$ فراگرفته باشد، ج) دو سطح کروی هادی که مرکزشان بر مبدأ مختصات منطبق باشد و فضای بین آنها را ماده عایقی با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon(\theta,\varphi)$ پر کرده باشد. با قرار دادن بارهای مساوی و ناهمنام روی دو سطح هادی، از طریق اِعمال ولتاژ ثابتی بین هادیها، میدان الکتریکی پدید آمده در جسم عایق به ترتیب به‌صورت $\mathbf{E}=\mathbf{E}_\circ\,\hat{\mathbf{a}}_z$ برای حالت (الف)، $\mathbf{E}=\frac{\mathbf{E}_\circ}{\mathbf{r}}\,\hat{\mathbf{a}}_r$ برای حالت (ب) و $\mathbf{E}=\frac{\mathbf{E}_\circ}{\mathbf{r}^2}\,\hat{\mathbf{a}}_r$ برای حالت (ج) خواهد بود، که $\mathbf{E}_\circ$ مقداری ثابت بوده و با به کار بردن قانون گوس برحسب $\mathbf{D}$ محاسبه می‌شود.

چنانچه توزیع بار، ویژگیهای هندسی جسم و قابلیت گذردهی به گونه‌ای به جز مواردی که در بالا بیان گردید باشند، محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس به سادگی میسر نخواهد بود و به کار بستن روشهای دیگر ضروری می‌باشد. روش تصویر و محاسبه میدان از طریق حل معادله لاپلاس از جمله این روشها هستند که در فصل ۴ مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

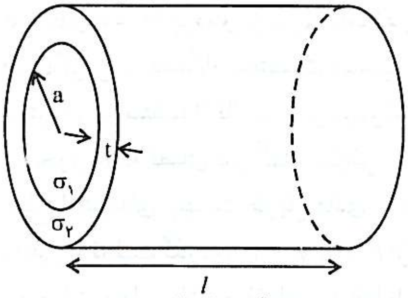
برای محاسبه مقاومت فرض می‌شود که اِعمال ولتاژ ثابتی بین دو انتهای جسم تولید جریان I با چگالی توزیع $\mathbf{J}$ می‌نماید. با توجه به ویژگیهای هندسی جسم و اینکه جریان در هر سطح مقطع دلخواهی از جسم باید I باشد، تابع توزیع $\mathbf{J}$ تعیین می‌گردد. سپس با استفاده از $\mathbf{E}=\mathbf{J}/\sigma$ در رابطه ۳-۱۳ مقاومت جسم محاسبه می‌شود.

برای محاسبه ظرفیت فرض می‌شود که اِعمال ولتاژ ثابتی بین دو هادی منجر به تشکیل بارهای Q و Q- روی سطوح هادیها می‌شود. آنگاه میدان الکتریکی در عایقی که فضای بین دو هادی را اشغال نموده است تعیین می‌گردد. سرانجام با استفاده از رابطه ۳-۷۲ ظرفیت محاسبه می‌شود. محاسبه ظرفیت را می‌توان با استفاده از رابطه $C=2W_e/V^2$ نیز انجام داد، که در آن W_e انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی بین دو هادی و V اختلاف پتانسیل بین آنها می‌باشد.

انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی از رابطه ۳-۸۶ برای توزیعهای نقطه‌ای، روابط ۳-۸۷ و ۳-۸۸ برای توزیعهای حجمی و سطحی و رابطه ۳-۹۵ برای هر نوع توزیع دلخواه بار الکتریکی به دست می‌آید. بیان انرژی ذخیره شده به‌صورت تابعی از یک مختصه، محاسبه نیرو و گشتاور در جهت آن مختصه را با استفاده از روابط ۳-۱۰۴ و ۳-۱۰۶، به فرض ثابت ماندن پتانسیل، میسر می‌نماید. کسب آشنایی بیشتر برای محاسبه نیرو و گشتاور طی مسائل ۳۰ تا ۳۲ صورت می‌گیرد.

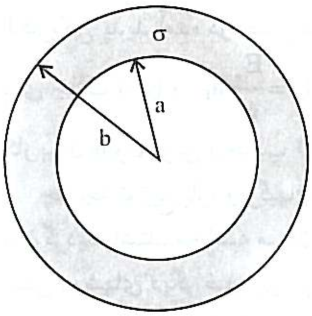
۱. از یک سیم مسی با سطح مقطع یک میلیمتر مربع جریان مستقیم ۱ آمپر می‌گذرد. اگر تعداد الکترونهای آزاد مس در متر مکعب برابر $N=8/4\times 10^{28}$ باشد، سرعت متوسط حرکت الکترونها را محاسبه کنید. چه زمانی طول می‌کشد تا یک الکترون مسافتی برابر ۱۰۰ کیلومتر را طی کند؟

۲. استوانه‌ای به شعاع a و طول l از یک ماده هادی با رسانایی σ_1 تشکیل شده‌است. این استوانه، مطابق شکل ۳-۲۱، دارای پوششی به ضخامت t و رسانایی σ_2 است. مقاومت استوانه را بین دو سطح انتهایی آن محاسبه کنید.



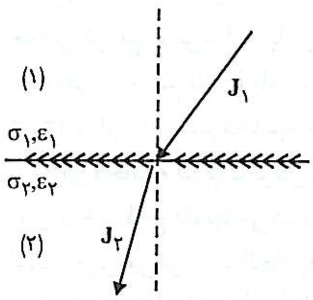
شکل ۳-۲۱

۳. یک مقاومت از جسمی با رسانایی σ و به شکل یک لایه کروی، مانند شکل ۳-۲۲، ساخته شده است. اگر شعاعهای داخلی و خارجی این لایه کروی به ترتیب برابر a و b باشند، مقاومت بین سطوح r=a و r=b را محاسبه کنید.



شکل ۳-۲۲

۴. دو ناحیه با قابلیتهای گذردهی ε_1 و ε_2 و رسانایی‌های σ_1 و σ_2، مطابق شکل ۳-۲۳، را در نظر بگیرید. فرض کنید یک جریان الکتریکی که چگالی آن در ناحیه ۱ برابر J_1 و در ناحیه ۲ برابر J_2 است، از ناحیه ۱ به سوی ناحیه ۲ برقرار باشد. نشان دهید که شرط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی چگالی جریان به‌صورت $J_{t_1}/\sigma_1 = J_{t_2}/\sigma_2$ و برای مؤلفه‌های عمودی آن به‌صورت $J_{n_1} = J_{n_2}$ بیان می‌شود. همچنین نشان دهید که در مرز مشترک دو ناحیه باری با چگالی سطحی $\rho_S = J_n(\varepsilon_1/\sigma_1 - \varepsilon_2/\sigma_2)$ وجود دارد.



شکل ۳-۲۳

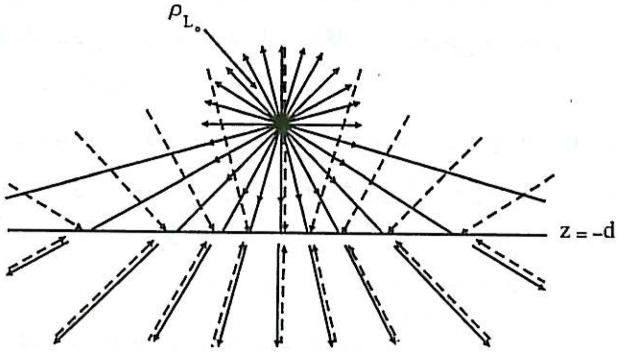
۵. تابع پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا که سطح مقطعی یکنواخت در امتداد محور z دارد و به سه سطح هادی $(x=0\ ,\ y>0)$ ، $(y=0\ ,\ x>0)$ و $(xy=2\ ,\ x>0\ ,\ y>0)$ محدود می‌باشد توسط رابطه $V = V_0\, xy$ بیان می‌شود. چگالی توزیع بار الکتریکی روی این سه سطح هادی را به دست آورید.

۶. میدان الکتریکی در فضای اطراف یک کره هادی به شعاع a که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود عبارت است از :

$$E = E_0\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_r - E_0\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta \quad r\geq a$$

الف) آیا میدان مزبور ویژگی یک میدان الکتریکی ساکن را دارا است؟
ب) نشان دهید که مؤلفه مماسی میدان الکتریکی روی سطح کره هادی صفر است.
ج) چگالی توزیع بار الکتریکی القا شده روی سطح کره هادی را به دست آورید.
د) میدانهای اولیه و ثانویه را از عبارت فوق که برای میدان کل می‌باشد محاسبه کنید.

۷. ناحیه $z<-d$ از فضا را ماده‌ای هادی فرا گرفته است. یک خط بینهایت بار با چگالی یکنواخت ρ_{L_0}، مطابق شکل ۳-۲۴، در امتداد محور y قرار دارد. با استفاده از میدان ثانویه مورد نیاز برای آنکه میدان الکتریکی کل در ناحیه هادی صفر شود و با استفاده از تقارن میدان ثانویه نسبت به $z=-d$ نشان دهید که:



شکل ۳-۲۴

الف) چگالی بارهای القا شده روی سطح هادی از رابطه $-\rho_{L_0} d/\pi(x^2+d^2)$ در دستگاه مختصات مستطیلی به دست می‌آید.
ب) مقدار بار القایی به ازای واحد طول در امتداد محور y برابر $-\rho_{L_0}$ است.
ج) میدان الکتریکی در ناحیه $z>-d$ همانند میدانی است که از خط بینهایت بار در امتداد محور y و یک خط بار تصویر که موازی با محور y بوده، از نقطه $(0, 0, -2d)$ بگذرد و دارای چگالی یکنواخت $-\rho_{L_0}$ باشد حاصل می‌شود.

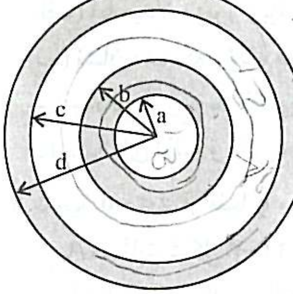
۸. در مسئله ۷ فرض کنید به جای خط بینهایت بار، بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات قرار دارد. نشان دهید که:

الف) چگالی بارهای القا شده روی سطح هادی از رابطه $-Qd/2\pi(r^2+d^2)^{3/2}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید.

ب) مقدار کل بار القا شده روی سطح هادی برابر $-Q$ است.

ج) میدان الکتریکی در ناحیه $z>-d$ همانند میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات و یک بار نقطه‌ای تصویر، که مقداری برابر $-Q$ داشته و در نقطه $(0, 0, -2d)$ واقع باشد، حاصل می‌شود.

۹. دو لایه هادی استوانه‌ای، بینهایت طویل و هم‌محور، مطابق شکل ۳-۲۵، مفروضند. مقدار خالص بار الکتریکی روی هادیهای درونی و بیرونی در واحد طول به ترتیب برابر ρ_{L_1} و ρ_{L_2} می‌باشد. توزیع بار الکتریکی را روی سطوح r=a ، r=b ، r=c و r=d به دست آورید. فضای بین هادیها خلأ است.



شکل ۳-۲۵

۱۰. یک ماده عایق استوانه‌ای شکل به شعاع a و به طول بینهایت، دارای پلاریزاسیون دائمی $\mathbf{P}=P_0\,\hat{a}_y$ بوده و در امتداد محور z در خلأ قرار دارد. چگالیهای سطحی و حجمی بارهای مقید القایی را در ماده عایق به دست آورید.

۱۱. ناحیه‌ای از فضا محدود به دو سطح کروی هم‌مرکز و به شعاعهای a و b را ماده عایقی پر می‌کند (b>a) . بار نقطه‌ای Q را در مرکز لایه کروی مزبور قرار می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق عبارت است از :

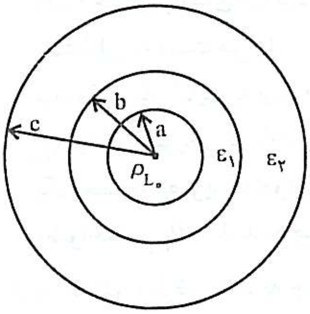
$$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{a}_r \qquad a<r<b$$

الف) قابلیت گذردهی ماده عایق را به دست آورید.

ب) چگالی بارهای سطحی پلاریزاسیون روی سطوح r=a و r=b را محاسبه نمایید.

ج) چگالی حجمی بار ناشی از پلاریزاسیون در ناحیه a<r<b را به دست آورید.

۱۲. دو لایه عایق استوانه‌ای بینهایت طویل را با قابلیت‌های گذردهی ε_1 و ε_2 ، مطابق شکل ۳-۲۶، در نظر می‌گیریم. قابلیت گذردهی لایه درونی ثابت و برابر $\varepsilon_1=\varepsilon_0\frac{c}{b}$ می‌باشد، ولی قابلیت گذردهی لایه بیرونی غیر یکنواخت و به‌صورت $\varepsilon_2=\varepsilon_0\frac{c}{r}$ تغییر می‌کند. یک خط بار بینهایت طویل با چگالی ثابت ρ_{L_0} هم‌محور با استوانه‌های عایق قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه :



شکل ۳-۲۶

الف) میدان D در تمام نقاط فضا،

ب) میدان E در تمام نقاط فضا،

ج) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در هر دو عایق،

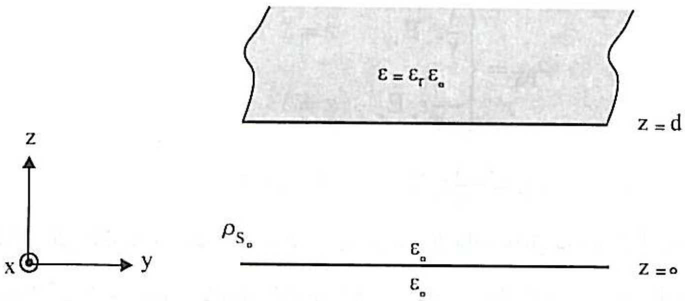
د) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطوح r=a ، r=b و r=c .

۱۳. ناحیه z>d از فضا را یک ماده عایق با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ فراگرفته، در حالی‌که ناحیه z<d خلأ است. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_{S_0} ، مطابق شکل ۳-۲۷، در z=0 قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه :

الف) میدان $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا،

ب) میدان الکتریکی کل ($\mathbf{E}$) در تمام نقاط فضا،

ج) چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی مقید در ناحیه عایق.



شکل ۳-۲۷

۱۴. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_0 در کره‌ای از جنس عایق با قابلیت گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ توزیع شده است. نشان دهید که پتانسیل در مرکز این کره برابر است با $V = \rho_0 a^2 (2\varepsilon_r + 1)/6\varepsilon_0 \varepsilon_r$ که در آن a شعاع کره عایق است.

۱۵. ناحیه $z < 0$ از فضا را عایقی با قابلیت گذردهی ε_1 و ناحیه $z > 0$ را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ε_2 اشغال نموده است. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_{S_0} در $z=0$ قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در $z=0$،

ج) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در تمام نقاط فضا.

۱۶. مسئله ۱۵ را برای حالتی که به جای صفحه بینهایت بار، یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_{L_0} (مثلاً در امتداد محور x) قرار داده شود تکرار نمایید.

۱۷. مسئله ۱۵ را برای حالتی که، به جای صفحه بینهایت بار، یک بار نقطه‌ای Q (مثلاً در مبدأ مختصات) قرار داده شود تکرار نمایید.

۱۸. فضای محصور بین $z=0$ و $z=d$ را ماده عایقی فراگرفته است. قابلیت گذردهی این ماده غیر یکنواخت بوده و طبق رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$\varepsilon = \frac{4\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}$$

میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_0 \hat{a}_z$ به این ماده اِعمال می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان $\mathbf{D}$ در درون و بیرون عایق.

ب) میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{P}$ در درون عایق، چگالی سطحی ρ_{PS} روی سطوح $z=0$ و $z=d$ و نیز چگالی حجمی ρ_P در درون عایق.

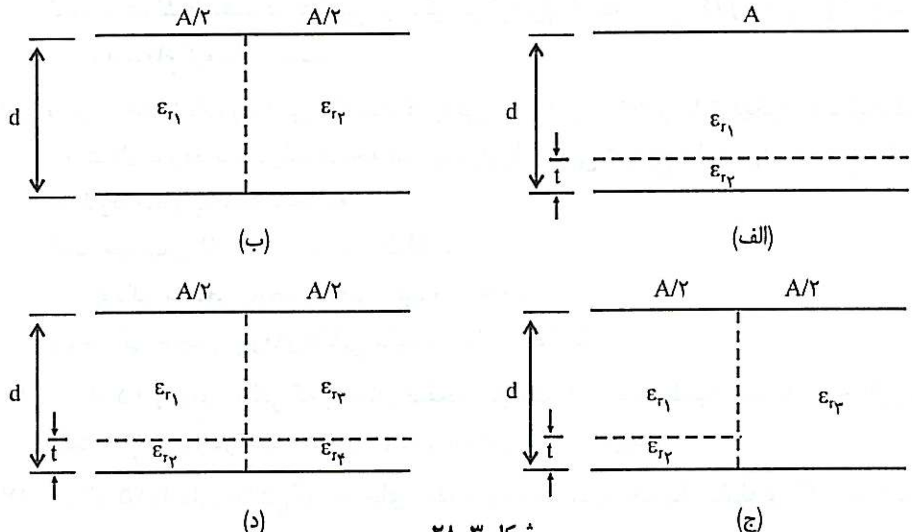
۱۹. ناحیه $۲>z>۱$ از فضا را ماده عایقی با ضریب حساسیت الکتریکی غیر یکنواخت $\chi_e=\frac{z}{۴-z}$ اشغال نموده است. میدان الکتریکی یکنواخت $E_a=E_\circ\,\hat{a}_z$ به ماده اِعمال می‌شود. نشان دهید که چگالیهای سطحی و حجمی بارهای پلاریزاسیون از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\rho_{PS}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ E_\circ & z=۲\\ -\frac{۱}{۴}\varepsilon_\circ E_\circ & z=۱\end{cases}$$

$$\rho_P=-\frac{۱}{۴}\varepsilon_\circ E_\circ \qquad ۱<z<۲$$

میدان الکتریکی ثانویه و میدان کل را در درون و بیرون ماده عایق به دست آورید.

۲۰. ظرفیت هر یک از خازنهای با صفحات موازی را که در شکل ۳-۲۸ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید. فرض کنید ضخامت عایقها از ابعاد صفحات هادی بسیار کوچکتر بوده، آنگاه میدان الکتریکی را در بین صفحات هر خازن با میدان صفحات موازی و بینهایت تقریب بزنید.



شکل ۳-۲۸

۲۱. ناحیه $z<-d$ از فضا را یک ماده عایق با قابلیت گذردهی نسبی ε_r به طور یکنواخت فراگرفته است. بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات قرار داده می‌شود.

الف) نشان دهید که چگالی سطحی بارهای پلاریزاسیون القایی روی سطح عایق عبارت است از:

$$\rho_{PS}=-\frac{Q(\varepsilon_r-۱)d}{۲\pi(\varepsilon_r+۱)(r^۲+d^۲)^{۳/۲}}$$

و چگالی حجمی بارهای پلاریزاسیون صفر است.

ب) نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق $(z<-d)$ همانند میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای به مقدار $۲Q/(\varepsilon_r+۱)$ است که در مبدأ مختصات واقع باشد.

ج) نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در ناحیه $z>-d$ همانند میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات و یک بار نقطه‌ای تصویر که مقداری برابر $-Q(\varepsilon_r-1)/(\varepsilon_r+1)$ داشته و در نقطه $(0, 0, -2d)$ واقع باشد حاصل می‌شود.

۲۲. قابلیت گذردهی عایق بین صفحات یک خازن از یک صفحه تا صفحه دیگر به طور خطی از ε_1 تا ε_2 تغییر می‌کند.

الف) نشان دهید که ظرفیت این خازن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$$

که d فاصله دو صفحه و A مساحت هر یک از صفحات است.

ب) چگالی حجمی بار پلاریزاسیون در عایق خازن را به دست آورید.

۲۳. بار الکتریکی q در کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. نشان دهید که انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار وقتی با استفاده از روابط ۳-۸۷ و ۳-۹۴ محاسبه شود نتیجه یکسان $W_e=3q^2/(20\pi\varepsilon_0 a)$ را می‌دهد.

۲۴. از سه سطح کروی هادی هم‌مرکز، کره بیرونی به شعاع c و کره درونی به شعاع a زمین شده‌اند و روی کره میانی به شعاع b بار q قرار داده شده است. نشان دهید که انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم برابر است با:

$$W_e= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$$

۲۵. از سه کره هادی هم‌مرکز، کره میانی به شعاع b زمین گردیده، روی کره درونی به شعاع a بار مثبت Q_1 و روی کره بیرونی به شعاع c بار منفی $-Q_2$ قرار داده شده است. فضای اطراف کره‌ها در همه جا خلأ است. مطلوب است محاسبه:

الف) محاسبه پتانسیل در تمام نقاط فضا،

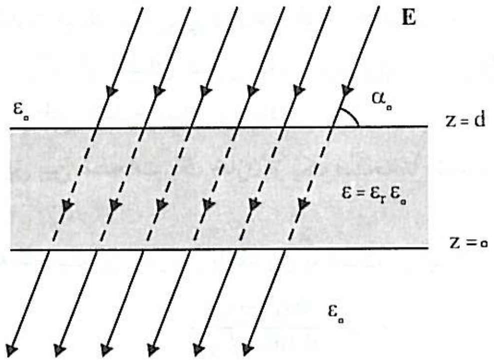
ب) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم.

۲۶. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_{S_0} روی یک سطح کروی به شعاع a توزیع شده است. چه مقدار کار باید انجام گیرد تا توزیع بار متراکم شده، و روی سطح کره‌ای به شعاع b $(b<a)$ قرار گیرد؟ توزیع جدید یکنواخت فرض می‌شود.

۲۷. میدان الکتریکی یکنواختی با شدت E_0 تحت زاویه α_0، مطابق شکل ۳-۲۹، به یک جسم عایق، محدود به صفحات $z=0$ و $z=d$ اِعمال می‌گردد. قابلیت گذردهی عایق $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ است. فضای اطراف عایق خلأ می‌باشد. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای کل **D** و **E** در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در $z=0$ و $z=d$.



شکل ۳-۲۹

۲۸. در مثال ۳-۴ نشان دهید که میدان الکتریکی در خارج محفظه کروی هادی بستگی به موقعیت بار نقطه‌ای Q در درون محفظه ندارد. به عبارت دیگر اگر بار Q در هر نقطه دلخواهی در درون محفظه کروی باشد، میدان E در خارج آن هم‌چنان برابر $\hat{a}_r\,(Q/4\pi\varepsilon_\circ r^2)$ می‌باشد.

۲۹. سیستمی مرکب از دو هادی کامل که فضای بین آنها را ماده‌ای با قابلیت گذردهی ε و رسانایی σ پر کرده باشد، مطابق شکل ۳-۱۸، را در نظر بگیرید. چنین سیستمی هم دارای مقاومت و هم دارای ظرفیت است. نشان دهید که رابطه زیر بین مقاومت R و ظرفیت C برقرار می‌باشد. ε و σ مقادیر ثابتی فرض می‌شوند.

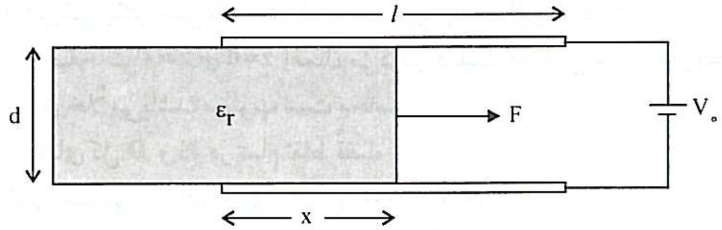
$$RC = \varepsilon/\sigma$$

۳۰. بار الکتریکی Q روی سطح یک کره هادی به شعاع a توزیع شده است. مطلوب است محاسبه نیرویی که سعی در منبسط نمودن کره هادی دارد. آیا مثبت یا منفی بودن بار Q تأثیری در جهت این نیرو دارد؟

۳۱. در یک خازن با صفحات موازی، به نحوی که در شکل ۳-۳۰ نشان داده شده است، بخشی از عایق بیرون از ناحیه بین دو صفحه قرار داده می‌شود. به خازن اختلاف پتانسیل ثابت $V_\circ$ اِعمال می‌شود. نشان دهید که به جسم عایق نیرویی برابر F اِعمال می‌گردد که عبارت است از :

$$F = \frac{\varepsilon_\circ(\varepsilon_r - 1)\,a\,V_\circ^2}{2d}$$

در این رابطه d ضخامت، a عرض و ε_r قابلیت گذردهی نسبی عایق می‌باشد.



شکل ۳-۳۰

۳۲. یک خازن متشکل از دو سطح هادی کروی هم‌مرکز و به شعاعهای a و b مفروض است. فضای بین دو کره هادی محدود به $a<r<c$ را عایقی با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_{\circ}\varepsilon_r$ اشغال کرده است. بقیه فضای بین دو کره محدود به $c<r<b$ خلأ فرض می‌شود. بارهای Q و $-Q$ روی هادیها قرار داده می‌شوند. نیرویی که به هادی بیرونی وارد می‌شود را محاسبه کنید.

۳-۱۶ مسائل

۱. میدان الکتریکی یکنواخت $E=\hat{a}_x+3\hat{a}_y-2\hat{a}_z$ ولت بر متر در فضایی با رسانایی ۵ مهو بر متر وجود دارد. مطلوب است محاسبه:

الف) جریانی که از یک سطح دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ متر واقع روی صفحه xy می‌گذرد.

ب) توان تلف شده در ناحیه محدود به $-1\leq x\leq 1$، $0\leq y\leq 3$ و $-2\leq z\leq 5$. ابعاد این ناحیه برحسب متر است.

۲. یک مقاومت از جسمی با رسانایی σ و با تقارن استوانه‌ای مطابق شکل ۳-۳۱ را در نظر بگیرید. سطوح قاعده این مقاومت، واقع در $z=0$ و $z=l$، با لایه‌ای بسیار نازک از هادی کامل پوشیده فرض می‌شوند؛ از این رو چگالی جریان در یک سطح مقطع دلخواه $z=z_{\circ}$ دارای مؤلفه ثابت J_z می‌باشد. سطح جانبی مقاومت با روابط $r=f(z)$ و $0\leq z\leq l$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌شود.

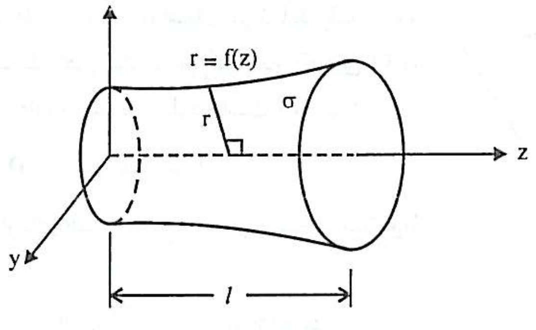
الف) نشان دهید که مقاومت بین سطوح قاعده این جسم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l}\frac{dz}{\sigma f^{2}(z)}$$

ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) مقاومت دو جسم زیر را محاسبه کنید:

(i) یک مخروط ناقص به طول l، شعاع قاعده کوچک‌تر a و شعاع قاعده بزرگ‌تر b.

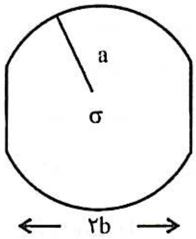
(ii) یک سهموی به طول l و به معادله $r=a+z^2/a$، $0\leq z\leq l$.



شکل ۳-۳۱

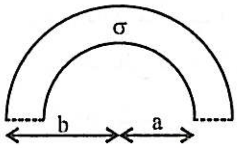
۳. مقاومت مخروط ناقص و سهموی را که در مسئله ۲ تعریف شده‌اند، وقتی که رسانایی ماده به کار رفته به طور خطی از σ_1 تا σ_2 در طول جسم تغییر کند محاسبه کنید.

۴. مقاومت یک کره ناقص به شعاع a و رسانایی σ، که در شکل ۳-۳۲ نشان داده شده است، را محاسبه کنید. طول مقاومت را برابر با ۲b فرض کنید ($b<a$).



شکل ۳-۳۲

۵. یک مقاومت به‌صورت نیمی از یک لایه کروی به شعاعهای درونی و بیرونی a و b مطابق شکل ۳-۳۳ می‌باشد. رسانایی ماده به کار رفته دراین مقاومت غیرهمگن بوده و به صورت $\sigma=\sigma_0 a/r$ در امتداد شعاعی تغییر می‌کند. فرض کنید سطوح $r=a$ و $r=b$ با یک لایه بسیار نازک هادی کامل پوشیده شده باشند. مقاومت بین این دو سطح نیم‌کره‌ای را محاسبه کنید.



شکل ۳-۳۳

۶. سه ماده نواحی $z>d$، $0<z<d$ و $z<0$ از فضا را اشغال نموده‌اند. این سه ماده به ترتیب دارای رسانایی‌های σ_0، $3\sigma_0$ و $4\sigma_0$ و قابلیتهای گذردهی $2\varepsilon_0$، ε_0 و $3\varepsilon_0$ می‌باشند. جریانی با چگالی یکنواخت $\mathbf{J}=4\hat{\mathbf{a}}_x-2\hat{\mathbf{a}}_y+3\hat{\mathbf{a}}_z$ آمپر بر متر مربع در ناحیه $z<0$ وجود دارد. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در ناحیه $z>d$.

ب) چگالی سطحی بار الکتریکی آزاد در مرز $z=d$.

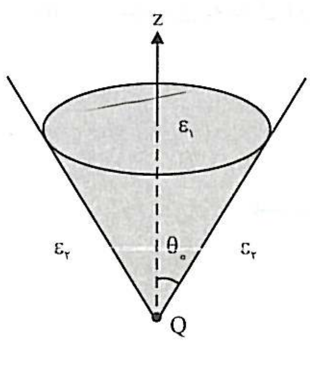
ج) اگر لایه $0<z<d$ با یک هادی کامل جایگزین گردد، نتایج مربوط به بندهای (الف) و (ب) چگونه تغییر می‌کنند؟

*۷. ناحیه $\theta<\theta_0$ از فضا را عایقی با قابلیت گذردهی ε_1، همان‌طور که در شکل ۳-۳۴ نشان داده شده است، اشغال می‌نماید. بقیه فضا را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ε_2 فرا می‌گیرد. بار نقطه‌ای Q در رأس مخروط عایق قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا.

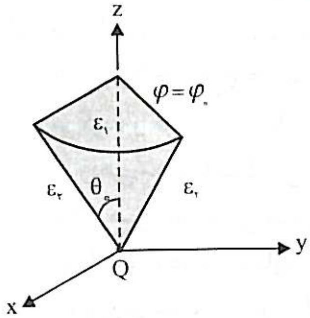
ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در روی سطح مخروط $\theta=\theta_0$.

ج) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در تمام نقاط فضا.



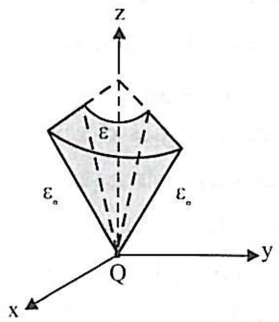
شکل ۳-۳۴

* در مسائل ۷ تا ۱۱ توجیه کنید که تابع تغییرات میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در تمام فضا باید یکسان باشد.



شکل ۳-۳۵

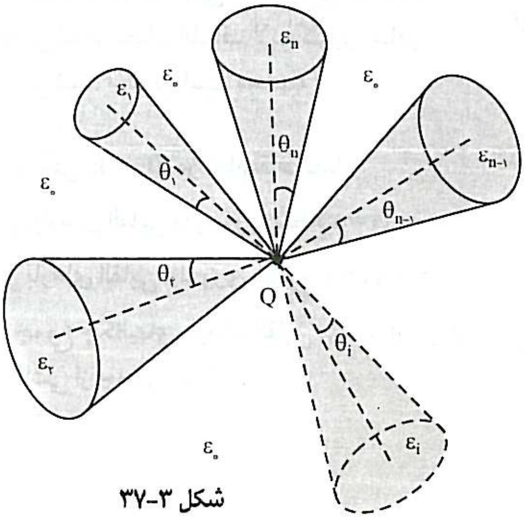
۸. مسئله ۷ را برای وقتی‌که ناحیه $0<\theta<\theta_0$ و $0<\varphi<\varphi_0$ از فضا را عایقی با قابلیت گذردهی ε_1 و بقیه فضا را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ε_2، به‌صورت شکل ۳-۳۵، اشغال نموده باشد تکرار کنید. نتیجه را برای حالتی که $\theta_0=\varphi_0=\pi/2$، یعنی وقتی‌که $\frac{1}{8}$ اول فضا با عایقی که قابلیت گذردهی آن ε_1 است اشغال شده باشد، و $\varepsilon_2=\varepsilon_0$ خلاصه نمایید. بار نقطه‌ای Q هم‌چنان در مبدأ مختصات قرار دارد.



شکل ۳-۳۶

۹. مسئله ۸ را می‌توان به حالت کلی‌تری تعمیم داد، به این ترتیب که فضا توسط n سطح مخروطی به معادلات $\theta=\theta_i\,;\ i=1,2,\dots,n$ و m نیم‌صفحه به معادلات $\varphi=\varphi_j\,;\ j=1,2,\dots,m$ به نواحی متعددی تقسیم می‌شود. سپس هر ناحیه را ماده عایقی با قابلیت گذردهی معینی اشغال می‌کند. بار نقطه‌ای Q هم‌چنان در مبدأ مختصات قرار دارد. به عنوان نمونه ساده‌ای از این حالت کلی‌تر، عایق نشان داده شده در شکل ۳-۳۶ را در نظر بگیرید. این عایق ناحیه $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$ و $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ را اشغال نموده است. قابلیت گذردهی عایق را ε و فضای اطراف عایق را ε_0 فرض کنید. میدانهای الکتریکی **E** و **D** را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید.

۱۰. تعداد n عایق مخروطی شکل، که همگی رأس مشترکی مطابق شکل ۳-۳۷ دارند را در نظر بگیرید. نیم‌زاویه عایق مخروطی iام برابر θ_i و قابلیت گذردهی آن برابر با ε_i فرض می‌شود. فضای اطراف عایقها خلأ می‌باشد. بار نقطه‌ای Q در رأس مشترک عایقها، که منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود، قرار دارد. میدانهای الکتریکی **E** و **D** را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید.

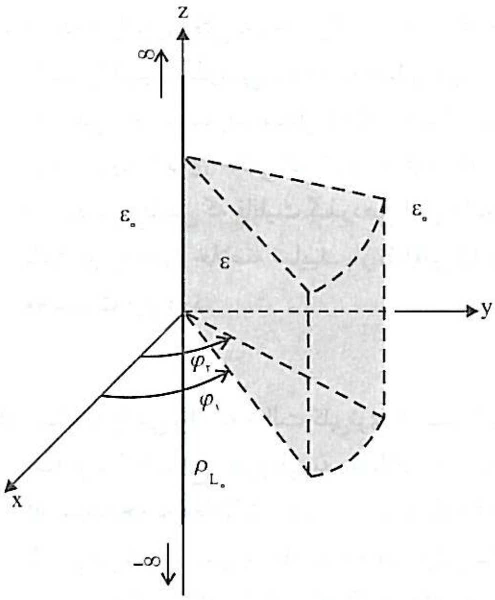


شکل ۳-۳۷

۱۱. فضا توسط n نیم‌صفحه به معادلات $\varphi=\varphi_i$; $i = 1, 2, ..., n$ به n ناحیه تقسیم می‌گردد و هر ناحیه با ماده عایقی با قابلیت گذردهی معینی اشغال می‌شود. همه عایقها دارای مرز مشترکی منطبق بر محور z می‌باشند. خط بار بینهایتی با چگالی ثابت ρ_{L_0} روی محور z قرار داده می‌شود. به عنوان نمونه ساده‌ای از این حالت کلی، عایق نشان داده شده در شکل ۳-۳۸ را در نظر بگیرید. این عایق ناحیه $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ را اشغال می‌نماید. قابلیت گذردهی عایق را ε و فضای اطراف آن را ε_0 فرض کنید. توجه کنید که عایق در امتداد محورهای z و r تا بینهایت ادامه دارد. مطلوب است محاسبه:

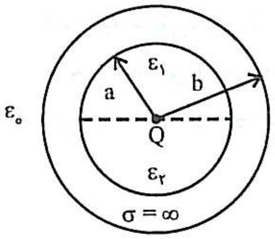
الف) میدانهای **E** و **D** در تمام نقاط فضا،

ب) چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی مقید روی سطوح $\varphi=\varphi_1$، $\varphi=\varphi_2$ و در درون عایق.



شکل ۳-۳۸

۱۲. یک لایه کروی هادی به شعاعهای درونی و بیرونی a و b به‌صورت شکل ۳-۳۹ را در نظر بگیرید. درون این لایه کروی را دو عایق، یکی با قابلیت گذردهی ε_1 در نیمه فوقانی $(r<a\,,\,0<\theta<\pi/2)$ و دیگری با قابلیت گذردهی ε_2 در نیمه پایینی $(r<a\,,\pi/2<\theta<\pi)$ اشغال می‌کنند. بار نقطه‌ای Q در مرکز کره‌ها قرار داده می‌شود. فضای اطراف لایه کروی هادی $(r>b)$ خلأ فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:



شکل ۳-۳۹

الف) میدانهای الکتریکی **E** و **D** در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطح r=a،

ج) چگالی سطحی بارهای القایی آزاد روی سطوح r=a و r=b،

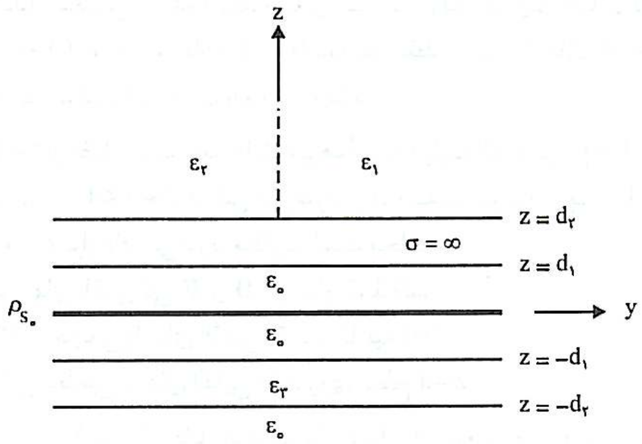
د) نشان دهید که مجموع چگالیهای بارهای القایی مقید و آزاد روی سطح r=a توزیعی یکنواخت دارد. این ویژگی را ناشی از چه می‌دانید؟

۱۳. مجموعه‌ای شامل یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع یکنواخت $\rho_{S_\circ}$ واقع در $z=0$، یک هادی کامل در ناحیه $d_1 < z < d_2$ و سه عایق با قابلیتهای گذردهی ε_1، ε_2 و ε_3، به ترتیب نواحی $z > d_2 , y > 0$ ؛ $z > d_2 , y < 0$ ؛ $-d_2 < z < -d_1$ را مطابق شکل ۳-۴۰ اشغال نموده‌اند. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای الکتریکی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در کلیه نقاط فضا،

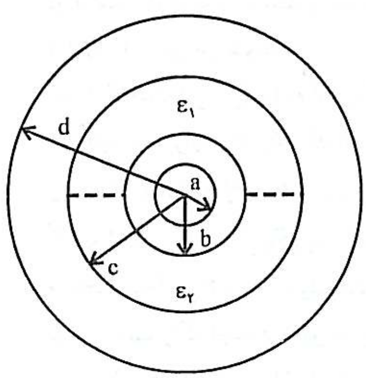
ب) چگالی توزیع بارهای القایی آزاد روی سطوح $z = d_1$, $z = d_2$،

ج) چگالی توزیع بارهای القایی مقید روی سطح $z = d_2$.



شکل ۳-۴۰

۱۴. دو لایه کروی هم‌مرکز از جنس هادی کامل به‌صورت شکل ۳-۴۱ مفروض است. فضای بین دو لایه هادی با دو عایق با قابلیتهای گذردهی ε_1 در نیمه فوقانی و ε_2 در نیمه تحتانی اشغال شده است. بارهای الکتریکی Q_1 و Q_2 به ترتیب روی هادیهای درونی و بیرونی قرار داده می‌شوند. بقیه نواحی فضا که با هادی یا عایق اشغال نشده‌اند خلأ می‌باشند. توزیع بار الکتریکی آزاد را روی سطوح $r=a$، $r=b$، $r=c$ و $r=d$ محاسبه کنید.



شکل ۳-۴۱

۱۵. یک کابل هم‌محور را که شعاعهای هادیهای درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر با a و b هستند در نظر بگیرید. فضای بین هادیها را عایق غیرهمگنی با قابلیت گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_\circ (1 + \sin^2\varphi)$ اشغال می‌کند. ظرفیت کابل را به ازای واحد طول محاسبه کنید.

راهنمایی: میدان الکتریکی $\mathbf{E}$، تابع تغییراتی مستقل از φ دارد.

۱۶. یک خازن کروی دارای دو سطح هادی منطبق بر $r=a$ و $r=b>a$ می‌باشد. فضای بین دو هادی را عایق غیرهمگنی با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_\circ(1+\sin\theta)$ اشغال می‌کند. ظرفیت این خازن را محاسبه کنید.

۱۷. مسئله ۱۶ را برای وقتی که قابلیت گذردهی عایق به‌صورت زیر باشد تکرار کنید:

$$\varepsilon=\varepsilon_\circ(1+\sin\theta)(1+\sin^2\varphi),\quad a<r<b$$

۱۸. یک خازن از دو سطح هادی به شکل دیسک، که شعاع هر یک برابر a و فاصله آنها برابر $d<<a$ می‌باشد، تشکیل شده است. عایق به کار رفته در این خازن دارای قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_\circ(1+e^{-r^2/a^2})$ می‌باشد که r فاصله یک نقطه در درون خازن تا محور مشترک دیسکهای هادی است. ظرفیت این خازن را محاسبه کنید.

۱۹. ناحیه $z>d$ از فضا را یک ماده عایق غیرهمگن با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_\circ[2+e^{-(z-d)/d}]$ فرا گرفته و ناحیه $z<d$ خلأ فرض می‌شود. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت $\rho_{S_\circ}$ در $z=0$ قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای الکتریکی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا.

ب) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در ناحیه $z>d$.

ج) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطح $z=d$.

۲۰. فضای بین دو هادی یک کابل هم‌محور، که شعاعهای درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر با a و b است، را یک ماده عایق غیرهمگن اشغال می‌کند. قابلیت گذردهی این عایق تابع تغییراتی متناوب در امتداد طول کابل داشته و به‌صورت $\varepsilon=\varepsilon_\circ f(z)$ با دوره تناوب $z_\circ$ بیان می‌شود. همچنین $f(z)\geq 1$ فرض می‌شود.

الف) ظرفیت این کابل را به ازای واحد طول برحسب تابع $f(z)$، $\varepsilon_\circ$، a و b محاسبه کنید.

ب) نتیجه را برای وقتی‌که $f(z)=1+|\sin z|$ باشد به دست آورید.

۲۱. سیستمی شامل n لایه عایق کروی هم‌مرکز و بار نقطه‌ای Q، که در مرکز مشترک کره‌های عایق قرار گرفته است، را در نظر بگیرید. قابلیت گذردهی هر یک از لایه‌های عایق کروی را تابعی دلخواه از مختصه شعاعی r فرض کنید، مشروط بر اینکه مقدار آن همواره بزرگ‌تر یا مساوی $\varepsilon_\circ$ باشد. بقیه نواحی فضا را که اجسام عایق در برنگرفته‌اند خلأ فرض کنید.

الف) نشان دهید که میدان $\mathbf{D}$ تابع تغییرات یکسانی در تمام نقاط فضا دارد.

ب) اگر میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در یکی از این عایقها به‌صورت $\mathbf{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ br}\hat{\mathbf{a}}_r$ باشد، قابلیت گذردهی این عایق چیست؟ این عایق فضای $a<r<b$ را اشغال می‌کند.

ج) چگالی توزیع حجمی بارهای القایی مقید در عایق بند (ب) را به دست آورید.

۲۲. سیستمی شامل n لایه عایق استوانه‌ای هم‌محور و خط بار بینهایتی با چگالی ثابت ρ_{L_0}، که روی محور مشترک عایقها قرار گرفته است، را در نظر بگیرید. قابلیت گذردهی هر یک از عایقهای استوانه‌ای را تابعی دلخواه از مختصه شعاعی r فرض کنید، مشروط بر اینکه مقدار آن همواره بزرگ‌تر یا مساوی ε_0 باشد. بقیه نواحی فضا راکه عایقها اشغال ننموده‌اند خلأ فرض کنید.
الف) نشان دهید که میدان D تابع تغییرات یکسانی در تمام نقاط فضا دارد.
ب) میدان E و چگالی توزیع حجمی بارهای القایی مقید را در یکی از این عایقها که قابلیت گذردهی آن برابر با $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + e^{-r})$ می‌باشد محاسبه کنید.
ج) اگر به جای خط بار، یک استوانه هادی که شعاع آن از شعاعهای همه عایقها کوچک‌تر بوده و باری مساوی خط بار روی سطح آن توزیع شده باشد، جایگزین گردد، چه تغییراتی در نتایج بندهای (الف) و (ب) به وجود خواهد آمد؟

۲۳. ناحیه $-a < x < a$ از فضا را ماده عایقی با قابلیت گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0 [2 + \sin(\pi x/a)]$ اشغال نموده است. میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_a = E_0 \hat{\mathbf{a}}_x$ به این ماده اِعمال می‌شود. مطلوب است محاسبه:
الف) میدان D در تمام نقاط فضا.
ب) میدانهای E و P در درون عایق.
ج) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطوح x=a و $x=-a$ و نیز چگالی حجمی بارهای القایی مقید در درون عایق.

۲۴. مسئله ۲۳ را برای وقتی که میدان الکتریکی اولیه به‌صورت مایل به ماده عایق اِعمال شود، یعنی $\mathbf{E}_a = E_{0x} \hat{\mathbf{a}}_x + E_{0y} \hat{\mathbf{a}}_y$، تکرار کنید.

۲۵. ناحیه $-a < x < a$ از فضا را یک ماده عایق اشغال نموده است. وقتی که میدان اولیه‌ای با شدت $|\mathbf{E}_a| = 3$ V/m به این عایق اِعمال شود، بردار پلاریزاسیون $\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\hat{\mathbf{a}}_x + \sqrt{2}\hat{\mathbf{a}}_y)$ (کولمب بر متر مربع) در عایق ایجاد می‌شود. مطلوب است محاسبه:
الف) میدان اولیه $\mathbf{E}_a$ در شکل برداری آن.
ب) قابلیت گذردهی نسبی (ε_r) جسم عایق.

۲۶. سه استوانه هادی هم‌محور و بینهایت طویل دارای شعاعهای a، b و c می‌باشند. فضای a<r<b را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ε_1 و فضای b<r<c را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ε_2 اشغال می‌نمایند. روی استوانه درونی (r=a) بارالکتریکی به میزان ρ_{L_1} در واحد طول و روی استوانه بیرونی باری به میزان $-\rho_{L_2}$ در واحد طول قرار داده می‌شود. استوانه هادی میانی (r=b) به زمین وصل است. مطلوب است محاسبه:
الف) تابع پتانسیل در تمام نقاط فضا (پتانسیل زمین صفر فرض می‌شود)،
ب) انرژی ذخیره شده در واحد طول این مجموعه.

۲۷. ناحیه‌ای از فضا را که با رابطه $2x + y + 2z < 3$ مشخص می‌گردد، ماده عایقی با قابلیت گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 2$ اشغال نموده است. میدان $\mathbf{E}$ در بیرون عایق، یعنی در ناحیه $2x + y + 2z > 3$، برابر با $\mathbf{E}_1 = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 5\hat{a}_z$ است. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانی الکتریکی $\mathbf{E}_2$ در درون عایق،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطح عایق.

۲۸. ناحیه $x > 0$ از فضا را ماده عایقی با قابلیت گذردهی $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$ اشغال نموده است، در حالی‌که ناحیه $x < 0$ خلأ می‌باشد. میدانهای الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ به ترتیب در نواحی $x < 0$ و $x > 0$ از میدان اولیه $\mathbf{E}_a$ (که قبل از حضور ماده عایق وجود داشته است) پدید آمده‌اند. درصورتی‌که $\mathbf{E}_1 = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$ بوده و هیچ بار الکتریکی آزاد در مرز $x = 0$ وجود نداشته باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) میدان $\mathbf{E}_2$ ب) میدان اولیه $\mathbf{E}_a$

۲۹. ناحیه $x > -d$ از فضا را ماده عایقی با قابلیت گذردهی نسبی ε_r فراگرفته است. یک خط بار بینهایت با چگالی توزیع یکنواخت ρ_{L_0} به فاصله d از سطح عایق و موازی با آن در $(x = 0, y = 0)$ قرار داده می‌شود. ناحیه $x < -d$ خلأ فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا. تحقیق کنید که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در ناحیه عایق همانند میدان حاصل از یک خط بار با چگالی $2\rho_{L_0}/(\varepsilon_r + 1)$ واقع در $(x = 0, y = 0)$ می‌باشد. همچنین میدان $\mathbf{E}$ در بیرون عایق همانند میدانی است که از خط بار اصلی و یک خط بار تصویر با چگالی $-\rho_{L_0}(\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 1)$ واقع در $(x = -2d, y = 0)$ پدید آید.

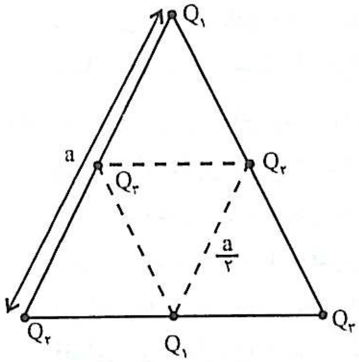
ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطح $x = -d$.

۳۰. بار الکتریکی Q در درون کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. چه مقدار کار باید انجام گیرد تا توزیع بار متراکم شده، و در درون کره کوچک‌تری به شعاع $b < a$ قرار گیرد؟ توزیع جدید بار هم‌چنان یکنواخت است.

۳۱. بار الکتریکی Q در درون کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. اگر توزیع بار از حالت یکنواخت به یک توزیع غیریکنواخت با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}$ تغییر کند، چه مقدار انرژی از این تغییر توزیع حاصل می‌شود؟ ناحیه توزیع جدید بار هم‌چنان درون کره به شعاع a است.

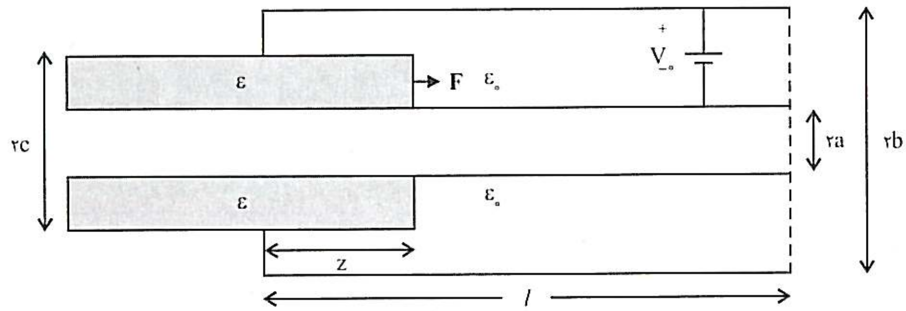
۳۲. مجموعه‌ای شامل یک توزیع بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_0 در فضایی کروی به شعاع a و یک لایه کروی هادی که هم‌مرکز با توزیع بار بوده و دارای شعاعهای درونی و بیرونی b و c می‌باشد را در نظر بگیرید. لایه کروی هادی از دو نیم‌کره تشکیل گردیده که می‌توان آنها را از یکدیگر جدا نمود. چه مقدار انرژی باید صرف نمود تا لایه کروی هادی را از اطراف بار الکتریکی دور نموده و به بینهایت انتقال داد؟ فرض کنید $a < b < c$.

۳۳. سه بار نقطه‌ای $Q_1=3q$، $Q_2=5q$ و $Q_3=-q$ در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع، که طول ضلع آن برابر با a می‌باشد، قرار گرفته‌اند. چه مقدار انرژی باید صرف نمود تا این بارها به رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تری که طول آن a/۲ است، به‌صورت شکل ۳-۴۲ انتقال یابند. فضای اطراف بارها را خلأ فرض کنید.



شکل ۳-۴۲

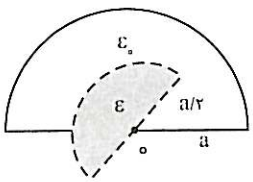
۳۴. یک خازن استوانه‌ای که شعاعهای هادیهای درونی و بیرونی آن به ترتیب a و b می‌باشند را در نظربگیرید. یک لایه عایق استوانه‌ای شکل به شعاعهای درونی و بیرونی a و c (c<b)، مطابق شکل ۳-۴۳ به فضای بین دو هادی خازن داخل می‌گردد. اگر ولتاژ ثابت V_0 به هادیهای خازن اِعمال گردد، نیرویی که عایق استوانه‌ای را به درون خازن می‌کشد محاسبه کنید. قابلیت گذردهی عایق برابر با ε است.



شکل ۳-۴۳

۳۵. یک خازن کروی که شعاعهای هادیهای درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر با a و b می‌باشند را در نظر بگیرید. فضای بین دو هادی را ماده عایق غیرهمگنی با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_0\frac{r}{a}$ اشغال می‌کند. ولتاژ ثابت V_0 به دو هادی خازن اِعمال می‌شود. نیرویی که به هادی بیرونی وارد می‌شود را محاسبه کنید.

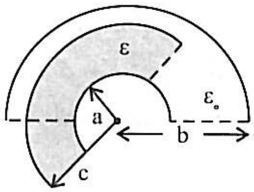
۳۶. یک خازن از دو هادی نیم‌دایره‌ای شکل به شعاع a و به فاصله d<<a از یکدیگر تشکیل شده است. صفحات هادی این خازن غیرمتحرکند، لیکن یک عایق نیم‌دایره‌ای شکل به شعاع a / ۲ و ضخامت d بین دو هادی به گونه‌ای تعبیه می‌شود که بتواند حول محور نیم‌دایره‌های هادی بچرخد. فرض کنید بخشی از این عایق، مطابق شکل ۳-۴۴،



شکل ۳-۴۴

در فضای بین دو هادی قرار گرفته باشد. ولتاژ ثابت V_0 به دو صفحه هادی إعمال می‌شود. گشتاور إعمال شده بر لایه عایق را با فرض قابلیت گذردهی ε به دست آورید.

۳۷. یک خازن از دو سطح نیم استوانه‌ای هادی به شعاعهای درونی a و بیرونی b، مطابق شکل ۳-۴۵ تشکیل شده است. این دو سطح هادی غیرمتحرک بوده، لیکن یک لایه عایق استوانه‌ای به شعاعهای درونی و بیرونی a و c و قابلیت گذردهی ε به گونه‌ای تعبیه می‌شود که بتواند حول محور استوانه‌های هادی چرخیده و به فضای درون خازن وارد شود. ولتاژ ثابت V_0 به هادیهای این خازن إعمال می‌شود. گشتاور إعمال شده بر عایق را محاسبه کنید. فرض کنید $a<c<b$ بوده و میدان الکتریکی در تمام نقاط فضای درون خازن شعاعی است.



شکل ۳-۴۵