

میدان الکتریکی ساکن در اجسام و انرژی الکتریکی

تاکنون مطالعه ما به میدان الکتریکی ساکن در خلأ محدود بوده است. در این فصل دامنه بحث خود را به میدان الکتریکی در اجسام گسترش داده و تأثیرات ماده و میدان بر یکدیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ماده از تجمع اتمها و هر اتم از ذرات باردار یعنی الکترونها و هسته تشکیل می‌شود. فضای بین الکترونها و هسته که بخش اعظم حجم هر اتم را شامل می‌شود خلأ بوده و بنابراین ماده را می‌توان تجمعی از ذرات در خلأ دانست. تحت تأثیر یک میدان الکتریکی خارجی، ذرات باردار از خود عکس‌العمل نشان داده و میدانهای جدیدی را تولید می‌کنند. پدیده‌های ناشی از تأثیرات متقابل ماده و میدان بر یکدیگر بستگی به خواص و نوع ماده دارد. خواص ماده مانند هدایت الکتریکی و قطبی شدن^۱ را در مقیاس اتمی یا میکروسکوپی مطالعه و تشریح می‌کنیم، ولی بررسی رفتار میکروسکوپی میدانها کار آسانی نیست و خوشبختانه در بسیاری از کاربردهای مهندسی ضرورتی هم ندارد. مثلاً، مطالعه دقیق میدان و تغییرات آن از ذره‌ای به ذره دیگر در یک جسم اهمیتی در مسائل مورد علاقه ما نخواهد داشت. از این رو کافی است میدانهای الکترومغناطیس در اجسام را در مقیاس ماکروسکوپی، یعنی وقتی که ناشی از اثرات جمعی تعداد زیادی ذره باشد، تجزیه و تحلیل نماییم.

۳-۱ هدایت الکتریکی در ماده و دسته‌بندی اجسام

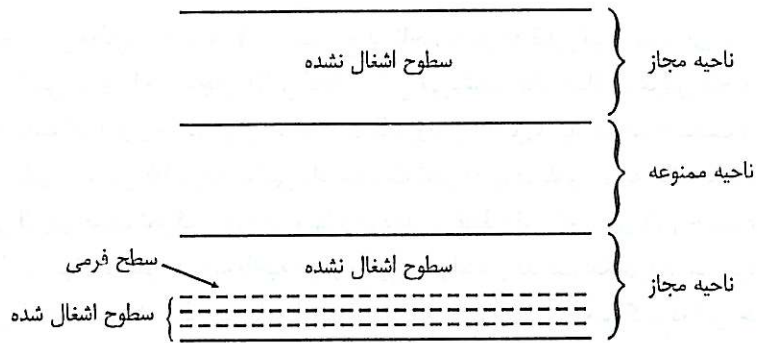
واحد ساختمانی ماده اتم است که متشکل از یک هسته با بار الکتریکی مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی می‌باشد. مقدار کل بار الکترونها هر اتم با میزان بار هسته آن مساوی است، به طوری که اتم و ماده در حالت طبیعی از نظر بار الکتریکی خنثی هستند. الکترونها در لایه‌هایی به فواصل مختلف از هسته قرار می‌گیرند. الکترونها آخرین لایه که به عنوان الکترونها ظرفیت شناخته می‌شوند نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی بر عهده دارند. در برخی اجسام، الکترونها

لایه آخر تحت تأثیر نیروی ضعیفی از سوی هسته بوده و با دریافت انرژی اندکی به سادگی از اتم خود جدا شده و به اتمهای دیگر می‌پیوندند. چنین الکترونهايي که متعلق به اتم خاصی نیستند را الکترونهاي آزاد می‌نامند. فلزات دارای تعداد زیادی الکترون آزاد بوده که در اثر انرژی حرارتی محیط دارای حرکات مداوم ولی بدون نظم و ترتیب می‌باشند. سرعت متوسط الکترونها در مقیاس ماکروسکوپی صفر است و بنابراین از حرکات نامنظم آنها جریان الکتریکی به وجود نمی‌آید. اعمال یک میدان الکتریکی خارجی، الکترونهاي آزاد را با سرعت متوسطی به حرکت درآورده و در نتیجه جریانی که ناشی از جابه‌جایی الکترونهاست به وجود می‌آید. چنین پدیده‌ای را هدایت الکتریکی و جسمی را که قابلیت هدایت آن زیاد باشد، مانند اکثر فلزات، هادی می‌نامند.

در برخی از اجسام دیگر، الکترونهاي آخرین لایه را به سختی می‌توان از هسته دور نمود و اعمال یک میدان الکتریکی خارجی فقط مرکز ثقل ابر الکترونی را نسبت به هسته اندکی جابه‌جا می‌کند (الکترونهاي یک اتم را می‌توان به منزله یک ابر الکترونی کروی که مرکز آن بر هسته منطبق باشد تلقی نمود). در این گونه اجسام الکترونهاي آخرین لایه همانند الکترونهاي نزدیک به هسته همیشه در مجاورت اتم خود باقی می‌مانند و از این رو آنها را الکترونهاي مقید می‌نامند. به علت عدم قابلیت تحرک الکترونهاي مقید و ناچیز بودن تعداد الکترونهاي آزاد، هدایت الکتریکی در این قبیل اجسام بسیار اندک است و آنها را عایق نامند. جابه‌جایی موضعی بارها در اجسام عایق پدیده دیگری موسوم به قطبی شدن را باعث می‌شود که دارای اهمیت زیادی بوده و بخشی از مطالعات ما در این فصل به آن اختصاص می‌یابد.

دسته سومی از اجسام وجود دارند که در حد میانی بین هادیا و عایقا قرار می‌گیرند و به نام نیمه‌هادی شناخته می‌شوند. نیمه‌هادیا دارای تعدادی الکترون آزاد بوده و تا حدودی قابلیت هدایت الکتریکی دارند. اما هدایت الکتریکی در نیمه‌هادیا به طوری که در ادامه روشن خواهد شد نه فقط توسط الکترونهاي آزاد، بلکه از طریق حاملهای دیگری به نام حفره^۱ نیز انجام می‌پذیرد.

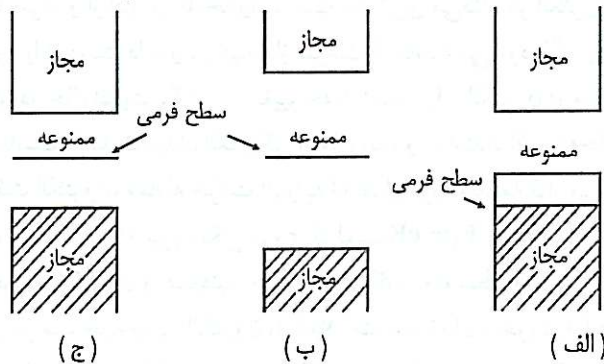
برای آنکه تصویر روشن‌تری از نحوه هدایت در اجسام به دست آوریم، وضعیت الکترونهاي آخرین لایه را از نظر آزاد یا مقید بودن به طور مختصر از دیدگاه نظریه کوانتم مورد بررسی قرار می‌دهیم. بر اساس این نظریه هر الکترون فقط مقادیر ناپیوسته معینی از انرژی را می‌تواند به خود اختصاص دهد. به عبارت دیگر، فقط سطوح معینی از انرژی وجود دارند که یک الکترون متناسب با اندازه انرژی اش یکی از آنها را اشغال می‌کند. طبق اصل پاولی^۲ هر سطح انرژی فقط توسط یک الکترون می‌تواند اشغال شود. در اجسام بلورین مانند الماس، سیلیسیم و اکثر فلزات، اتمها به طور منظم و فشرده در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. ساختمان سطوح انرژی در یک جسم بلورین، به علت تأثیر متقابل اتمها روی یکدیگر، به مراتب پیچیده‌تر از چنین ساختمانی در یک اتم تنها می‌باشد (منظور از اتم تنها حالتی است که اتمها را آنقدر از یکدیگر دور فرض کنیم تا تأثیر آنها روی همدیگر قابل اغماض شود). در یک جسم بلورین، بر طبق اصل پاولی الکترونهاي اتمها نباید سطوح انرژی یکسانی را اشغال کنند، هر سطح انرژی که اتمها به تنهایی می‌داشتند به تعداد زیادی سطح انرژی تقسیم شده و سطوح انرژی نهایتاً ساختمانی مطابق شکل ۱-۳ پیدا می‌کنند.



شکل ۳-۱: ساختمان نوار انرژی در اجسام بلورین

به طوری که ملاحظه می‌کنیم، ساختمان سطوح انرژی شامل دو ناحیه یا نوار مجاز و یک ناحیه ممنوعه است. هر کدام از نواحی مجاز دارای تعداد زیادی سطح انرژی نزدیک به هم است، به طوری که می‌توان تغییرات انرژی را در آنها تقریباً پیوسته در نظر گرفت. هیچ سطح انرژی در ناحیه ممنوعه نمی‌تواند توسط الکترون‌ها اشغال گردد. الکترون‌ها به طور طبیعی مایل به اشغال پایین‌ترین سطح انرژی هستند. در دمای صفر مطلق تمام سطوح انرژی که پایین‌تر از سطحی به نام سطح فرمی^۱ قرار دارند اشغال شده و تمامی سطوحی که بالای سطح فرمی قرار می‌گیرند خالی باقی می‌مانند. برحسب موقعیت سطح فرمی، سه حالت مطابق شکل ۳-۲ رخ می‌دهد. (مناطق هاشور خورده در این شکل معرف سطوح انرژی اشغال شده‌اند.)

در شکل ۳-۲ الف-سطح فرمی در ناحیه مجاز واقع شده و بنابراین در دمای صفر مطلق فقط بخشی از سطوح ناحیه مجاز توسط الکترون‌ها اشغال می‌شود. در دماهای بالاتر تعدادی از الکترون‌ها با دریافت انرژی لازم به سطوح بالاتر انتقال پیدا می‌کنند. انرژی الکترون‌ها را ممکن است با اعمال میدان الکتریکی نیز افزایش داد و آنها را به سطوح بالاتر انتقال داد. به این ترتیب با خالی بودن تعداد زیادی سطوح انرژی در ناحیه مجاز، جابه‌جایی الکترون‌ها به سادگی امکان‌پذیر بوده و جسم را در این حالت هادی نامند.



شکل ۳-۲: ساختمان نوار انرژی در اجسام مختلف (الف) هادیها (ب) عایقها (ج) نیمه‌هادیها

اگر سطح فرمی مطابق شکل‌های ۲-۳-۲-ب و ج در ناحیه ممنوعه قرار بگیرد، در دمای صفر مطلق تمام ناحیه مجاز پایینی پر و ناحیه مجاز بالایی کاملاً خالی می‌باشد. حال چنانچه عرض ناحیه ممنوعه به اندازه‌ای زیاد باشد که انرژی زیادی برای عبور دادن الکترون از آن مورد نیاز باشد، وضعیت در دمای صفر مطلق و در دمای معمولی ۲۵ درجه سانتی‌گراد متفاوت نخواهد بود. بنابراین، به علت در دسترس نبودن سطوح خالی انرژی امکان تحرک برای الکترون‌ها وجود ندارد. فقط وقتی که انرژی لازم جهت عبور از ناحیه ممنوعه به الکترون‌ها داده شود آنها به ناحیه مجاز بالایی راه یافته و هدایت امکان‌پذیر می‌شود. ولی چنین انرژی بزرگی را اغلب فقط توسط میدان‌های الکتریکی بسیار قوی می‌توان تأمین کرد. در این حالت جسم را عایق نامند. عرض ناحیه ممنوعه در عایق‌ها متجاوز از چندین الکترون‌ولت (۶ eV برای الماس) می‌باشد. بالاخره اگر عرض ناحیه ممنوعه چندان زیاد نباشد (حدود ۱ eV)، در دمای معمولی تعدادی از الکترون‌ها به ناحیه مجاز بالایی راه یافته و با اعمال یک میدان الکتریکی خارجی هدایت انجام می‌گیرد. جای خالی الکترون‌ها در ناحیه مجاز پایینی را حفره می‌نامند. برای هر حفره باری مثبت به اندازه بار الکترون در نظر گرفته می‌شود. حفره نیز تحت تأثیر میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شود و در فرایند هدایت شرکت می‌کند. چنین اجسامی را نیمه‌هادی نامند. در نیمه‌هادی‌های خالص تعداد حفره‌ها و الکترون‌های آزاد با یکدیگر برابرند.

به طور خلاصه، اجسام از نظر هدایت الکتریکی به سه دسته هادی، نیمه‌هادی و عایق تقسیم می‌شوند که مطالعه میدان الکتریکی در هر دسته، به طور جداگانه و عمده‌تاً در هادی‌ها و عایق‌ها در قسمتهای بعدی انجام می‌پذیرد.

۲-۳ جریان الکتریکی و قانون اهم

وقتی که یک جسم هادی در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد، الکترون‌های آزاد آن تحت تأثیر نیروی کولمب به حرکت درآمده و اگر مانعی بر سر راه الکترون‌ها نمی‌بود سرعت آنها با گذشت زمان افزایش می‌یافت. ولی برخورد‌های پی در پی الکترون‌ها با اتم‌های شبکه بلورین جسم هادی همواره به صورت یک نیروی بازدارنده عمل کرده و از افزایش نامحدود سرعت جلوگیری می‌کند. هر الکترون پس از یک برخورد مقداری از انرژی خود را از دست داده و در نتیجه از سرعت آن کاسته می‌شود. اگر چه سرعت الکترون در فاصله بین اتم‌ها مرتباً در حال افزایش، کاهش و تغییر جهت است، ولی الکترون در مقیاس ماکروسکوپی با سرعت متوسطی متناسب با شدت میدان الکتریکی اعمال شده و در امتداد آن جابه‌جا می‌شود. برای تعیین سرعت متوسط حرکت الکترون، معادله حرکت آن را به اختصار مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

حرکت الکترون تحت تأثیر دو نیرو، یکی نیروی کولمب $F_1 = eE$ و دیگری نیروی بازدارنده F_2 که متناسب با اندازه حرکت الکترون و همچنین متناسب با عکس متوسط زمان بین دو برخورد می‌باشد، انجام می‌پذیرد. اگر سرعت جابه‌جایی الکترون را با v_d ، متوسط زمان برخورد را با τ ، بار الکترون را با e و جرم آن را با m_e نشان دهیم، معادله حرکت یک الکترون از یک جسم هادی که در میدان الکتریکی E قرار گرفته باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m_e \frac{dv_d}{dt} = F_1 - F_2 = eE - \frac{m_e v_d}{\tau} \quad (۱-۳)$$

پاسخ معادله ۳-۱ برای میدان الکتریکی ساکن $E = E_0$ که در لحظه $t = 0$ به یک الکترون در حال سکون اعمال شود عبارت است از:

$$v_d = \frac{e\tau}{m_e} E_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (2-3)$$

مقدار τ برای هادیهای معمولی مانند مس از مرتبه 10^{-14} ثانیه است. بنابراین جمله نمایی در رابطه ۳-۲ به سرعت با زمان کاهش می‌یابد و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. یعنی سرعت جابه‌جایی الکترون پس از اعمال میدان E_0 عملاً برابر $v_d = \frac{e\tau}{m_e} E_0$ می‌باشد. برای میدانهای متغیر با زمان و سینوسی تا وقتی که دوره تناوب از چندین برابر τ کوچک‌تر نباشد، یعنی تا وقتی که شرط $\omega < 2\pi/\tau$ برقرار است (ω فرکانس زاویه‌ای موج سینوسی است)، سرعت متوسط جابه‌جایی الکترونها متناسب با شدت میدان اعمال شده خواهد بود. از آنجایی که $\tau^{-1} = 10^{14}$ است، شرط مذکور برای فرکانسهایی تا حدود چند صد گیگا هرتز برقرار می‌باشد و بنابراین برای اکثر موارد عملی می‌توان نوشت:

$$v_d = \left(\frac{e\tau}{m_e}\right) E = -\mu_e E \quad (3-3)$$

μ_e را در رابطه ۳-۳ قابلیت تحرک^۱ الکترون نامند. بدیهی است که الکترونها در خلاف جهت میدان اعمال شده حرکت می‌کنند و چون μ_e مثبت فرض می‌شود علامت منفی در رابطه ۳-۳ ضروری است. جابه‌جایی الکترونها در هادیها تولید جریان الکتریکی می‌نماید. این جریان را از نوع هدایتی گویند، ولی جریان الکتریکی ممکن است از حرکت بارهای الکتریکی آزاد در خلأ نیز ناشی شود که در آن صورت جریان را از نوع همرفتی نامند. به طور کلی جریان الکتریکی از حرکت بارهای الکتریکی از قبیل الکترونها، یونهای مثبت و منفی و حفره‌ها به وجود می‌آید و اندازه آن برابر مقدار بار گذرنده از سطحی معین در واحد زمان تعریف می‌شود. واحد اندازه‌گیری جریان در سیستم آحاد M.K.S. کولمب بر ثانیه یا آمپر است. با توجه به تعریف جریان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (4-3)$$

چگالی جریان الکتریکی برابر مقدار جریان در واحد سطح تعریف می‌شود. به بیان دقیق‌تر اگر جریان ΔI از عنصر سطح ΔS عبور نماید و ΔS عمود بر جهت حرکت بار در نظر گرفته شود، آنگاه چگالی جریان برابر است با:

$$J = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (5-3)$$

چگالی جریان در حقیقت یک کمیت برداری است که اندازه آن برابر حداکثر مقدار $\Delta I/\Delta S$ و جهت آن در هر نقطه همان جهت حرکت بار می‌باشد. در حالت کلی اگر ΔS عمود بر جهت جریان نباشد، جریان گذرنده از ΔS را باید از ضرب داخلی J و ΔS به دست آورد، یعنی،

$$\Delta I = J \cdot \Delta S \quad (6-3)$$

توجه کنید که اگرچه معمولاً برای جریان الکتریکی جهت در نظر گرفته می‌شود ولی جریان یک کمیت برداری محسوب نمی‌شود. زیرا جریان نه یک کمیت نقطه‌ای بلکه یک کمیت انتگرالی است و برای کل جریان گذرنده از یک سطح مقطع نمی‌توان جهت واحدی در تمام نقاط سطح مقطع داشت. برای محاسبه چگالی جریان الکتریکی در یک جسم هادی، عنصر حجم ΔV ، که $\Delta V = \Delta S \cdot (v_d \Delta t)$ است، را مطابق شکل ۳-۳ در نظر می‌گیریم. $v_d \Delta t$ مسافتی است که بارهای الکتریکی واقع روی سطح ΔS در لحظه t پس از گذشت زمان Δt با سرعت v_d طی می‌کنند. اگر تعداد الکترونهاى آزاد در واحد حجم جسم هادی برابر N باشد، میزان بار الکتریکی که در فاصله زمانی Δt از سطح ΔS می‌گذرد برابر است با:

$$\Delta Q = \rho \Delta V = (Ne)(\Delta S \cdot v_d \Delta t) \quad (7-3)$$

جریان حاصل از عبور بار ΔQ از سطح ΔS عبارت است از:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Ne \Delta S \cdot v_d = \Delta S \cdot (Ne v_d) \quad (8-3)$$

از طرف دیگر:

$$\Delta I = \Delta S \cdot J \quad (9-3)$$

از مقایسه روابط ۸-۳ و ۹-۳ نتیجه گرفته می‌شود که:

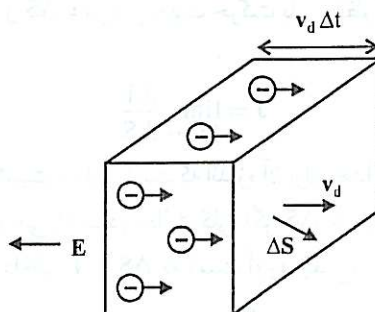
$$J = Ne v_d = \rho v_d \quad (10-3)$$

در رابطه ۱۰-۳، $\rho = Ne$ چگالی الکترونهاى آزاد در جسم هادی است. با جایگزین نمودن v_d از رابطه ۳-۳ داریم:

$$J = -Ne \mu_e E \quad (11-3)$$

با تعریف ضریب $\sigma = -Ne \mu_e$ ، رابطه ساده ولی مهم زیر را بین J و E به دست می‌آوریم:

$$J = \sigma E \quad (12-3)$$



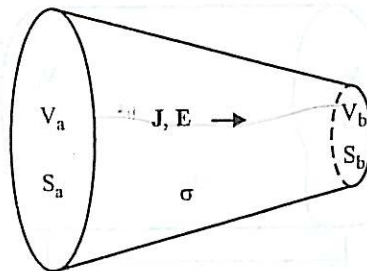
شکل ۳-۳: عنصر حجم ΔV از یک جسم هادی و الکترونهاى آزاد در حال حرکت تحت نیروی میدان الکتریکی E

σ را رسانایی یا قابلیت هدایت الکتریکی می نامند و با واحد «آمپر بر ولت بر متر» یا «مهبو بر متر» اندازه گیری می شود. این ضریب برای اکثر فلزات در حدود 10^7 ، برای آب دریا برابر ۴ و برای یک عایق خوب مانند میکا در حدود 10^{-15} مهبو بر متر است. رسانایی یک هادی ایده آل یا هادی کامل بینهایت و رسانایی یک عایق ایده آل یا عایق کامل صفر فرض می شود. رابطه ۳-۱۲ به عنوان شکل نقطه ای قانون اهم شناخته می شود. این قانون بیان می کند که چگالی جریان هدایتی در هر نقطه در یک جسم هادی متناسب با شدت میدان الکتریکی در آن نقطه است. شکل انتگرالی قانون اهم را ضمن تعریف مقاومت می آموزیم.

۳-۳ مقاومت الکتریکی

همان طور که ملاحظه گردید، میدان الکتریکی E در یک جسم هادی ایجاد جریانی با چگالی $J = \sigma E$ می کند. اجسام مختلف دارای رسانایی های متفاوتی هستند و به بیان دیگر مقاومت الکتریکی آنها در مقابل عبور بارهای الکتریکی متفاوت است. مقاومت اجسام نه تنها به رسانایی آنها بلکه به شکل و ابعاد هندسی آنها نیز بستگی دارد. در این قسمت به تشریح روش کلی محاسبه مقاومت می پردازیم. برای این منظور جسمی را با رسانایی σ و سطح مقطع متغیر، مطابق شکل ۳-۴، در نظر می گیریم. میدان الکتریکی E را از طریق اعمال ولتاژ V_{ab} بین دو سطح انتهایی S_a و S_b در جسم ایجاد می کنیم. میدان E باعث به وجود آمدن جریانی با چگالی $J = \sigma E$ در جسم می شود. چون فضای اطراف جسم عایق است (مثلاً هوا)، جریان به وجود آمده به داخل جسم محدود است. اندازه جریان گذرنده از جسم از رابطه $I = \int_S J \cdot dS$ به دست می آید که در آن S هر سطح مقطع دلخواهی بین دو انتهای جسم است. با فرض اینکه سطوح S_a و S_b هم پتانسیل هستند، اختلاف پتانسیل بین دو سطح S_a و S_b را می توان برحسب شدت میدان الکتریکی E به صورت $V_{ab} = \int_a^b E \cdot dL$ نوشت. مقاومت الکتریکی بین دو سطح S_a و S_b برابر نسبت اختلاف پتانسیل بین آن دو سطح به جریان گذرنده از جسم تعریف می شود.

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{\int_a^b E \cdot dL}{\int_S J \cdot dS} = \frac{\int_a^b E \cdot dL}{\int_S \sigma E \cdot dS} \quad (3-13)$$



شکل ۳-۴: جسمی با سطح مقطع متغیر و رسانایی σ برای تعریف مقاومت

بنابراین با مشخص بودن شکل و ابعاد جسم و رسانایی آن می‌توان مقاومت جسم را با استفاده از رابطه ۳-۱۳ به روشهای تحلیلی یا عددی محاسبه نمود. وجود E در صورت و مخرج کسر سمت راست رابطه ۳-۱۳ حاکی از این حقیقت است که مقاومت یک جسم مستقل از جریان گذرنده از آن و ولتاژ اعمال شده به آن می‌باشد و فقط تابعی از رسانایی و ابعاد هندسی جسم است. رابطه $V_{ab} = RI$ در واقع شکل انتگرالی قانون اهم است. واحد اندازه‌گیری مقاومت، اهم می‌باشد.

به طور خلاصه، برای محاسبه مقاومت یک جسم محدود به دو سطح معین، ابتدا اختلاف پتانسیل ثابت V_{ab} را بین آن دو سطح در نظر می‌گیریم. سپس میدان الکتریکی E حاصل از این اختلاف پتانسیل را به دست می‌آوریم. آنگاه انتگرال $I = \int_S \sigma E \cdot dS$ ، که در آن S سطح مقطع دلخواهی از جسم است، را محاسبه می‌کنیم. سرانجام نسبت V_{ab} به I ، مقاومت جسم را که بین دو سطح مذکور دیده می‌شود به دست می‌دهد. شاید مشکل‌ترین مرحله در محاسبه مقاومت، تعیین میدان الکتریکی E باشد. استفاده از روش معادله لاپلاس که در فصل چهارم ارائه می‌شود به حل مسئله مقاومت کمک مؤثری می‌کند. از این رو مبحث مقاومت الکتریکی در قسمت ۴-۴ کتاب دوباره مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در ضمن، در بحث کنونی، رفتارهای غیر خطی مقاومت و تأثیر دما بر آن در نظر گرفته نمی‌شوند.

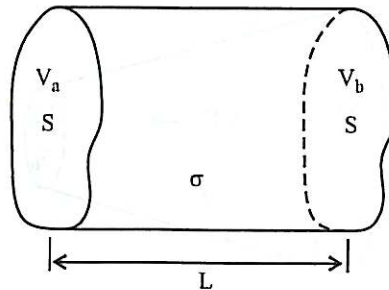
مثال ۳-۱ مقاومت یک میله هادی مستقیم به طول L ، سطح مقطع یکنواخت S و رسانایی σ را محاسبه کنید.
حل:

میله هادی را مطابق شکل ۳-۵ در نظر گرفته و اختلاف پتانسیل V_{ab} را بین دو سطح انتهایی آن به کمک یک مولد ولتاژ به وجود می‌آوریم. جریان ثابتی با چگالی یکنواخت در میله ایجاد می‌شود. چون چگالی جریان در تمام نقاط مقدار ثابتی است، شدت میدان نیز در همه نقاط هادی مقدار ثابتی دارد و می‌توان نوشت:

$$V_{ab} = \int_a^b E \cdot dL = EL, \quad I = \int_S \sigma E \cdot dS = \sigma ES$$

آنگاه:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{L}{\sigma S} \quad (۳-۱۴)$$



شکل ۳-۵: میله هادی با سطح مقطع یکنواخت S و طول L

مثال ۳-۲: مقاومت میله خمیده شکل ۳-۶ را محاسبه کنید.

حل:

واضح است که خطوط میدان الکتریکی باید به شکل قوسهایی به مرکز O باشند، زیرا خطوط میدان بر سطوح هم‌پتانسیل S_a و S_b عمود هستند. بنابراین میدان الکتریکی فقط مؤلفه E_φ خواهد داشت. چگالی جریان در سطح مقطع مستطیلی شکل میله یکنواخت نبوده، بلکه تابعی از r است. به منظور تعیین تغییرات چگالی جریان یا میدان الکتریکی نسبت به r این‌طور استدلال می‌کنیم که اختلاف پتانسیل هر دو نقطه انتهایی روی قوسی به شعاع r باید مساوی V_{ab} ، یعنی اختلاف پتانسیل بین S_a و S_b باشد:

$$V_{ab} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} E_\varphi r d\varphi = E_\varphi r \varphi.$$

و:

$$E_\varphi = \frac{V_{ab}}{\varphi_0} \frac{1}{r} = \frac{K}{r}, \quad K = \frac{V_{ab}}{\varphi_0} = \text{مقدار ثابت}$$

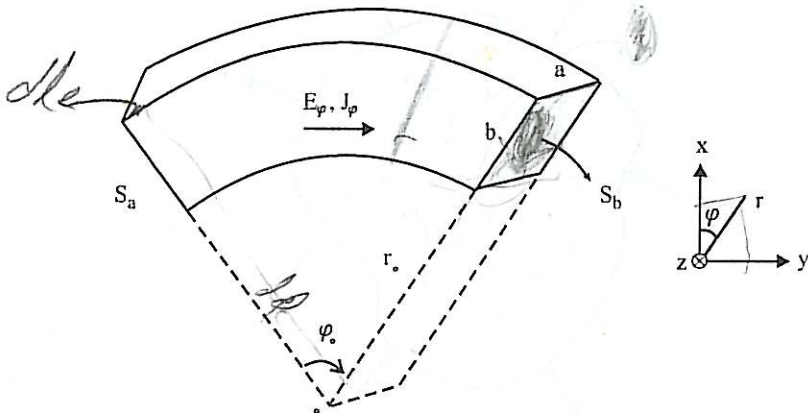
حال با معلوم بودن تغییرات میدان نسبت به r ، مقاومت میله به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{ab} = K\varphi_0.$$

$$I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_{r_0}^{r_0+b} \int_0^{\varphi_0} \frac{K}{r} dr dz = \sigma K a \ln \frac{r_0+b}{r_0}$$

در نتیجه:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{\varphi_0}{\sigma a} / \ln \left(\frac{r_0+b}{r_0} \right) \quad (۱۵-۳)$$



شکل ۳-۶: میله خمیده به شعاع درونی r_0 ، شعاع بیرونی r_0+b ، ضخامت a و زاویه φ_0 .

۴-۳ اصل بقای بار و معادله پیوستگی

بار مثبت Q را در حجم V که محدود به سطح بسته S است، مطابق شکل ۷-۳، در نظر می‌گیریم. حرکت ذرات باردار به طرف خارج سطح S جریانی با چگالی J به وجود می‌آورد. طبق اصل بقای بار الکتریکی در هر لحظه مقدار جریان خروجی از سطح S باید برابر با نرخ کاهش بار نسبت به زمان در حجم V باشد، پس:

$$I_{\text{خروجی}} = -\frac{dQ}{dt}$$

اما از طرف دیگر، $I = \oint_S J \cdot dS$ و $Q = \int_V \rho dV$ است که ρ چگالی حجمی توزیع بار Q در حجم V می‌باشد. در نتیجه:

$$\oint_S J \cdot dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (۱۶-۳)$$

انتگرال سمت چپ رابطه ۱۶-۳ را می‌توان با استفاده از قضیه دیورژانس به انتگرال حجم تبدیل کرد:

$$\int_V (\nabla \cdot J) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (۱۷-۳)$$

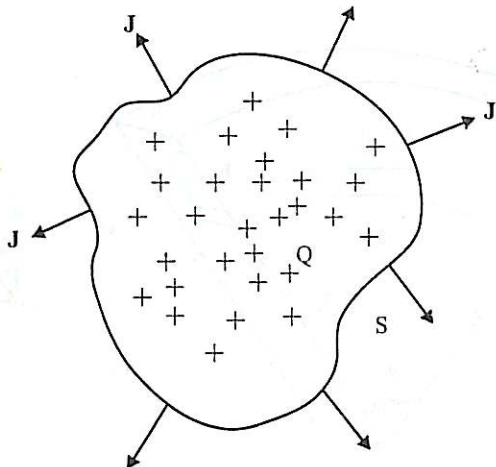
برای حجم کوچک ΔV رابطه ۱۷-۳ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\nabla \cdot J) \Delta V = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V$$

یا:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۱۸-۳)$$

رابطه ۱۸-۳ را معادله پیوستگی نامند. با استفاده از این رابطه چگونگی توزیع بار الکتریکی آزاد در داخل اجسام و به ویژه در هادیها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.



شکل ۷-۳: بار مثبت Q و جریان ناشی از آن با چگالی J

۳-۵ بار آزاد در اجسام هادی و نحوه توزیع آن

فرض کنید در لحظه $t=0$ باری با چگالی ρ در بخشی از یک جسم هادی با رسانایی ثابت σ ظاهر شود. می‌خواهیم نشان دهیم که چگالی بار در درون جسم به طور نمایی با گذشت زمان به سمت صفر کاهش می‌یابد و تمامی بار در سطح جسم ظاهر می‌گردد. میدان الکتریکی ناشی از توزیع اولیه، ذرات باردار را به حرکت درآورده و آنها را از مکان اولیه به سمت سطح جسم دور می‌نماید. حرکت ذرات باردار تولید جریان الکتریکی می‌نماید و نیز چگالی توزیع اولیه بارها را بر هم می‌زند، به طوری که میدان الکتریکی E ، چگالی بار ρ و چگالی جریان J هر سه با زمان تغییر می‌کنند تا اینکه سرانجام هر یک مقدار نهایی پایدار خود را به دست آورند. در هر لحظه، میدان E و چگالی بار ρ از طریق شکل نقطه‌ای قانون گوس به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-19)$$

قابلیت گذردمی جسم هادی برابر ϵ فرض شده است. همچنین در هر لحظه باید معادله پیوستگی برقرار باشد:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-20)$$

بالاخره بین E و J همواره رابطه $J = \sigma E$ برقرار است. بنابراین با ترکیب روابط ۳-۱۹ و ۳-۲۰ می‌توان نوشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

یا:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-21)$$

و:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad (3-22)$$

رابطه ۳-۲۲ یک معادله دیفرانسیل درجه یک است که جواب آن با در نظر گرفتن شرط اولیه $\rho(t=0) = \rho_0$ عبارت است از:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/T}, \quad T = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \quad (3-23)$$

ملاحظه می‌شود که چگالی بار به طور نمایی با ثابت زمانی $T = \epsilon_0/\sigma$ کاهش می‌یابد و سرانجام به صفر می‌رسد. به علاوه، اگر چگالی اولیه ρ_0 در نقطه‌ای از جسم صفر باشد، مقدار آن همیشه صفر باقی خواهد ماند. به عبارت دیگر، هیچ بخشی از بار که در ناحیه‌ای در درون جسم کاهش می‌یابد نمی‌تواند در ناحیه دیگری در داخل آن ظاهر گردد. از طرف دیگر، طبق اصل بقای بار، بار در حال کاهش در درون جسم باید در جای دیگری از جسم ظاهر گردد و این جای دیگر جز سطح جسم نمی‌تواند باشد. برای

اینکه بینیم با چه سرعتی چگالی بار آزاد در درون یک جسم هادی کاهش می‌یابد و همزمان به صورت بار سطحی ظاهر می‌شود، به عنوان مثال، فلز مس را که یک هادی خوب محسوب می‌شود در نظر می‌گیریم. برای مس σ برابر $5/8 \times 10^7$ مهو بر متر است، پس:

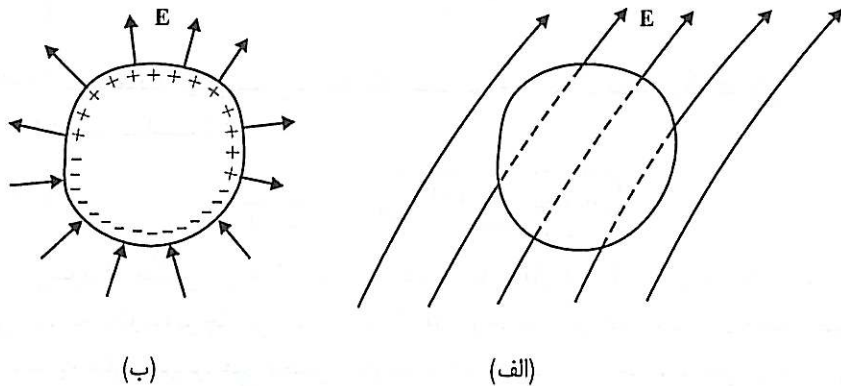
$$T = \frac{\epsilon_0}{\sigma} = \frac{10^{-9}}{36\pi \times 5/8 \times 10^7} = 1/5 \times 10^{-19} \text{ ثانیه}$$

یعنی پس از گذشت $1/5 \times 10^{-19}$ ثانیه چگالی بار به میزان e^{-1} یا ۳۷ درصد مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد. واضح است که این زمان فوق‌العاده کوتاه است، به طوری که می‌توان گفت هر بار آزادی که در درون یک جسم هادی به وجود آید تقریباً بلافاصله از مکان اولیه‌اش ناپدید شده و در سطح جسم ظاهر می‌شود. پس به طور خلاصه چنین نتیجه گرفته می‌شود که چگالی حجمی بار آزاد در درون اجسام هادی صفر است. برای اجسام عایق که σ بسیار کوچک است، T ممکن است تا حدود چندین ساعت و حتی چندین روز باشد.

۶-۳ میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی و شرایط مرزی

قبلاً دیدیم که الکترونهاى آزاد در یک جسم هادی تحت تأثیر یک میدان الکتریکی با سرعت متوسطی جابه‌جا می‌شوند و چنانچه جسم هادی در یک مدار بسته قرار گرفته باشد حرکت الکترونها ادامه یافته و یک جریان الکتریکی به طور پیوسته به وجود می‌آید. جزئیات این مبحث را در قسمت ۲-۳ بررسی نمودیم. اکنون می‌خواهیم به مطالعه این مسئله بپردازیم که اگر یک جسم هادی با شکلی نامشخص و رسانایی σ ، مطابق شکل ۳-۸-الف، در معرض میدان الکتریکی ساکن E قرار بگیرد چه تغییراتی در جسم هادی و میدان پدید می‌آید.

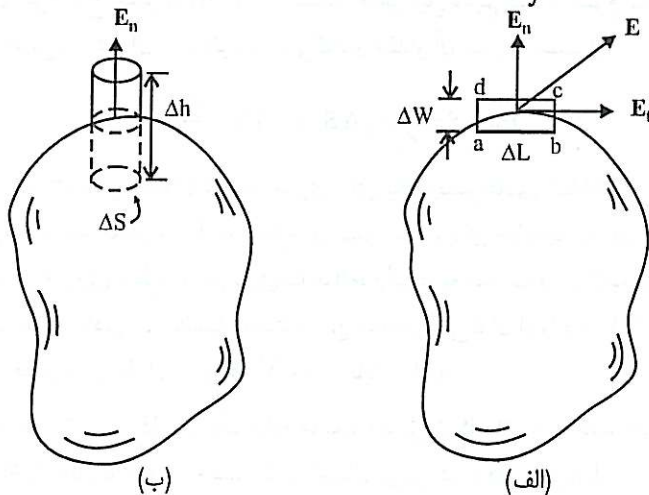
پس از قرار گرفتن جسم هادی در میدان الکتریکی، الکترونهاى آزاد در خلاف جهت میدان به حرکت در آمده و در سطح جسم متوقف می‌شوند. بنابراین یک بار سطحی منفی، مطابق شکل ۳-۸-ب، روی



شکل ۳-۸: نمایش تأثیر جسم هادی و میدان الکتریکی بر یکدیگر (الف) جسم هادی در معرض میدان الکتریکی E (ب) بارهای سطحی مثبت و منفی القاى روی سطح جسم هادی

آن قسمت از جسم که خطوط میدان اولیه به آن وارد می‌شوند به وجود می‌آید. حال از آنجا که جسم در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، باری مثبت که میزان آن دقیقاً برابر بار سطحی منفی است باید در جایی از جسم به وجود آید. اما با توجه به نتیجه بحث قسمت ۳-۵، این بار مثبت جز در سطح هادی در جای دیگری نمی‌تواند ظاهر شود. در واقع بار مثبت در بخشی از سطح جسم که خطوط میدان از آن خارج می‌شوند به وجود می‌آید. بار الکتریکی سطحی که بدین گونه ایجاد می‌شود به نوبه خود تولید یک میدان الکتریکی ثانویه می‌کند که در خلاف جهت میدان اعمال شده اولیه است. میدان ثانویه باید میدان اولیه در درون جسم هادی را به طور کامل خنثی سازد، به طوری که میدان درون هادی صفر گردد. چه در غیر این صورت حرکت الکترونها به سمت سطح ادامه می‌یابد تا چنان توزیعی حاصل شود که میدان داخل هادی سرانجام صفر گردد. زمان لازم برای تغییر و تنظیم بارها به ثابت زمانی T جسم هادی بستگی دارد. بنابراین با توجه به اینکه T از مرتبه 10^{-19} ثانیه است، می‌توان نتیجه گرفت که تشکیل بار سطحی و کاهش یافتن میدان درون جسم هادی به صفر تقریباً آنی صورت می‌پذیرد. توزیع بار سطحی اغلب میدانی در خارج جسم هادی نیز به وجود می‌آورد که منجر به تغییر یافتن میدان اعمال شده اولیه می‌گردد.

تا کنون به این نتیجه رسیده‌ایم که میدان الکتریکی در درون یک جسم هادی که محدود به سطح بسته‌ای باشد صفر است. حال به بررسی میدان در سطح جسم، یعنی در مرز جسم و فضای اطراف آن، می‌پردازیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که میدان الکتریکی E در سمت فضای آزاد مرز دارای مؤلفه مماسی E_t و مؤلفه عمودی E_n باشد. مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را حول مبدأ بردار E ، مطابق شکل ۳-۹ الف، در نظر می‌گیریم، به طوری که $ad=bc=\Delta W$ و موازی با E_n و نیز $ab=cd=\Delta L$ و موازی با E_t و در طرفین مرز واقع باشند. چون ΔL و ΔW طولهای دیفرانسیلی و بسیار کوچک می‌باشند، می‌توان E_n و E_t را در امتداد آنها ثابت فرض کرد. حال با توجه به اینکه برای هر میدان الکتریکی ساکن $\oint E \cdot dL = 0$ است، می‌توان نوشت:



شکل ۳-۹: شرایط مرزی در سطح اجسام هادی (الف) مؤلفه مماسی میدان الکتریکی (ب) مؤلفه عمودی میدان الکتریکی

$$\oint_{abcd a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

در رابطه مذکور، چون میدان در درون جسم هادی صفر است، $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ می‌باشد و به علاوه $\int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_t \Delta L$ است. حال اگر ΔW به سمت صفر میل داده شود، دو انتگرال دیگر نیز صفر می‌شوند و داریم:

$$E_t \Delta L = 0 \Rightarrow E_t = 0 \quad (۲۴-۳)$$

رابطه ۲۴-۳ بیان می‌کند که مؤلفه مماسی میدان الکتریکی ساکن در سطح جسم هادی برابر صفر است. به عبارت دیگر میدان الکتریکی در مرز جسم هادی فقط می‌تواند مؤلفه عمودی داشته باشد. این نتیجه گرچه برای حالت میدان ساکن به دست آمده است، ولی به طوری که بعد خواهیم دید برای میدانهای متغیر با زمان نیز صادق خواهد بود.

برای مطالعه مؤلفه عمودی میدان \mathbf{E} ، یک عنصر حجم استوانه‌ای شکل حول مبدأ بردار \mathbf{E} ، مطابق شکل ۳-۹-ب، در نظر می‌گیریم. با به کار بردن قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (S \text{ بار محصور در } S)$$

اما:

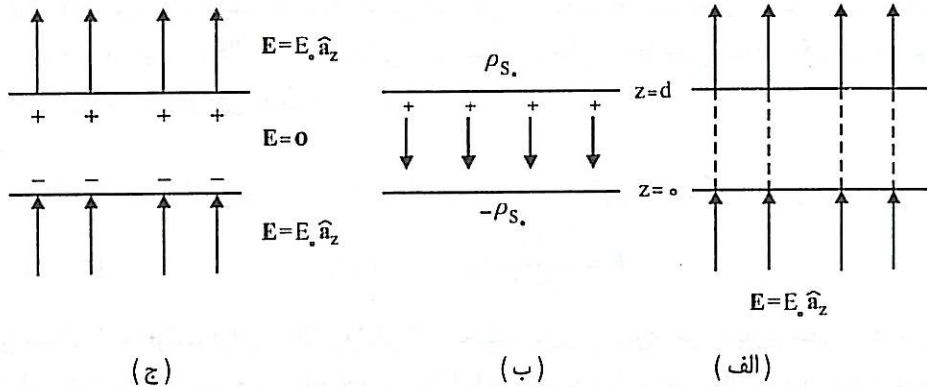
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سطح جانبی}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{قاعده تحتانی}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{قاعده فوقانی}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

انتگرال دوم در سمت راست این رابطه صفر است، زیرا میدان الکتریکی در درون جسم هادی همواره صفر است. حال اگر ارتفاع استوانه (Δh) را به سمت صفر میل دهیم انتگرال سوم نیز به سمت صفر میل خواهد کرد، در حالی که انتگرال اول تغییری نمی‌کند و مقدار آن عبارت است از:

$$E_n \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_S \Delta S \Rightarrow E_n = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \quad (۲۵-۳)$$

روابط ۲۴-۳ و ۲۵-۳ به عنوان شرایط مرزی برای یک جسم هادی شناخته می‌شوند. از آنجا که \mathbf{E} در کلیه نقاط درون جسم هادی و E_t در سطح آن صفر است، برای جابه‌جا نمودن بار Q از نقطه‌ای به نقطه دیگر در درون و روی سطح جسم کاری نباید انجام گیرد. به عبارت دیگر کلیه نقاط واقع در درون و روی سطح یک جسم هادی هم‌پتانسیل هستند. این نتیجه را می‌توان از رابطه $\mathbf{E} = -\nabla V$ نیز به دست آورد، زیرا لازمه صفر بودن \mathbf{E} آن است که V مقدار ثابتی باشد.

مثال ۳-۳ ناحیه $0 < z < d$ از فضا را یک ماده هادی، مطابق شکل ۳-۱۰-الف، اشغال می‌کند. میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{a}}_z$ به جسم هادی اعمال می‌گردد. چگالی بار القا شده روی سطوح جسم هادی در $z=0$ و $z=d$ و نیز میدان الکتریکی در کلیه نقاط فضا را محاسبه نمایید.



شکل ۳-۱۰: یک جسم هادی در معرض میدان الکتریکی (الف) جسم هادی مسطح به ضخامت d در معرض میدان یکنواخت (ب) بارهای القایی روی سطوح جسم هادی و میدان ثانویه حاصل از آنها (ج) میدان کل در همه نقاط فضا

حل:

چون میدان الکتریکی یکنواخت و در جهت z می‌باشد، بار منفی با چگالی یکنواخت روی سطح $z=0$ ، که ناشی از تجمع الکترونهاي آزاد روی آن سطح است، به وجود می‌آید. همچنین، باری مثبت با چگالی یکنواخت روی سطح $z=d$ ، که ناشی از کمبود الکترون در آن سطح است، ظاهر می‌گردد. یادآوری می‌شود که این گونه بارهای سطحی را که در اثر اعمال یک میدان الکتریکی خارجی پدید می‌آید بارهای القایی می‌نامند. چون میدان الکتریکی کل در ناحیه $0 < z < d$ ، که درون جسم هادی است، باید صفر باشد میدان ثانویه حاصل از توزیع بارهای القایی باید مساوی و در خلاف جهت میدان اولیه E باشد. در فصل قبل میدان یک صفحه بینهایت بار با چگالی سطحی ρ_s را محاسبه نموده‌ایم. این میدان برابر $\rho_s / 2\epsilon_0$ و در جهت \hat{a}_z در بالای صفحه ($z > 0$) و در جهت $-\hat{a}_z$ در پایین صفحه ($z < 0$) است (صفحه بار را $z=0$ فرض می‌کنیم). به سادگی می‌توان نشان داد که میدان دو صفحه بینهایت بار، که موازی با یکدیگر و دارای توزیعهای یکنواخت بار با چگالیهای مساوی و ناهمنام، مطابق شکل ۳-۱۰-ب، باشند، برابر $(\rho_s / \epsilon_0) \hat{a}_z$ در ناحیه بین دو صفحه و برابر صفر در سایر نواحی می‌باشد. بنابراین، برای آنکه میدان در ناحیه هادی صفر باشد باید داشته باشیم:

$$-\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{a}_z = -E_0 \hat{a}_z \Rightarrow \rho_s = \epsilon_0 E_0 \quad (۲۶-۳)$$

میدان در خارج ناحیه $0 < z < d$ برابر میدان اعمال شده، یعنی $E_0 \hat{a}_z$ است. زیرا میدان ثانویه حاصل از بارهای القایی در آنجا صفر است. بارهای القایی و میدان در داخل و خارج جسم هادی در شکل ۳-۱۰-ج نشان داده شده‌اند. به طوری که رابطه ۲۶-۳ نیز نشان می‌دهد، شرط مرزی $E_n = \rho_s / \epsilon_0$ روی هر دو سطح $z=0$ و $z=d$ برقرار است.

مثال ۳-۴ در مرکز یک محفظه کروی از جنس هادی و به ضخامت d بار نقطه‌ای مثبت Q ، مطابق شکل ۳-۱۱، قرار می‌گیرد. چگالی بارهای القایی روی سطوح داخلی و خارجی محفظه کروی و میدان الکتریکی را در تمام نواحی به دست آورید.

حل:

میدان الکتریکی اولیه در ناحیه $r \leq r_1$ با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس برابر است با:

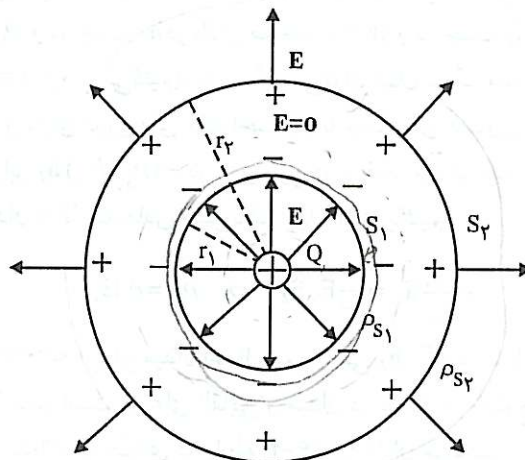
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad r \leq r_1 \quad (27-3)$$

این میدان با به حرکت درآوردن الکترونهای آزاد محفظه کروی به سوی مرکز، باری منفی روی سطح داخلی S_1 و باری مثبت روی سطح خارجی S_2 القا می‌کند. به دلیل وجود تقارن کروی، توزیع بارهای القایی روی سطوح مزبور به طور یکنواخت صورت می‌پذیرد. چون میدان کل در ناحیه $r_1 < r < r_2$ باید صفر باشد، طبق قانون گوس میزان کل بار محصور در سطح گوسی کروی S_1^+ به شعاع r_1^+ نیز باید صفر باشد $(r_1 < r_1^+ < r_2)$. به بیان دیگر:

$$\oint_{S_1^+} \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q + \oint_{S_1^+} \rho_{S_1} dS = 0$$

که ρ_{S_1} چگالی بار منفی القا شده روی سطح S_1 است. چون توزیع بارهای القایی یکنواخت است، ρ_{S_1} مقدار ثابتی دارد و می‌توان نوشت:

$$Q + \oint_{S_1^+} \rho_{S_1} dS = 0 \Rightarrow \rho_{S_1} = -\frac{Q}{S_1} = -\frac{Q}{4\pi r_1^2} \quad (28-3)$$



شکل ۳-۱۱: بار مثبت Q در مرکز یک محفظه کروی به ضخامت $d=r_2-r_1$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که اندازه بار القا شده روی سطح S_1 برابر $-Q$ است و چون محفظه کروی از نظر بار الکتریکی خنثی است، بار مثبت القا شده روی سطح S_2 باید برابر $+Q$ باشد. با توجه به یکنواخت بودن توزیع بار روی سطح S_2 ، چگالی توزیع بار روی آن برابر است با:

$$\rho_{S_2} = \frac{Q}{S_2} = \frac{Q}{4\pi r_2^2} \quad (29-3)$$

میدان الکتریکی در ناحیه $r \geq r_2$ با استفاده از قانون گوس عبارت است از:

$$\oint_S \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q - (Q_{S_1} + Q_{S_2})$$

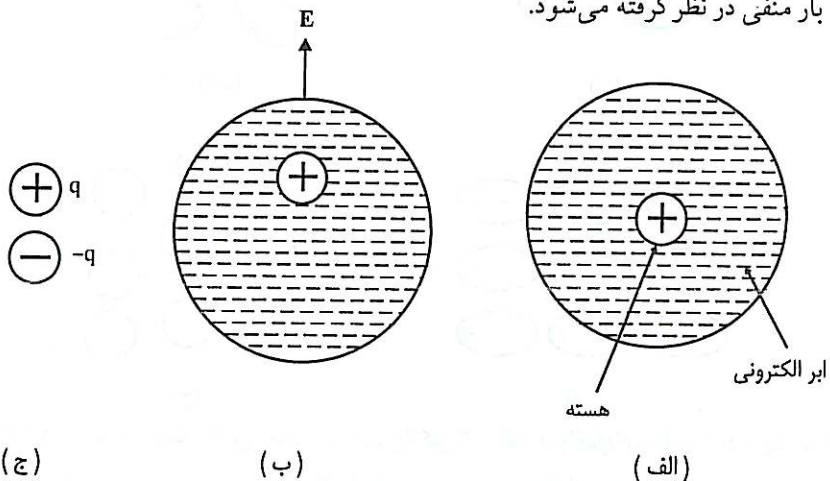
اما چون $Q_{S_1} = -Q_{S_2} = -Q$ است، پس:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad r \geq r_2 \quad (30-3)$$

۳-۷ اجسام عایق در میدان الکتریکی ساکن

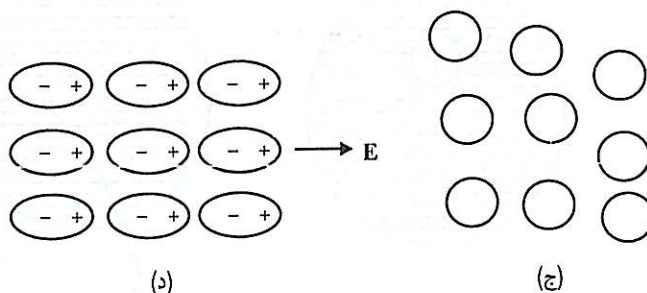
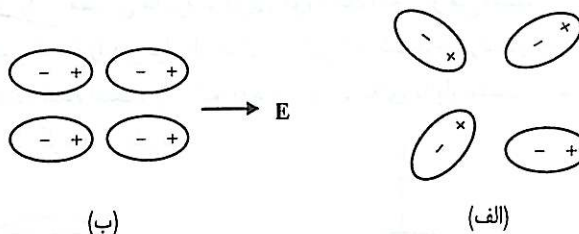
همان‌گونه که در مقدمه این فصل بیان گردید، عایقها دسته‌ای از اجسام هستند که تعداد الکترونهای آزاد آنها بسیار ناچیز است و عملاً قابلیت هدایت الکتریکی ندارند. ثابت زمانی بسیار طولانی T در اجسام عایق (که شرح آن در قسمت ۳-۵ آمد) نیز مؤید این حقیقت است که هدایت الکتریکی در عایقها فوق‌العاده ناچیز است. در اینجا نیز پدیده ناشی از تأثیر میدان الکتریکی بر عایقها را که «قطبی شدن» نامیده می‌شود به طور کیفی در مقیاس میکروسکوپی (در مقیاس اتم و مولکول) بررسی نموده، ولی نتایج و روابط کاربردی را در مقیاس ماکروسکوپی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

بررسی پدیده قطبی شدن را می‌توان از مدل ابتدایی اتم شروع کرد. در این مدل که در شکل ۳-۱۲ الف نمایش داده شده است، یک اتم به صورت هسته‌ای با بار مثبت در مرکز یک ابر الکترونی کروی با بار منفی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۳-۱۲: تأثیر میدان بر جسم عایق در مقیاس میکروسکوپی (الف) مدل ابتدایی اتم متشکل از هسته و ابر الکترونی (ب) جابه‌جایی مرکز ثقل ابر الکترونی پس از اعمال میدان الکتریکی \mathbf{E} (ج) دو قطبی معادل اتم (شکل ب)

تا زمانی که هیچ میدان الکتریکی خارجی به اتم اعمال نشود، مرکز ثقل ابر الکترونی بر هسته منطبق بوده و اتم در فضای اطرافش به صورت یک ذره خنثی نمایان است. اعمال میدان الکتریکی E مرکز ثقل ابر الکترونی را، تحت تأثیر نیروی کولمب، از هسته دور می‌کند و اتم به صورت شکل ۳-۱۲-ب در می‌آید. اگر ابر الکترونی را با بار نقطه‌ای معادلی در مرکز ثقل آن جایگزین کنیم، اتم صورت یک دوقطبی، مطابق شکل ۳-۱۲-ج، را به خود می‌گیرد. این دوقطبی به نوبه خود تولید میدان الکتریکی جدیدی می‌کند که مخالف میدان اولیه E است. این پدیده را قطبی شدن نامیده و این نوع قطبی شدن را که ناشی از جابه‌جایی مرکز ثقل ابر الکترونی نسبت به هسته اتم است، قطبی شدن الکترونیکی گویند. دسته‌ای از اجسام عایق از مولکولهایی مرکب از یونهای مثبت و منفی تشکیل یافته‌اند و اعمال یک میدان الکتریکی خارجی یونها را از یکدیگر دور نموده و هر مولکول به یک دوقطبی تبدیل می‌شود. این نوع قطبی شدن را قطبی شدن یونی گویند. در اجسام عایقی که ساختار مولکولی دارند، مولکولها ممکن است غیرقطبی یا به طور طبیعی و در غیاب یک میدان الکتریکی خارجی قطبی باشند. در جسمی مانند نمک طعام مولکولها به طور دائمی قطبی هستند ولی چون آرایش آنها به دور از نظم و ترتیب است، جسم در مجموع قطبی شده نیست. اعمال یک میدان الکتریکی خارجی مولکولهای قطبی را به طور نسبی در امتداد میدان قرار داده و جسم را قطبی می‌کند. در واقع، میدان الکتریکی هر مولکول را تحت یک گشتاور قرار داده و آن را می‌چرخاند تا در امتداد خود قرار دهد. در عایقهایی که مولکولها غیرقطبی هستند، میدان خارجی با جابه‌جایی یونهای مثبت و منفی نسبت به یکدیگر موجب قطبی شدن می‌گردد. شکل ۳-۱۳ مولکولهای قطبی و غیرقطبی را قبل و پس از اعمال میدان E نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱۳: قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر میدان الکتریکی (الف) مولکولهای قطبی فاقد آرایش منظم (ب) هم‌جهتی میدان E با مولکولهای قطبی شده (ج) مولکولهای غیرقطبی (د) قطبی شدن مولکولهای غیرقطبی توسط میدان الکتریکی E

دسته دیگری از اجسام وجود دارند که خودبه‌خود و به طور دائمی قطبی هستند و مشابه آهن‌ربا عمل می‌کنند، یعنی به طور طبیعی مولد میدان الکتریکی ساکن هستند در حالی که از نظر بار الکتریکی کاملاً خنثی می‌باشند. این دسته اجسام فرو الکتریک^۱ نامیده می‌شوند. باریم تیتانات^۲ نمونه‌ای از یک جسم فرو الکتریک می‌باشد.

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که یک جسم عایق چه ساختاری اتمی یا مولکولی داشته باشد و چه مولکولهایش قطبی یا غیرقطبی باشند، تحت تأثیر یک میدان الکتریکی خارجی قطبی می‌شود. البته، راهکار قطبی شدن در همه اجسام یکسان نیست ولی همواره نتیجه این است که هر اتم یا مولکول به صورت یک دوقطبی در می‌آید، همان‌گونه که در شکل‌های ۳-۱۲-ج و ۳-۱۳-ب و ۳-۱۳-د نشان داده شده‌اند. لازم به یادآوری است که هم‌جهتی مولکولهای قطبی با میدان E در شکل ۳-۱۳-ب در حقیقت به طور نسبی روی می‌دهد، زیرا اغتشاشات حرارتی همواره سعی در برهم زدن آرایش دوقطبی‌های مولکولی دارند. البته هر چه میدان E قوی‌تر باشد هم‌جهتی مولکولهای قطبی با میدان بیشتر و بهتر است.

اکنون که به چگونگی قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر یک میدان الکتریکی پی برده‌ایم، به مطالعه کمی مسئله در مقیاس ماکروسکوپی می‌پردازیم. یک جسم عایق قطبی شده را می‌توان به منزله انباره‌ای از دوقطبی‌ها در خلأ تلقی نمود. در فصل دوم، مسئله یک دوقطبی الکتریکی متشکل از دو بار نقطه‌ای q و $-q$ و به فاصله d از یکدیگر را مورد مطالعه قرار دادیم. برای دوقطبی گشتاور $p=qd$ را تعریف کرده و نشان دادیم که پتانسیل حاصل از آن در فواصل دور از رابطه ۲-۹۹، که به صورت زیر است، به دست می‌آید.

$$V(R) = \frac{P \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 |R|^2} \quad |R| \gg d \quad (3-31)$$

برای بیان میزان قطبی شدن اجسام مختلف مبادرت به تعریف برداری موسوم به بردار قطبی شدگی یا بردار پلاریزاسیون، که با حرف P نمایش داده می‌شود، می‌کنیم. این بردار برابر میزان گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم یا چگالی گشتاور دوقطبی الکتریکی تعریف می‌شود. اگر تعداد اتمها (یا مولکولها) در واحد حجم برابر N و گشتاور دوقطبی الکتریکی اتم (یا مولکول) i ام در عنصر حجم ΔV برابر p_i باشد، آنگاه بردار P عبارت است از:

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N\Delta V} p_i / \Delta V = Np \quad (3-32)$$

که p گشتاور متوسط به ازای یک اتم (یا مولکول) و ΔV عنصر حجم حول نقطه‌ای است که بردار P در آن مورد نظر است. توجه کنید که چون ΔV یک عنصر حجم ماکروسکوپی است، تعداد کثیری اتم (یا مولکول) قطبی شده را در بر می‌گیرد. بردار P منشأ میدان الکتریکی ثانویه‌ای در درون و اطراف جسم می‌شود که در خلاف جهت میدان اعمال شده است. میدان کل در هر نقطه از فضا از حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه به دست می‌آید.

برای مطالعه میدان ثانویه، جسمی را با حجم V' و محدود به سطح بسته S' ، مطابق شکل ۳-۱۴، در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که چگالی گشتاور دوقطبی الکتریکی در آن با تابع معلوم $P(r')$ مشخص شده باشد. گشتاور الکتریکی P ممکن است در اثر قرار گرفتن جسم در یک میدان الکتریکی خارجی و یا به دلیل فروالکتریک بودن خود جسم باشد. عنصر حجم dV' را در نقطه دلخواهی در درون جسم در نظر می‌گیریم. این عنصر حجم را می‌توان به منزله یک دوقطبی ماکروسکوپی با گشتاور PdV' دانست که P بردار پلاریزاسیون در محل عنصر حجم است. پتانسیل ناشی از این عنصر در نقطه A ، خارج از جسم عایق، با استفاده از رابطه ۳-۳۱، عبارت است از:

$$dV = \frac{P dV' \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 |R|^2}, \quad R = r - r' \quad (3-33)$$

اما اگر در عبارت $R = r - r'$ ، ثابت r و متغیر فرض شود جمله \hat{a}_R / R^2 مساوی گرادیان $1/R$ خواهد بود، یعنی $\hat{a}_R / R^2 = \nabla' (1/R)$ که علامت پریم به معنای مشتق گرفتن نسبت به مختصات پریم‌دار (r') است. به این ترتیب رابطه ۳-۳۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

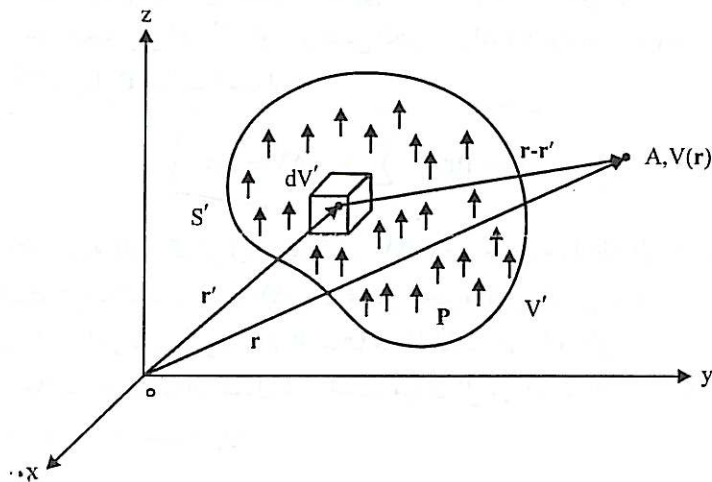
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (3-34)$$

با به کار بردن اتحاد برداری:

$$\nabla \cdot (fA) = f \nabla \cdot A + A \cdot \nabla f \quad (3-35)$$

که در آن A و f به ترتیب توابع برداری و نرده‌ای می‌باشند، می‌توان نشان داد که:

$$P \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{P}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot P \quad (3-36)$$



شکل ۳-۱۴: میدان ثانویه ناشی از یک عایق قطبی شده

سپس با استفاده از رابطه ۳-۳۶ در رابطه ۳-۳۴ می توان نوشت :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P} \right] dV' \quad (37-3)$$

سرانجام، پتانسیل حاصل از تمامی جسم قطبی شده در نقطه A با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۳-۳۷ در حجم V' به دست می آید.

$$V = \int_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dV' + \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dV' \quad (38-3)$$

اکنون، با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال اول در سمت راست رابطه ۳-۳۸ را به یک انتگرال سطح تبدیل می کنیم :

$$V = \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{4\pi\epsilon_0 R} + \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dV' \quad (39-3)$$

قبلاً دیده ایم که پتانسیل ناشی از یک توزیع سطحی بار الکتریکی با چگالی ρ_S از رابطه ۲-۹۲ و پتانسیل ناشی از یک توزیع حجمی بار الکتریکی با چگالی ρ_V از رابطه ۲-۹۳ به دست می آید. مقایسه انتگرالهای سمت راست رابطه ۳-۳۹ با انتگرالهای روابط ۲-۹۲ و ۲-۹۳ به روشنی نشان می دهد که پتانسیل حاصل از بردار پلاریزاسیون \mathbf{P} را می توان به دو چگالی بار، یکی توزیع سطحی با چگالی $\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$ ، که بردار واحد عمود بر سطح S' و به طرف خارج آن است و دیگری یک توزیع حجمی بار با چگالی $\rho_P = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$ ، منسوب نمود. این دو توزیع بار در حقیقت عملاً در جسم عایق به وجود می آیند، زیرا میدان قطبی کننده \mathbf{P} که در حالت کلی غیر یکنواخت است دو قطبی هایی با گشتاورهای متفاوت در نقاط مختلف جسم پدید می آورد، به طوری که در هر نقطه به علت جابه جایی بارهای مولکولها یا اتمها مقدار خالص غیر صفر بار الکتریکی ظاهر می شود. این بارها گرچه آزاد نیستند (مقیدند) ولی همانند بارهای آزاد تولید میدان الکتریکی می کنند. به عبارت دیگر، در هر عنصر کوچک حجم، تعداد کثیری دو قطبی های اتمی (یا مولکولی) با گشتاورهای متفاوت وجود دارند که حاصل جمع بارهای آنها در حالت کلی صفر نخواهد بود. البته اگر میدان قطبی کننده کل یکنواخت باشد، گشتاورهای همه دو قطبی ها برابر بوده و چون مقدار خالص بار هر دو قطبی صفر است، مقدار کل بار مجموعه دو قطبی های یکسان موجود در هر عنصر حجم نیز صفر خواهد بود، یعنی چگالی حجمی بار پلاریزاسیون صفر است. رابطه $\rho_P = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$ نیز این ادعا را تأیید می کند، زیرا اگر میدان قطبی کننده یکنواخت باشد بردار \mathbf{P} مقدار ثابتی خواهد داشت و دیورژانس آن صفر خواهد بود. گرچه چگالی حجمی بارهای مقید ممکن است مقداری غیر صفر یا صفر داشته باشد، چگالی سطحی بارهای مقید همواره مقداری غیر صفر و برابر $\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$ دارد. بارهای سطحی از قطبی شدن اتمها (یا مولکولها) در سطح جسم عایق پدید می آیند. پس به طور خلاصه، پس از حذف علامت پریم از ∇' داریم :

⊙ میدان قطبی کننده در هر نقطه در درون جسم مجموع میدان خارجی و میدان ثانویه یعنی همان میدان کل است.

$$\boxed{\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n} \quad (40-3)$$

$$\boxed{\rho_p = -\nabla \cdot P} \quad (41-3)$$

چون جسم قطبی شده در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، مقدار کل بارهای مقید در درون و روی سطح جسم باید برابر صفر باشد. برای اثبات این نکته می توان نوشت:

$$Q_p = \int_{V'} \rho_p dV' + \oint_{S'} \rho_{PS} dS' = \int_{V'} -\nabla' \cdot P dV' + \oint_{S'} P \cdot \hat{a}_n dS' = 0$$

زیرا:

$$\oint_{S'} P \cdot \hat{a}_n dS' = \int_{V'} \nabla' \cdot P dV'$$

اندیس P در کمیت‌های ρ_p ، ρ_{PS} و Q_p برای منسوب نمودن آنها به پدیده قطبی شدن به کار رفته است. حال با توجه به اینکه نتایج به دست آمده در روابط ۳-۳۹ تا ۳-۴۱ را با رابطه ۳-۳۱ آغاز نمودیم که توأم با محدودیت $d > |R|$ بود، ممکن است سؤال شود که آیا برای نتایج مذکور نیز محدودیتی وجود دارد یا آنها در همه نقاط، در درون و بیرون جسم، معتبرند؟ خوشبختانه این نتایج برای کلیه نقاط معتبرند، زیرا در رابطه ۳-۳۳ وقتی که عنصر حجم dV' در حد به سمت صفر میل می کند فاصله d در دو قطبی مربوط به عنصر گشتاور $P dV'$ نیز به سمت صفر میل می کند و این رابطه برای هر مقدار دلخواه $|R|$ هم چنان معتبر باقی می ماند و از چگالیهای سطحی و حجمی که در روابط ۳-۴۰ و ۳-۴۱ داده شده اند می توان برای محاسبه میدان الکتریکی ثانویه، هم در نقاط بیرون و هم در نقاط درون جسم، استفاده کرد.

همان طور که قبلاً نیز گفته شد، بارهای مقید همانند بارهای آزاد تولید میدان الکتریکی می کنند. بنابراین، شکل نقطه‌ای قانون گوس در یک نقطه در درون جسم به شرح زیر نوشته می شود:

$$\boxed{\nabla \cdot E = (\rho + \rho_p) / \epsilon_0} \quad (42-3)$$

که چگالی بار الکتریکی آزاد در صورت موجود بودن است. با جایگزین نمودن ρ_p با $-\nabla \cdot P$ در رابطه (۴۲-۳) داریم:

$$\boxed{\nabla \cdot (\epsilon_0 E) = \rho - \nabla \cdot P}$$

یا

$$\boxed{\nabla \cdot (\epsilon_0 E + P) = \rho} \quad (43-3)$$

در اینجا برداری موسوم به چگالی شار الکتریکی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\boxed{D = \epsilon_0 E + P} \quad (44-3)$$

تعریف بردار D به گونه‌ای است که دیورژانس آن همیشه برابر چگالی بار آزاد است، یعنی:

$$\boxed{\nabla \cdot D = \rho} \quad (45-3)$$

اهمیت بردار D در آن است که دیورژانس آن مستقل از بارهای مقید است و همان طور که رابطه ۳-۴۵ نشان می‌دهد فقط به چگالی بار آزاد بستگی دارد. رابطه ۳-۴۵ صورت کلی تری از شکل نقطه‌ای قانون گوس است و به عنوان یکی از روابط اساسی در مطالعه مسائل الکترومغناطیس مورد توجه قرار می‌گیرد. در اجسام خطی و همسانگرد^۱ بردار P را می‌توان بر حسب E توسط یک رابطه خطی به صورت زیر بیان داشت:^۲

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \quad (۳-۴۶)$$

که χ_e را ضریب حساسیت الکتریکی^۲ یا پذیرفتاری الکتریکی می‌نامند. با استفاده از رابطه ۳-۴۶ در رابطه ۳-۴۴ داریم:

$$D = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad (۳-۴۷)$$

در رابطه ۳-۴۷، $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ را قابلیت گذردهی نسبی و $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ را قابلیت گذردهی جسم عایق می‌نامند. مثال ۳-۵ فضای بین دو صفحه موازی از ماده عایقی با قابلیت گذردهی نسبی ϵ_r پر شده است. میدان الکتریکی یکنواخت $E_a = E_0 \hat{a}_z$ ، مطابق شکل ۳-۱۵-الف، به ماده عایق اعمال می‌گردد. بردار پلاریزاسیون P ، چگالی بارهای القا شده در درون ماده عایق و روی سطوح آن ($z=0$ و $z=d$) و نیز میدان الکتریکی کل در تمام نقاط فضا را به دست آورید.
حل:

اعمال میدان الکتریکی، مولکولهای جسم را مطابق شکل ۳-۱۵-ب قطبی می‌کند. چون میدان اعمال شده یکنواخت است، همه دوقطبی‌های ایجاد شده از نظر جهت و مقدار گشتاور یکسانند. بنابراین در همه نقاط ناحیه $0 < z < d$ ، به جز در صفحات مرزی، بارهای مثبت و منفی مقید به طور کامل یکدیگر را خنثی می‌کنند و جسم عایق را می‌توان با دو صفحه بینهایت بار با چگالیهای ρ_{ps} و $-\rho_{ps}$ ، مطابق شکل ۳-۱۵-ج، جایگزین نمود. به علت یکنواخت بودن میدان E_a ، چگالیها مقادیر ثابتی دارند و چون ماده عایق در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، اندازه‌های آنها مساوی است. این دو صفحه بار، فقط میدانی در ناحیه ماده عایق و در خلاف جهت میدان اولیه E_a به وجود می‌آورند. این میدان را میدان ثانویه نامیده و با E_s نمایش می‌دهیم. چون قطبی شدن ماده به صورت یکنواخت صورت می‌گیرد، می‌توان نوشت:

$$P = P_0 \hat{a}_z$$

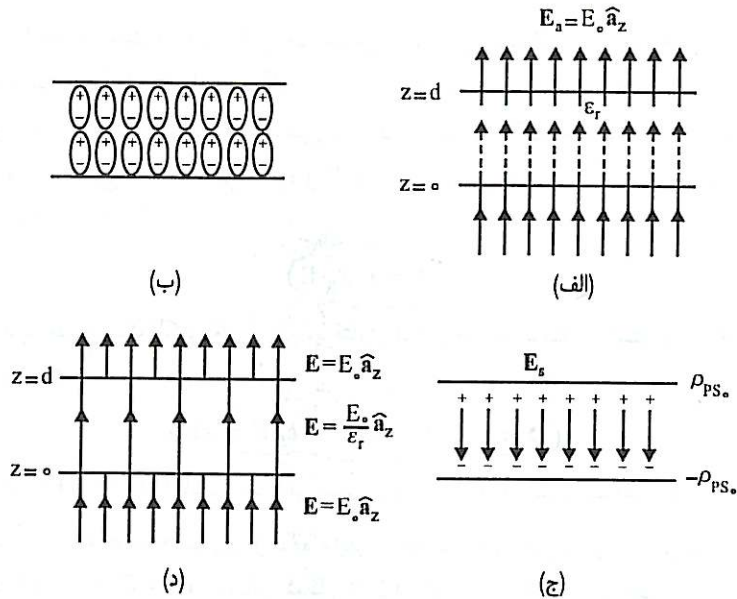
حال با استفاده از روابط ۳-۴۰ و ۳-۴۱، چگالیهای حجمی و سطحی بارهای القایی عبارتند از:

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = 0$$

1 - Isotropic

2 - Electric Susceptibility

۱) یک جسم از نظر الکتریکی خطی است اگر اندازه بردار P ایجاد شده در آن در هر نقطه متناسب با اندازه میدان الکتریکی کل در آن نقطه باشد و یک جسم از نظر الکتریکی همسانگرد است وقتی که بردار P در هر نقطه آن موازی بردار میدان کل در آن نقطه باشد.



شکل ۳-۱۵: یک جسم عایق در معرض میدان الکتریکی (الف) میدان الکتریکی یکنواخت E_a و ماده عایقی محصور بین دو صفحه موازی بینهایت در معرض آن (ب) مولکولهای قطبی شده ماده عایق (ج) بارهای مقید القایی روی صفحات مرزی و میدان ثانویه حاصل از آنها (د) میدان الکتریکی کل در درون عایق و در خارج آن

$$\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \begin{cases} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = P_z = \rho_{PS} & z=d \\ \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_z) = -P_z = \rho_{PS} & z=0 \end{cases} \quad (48-3)$$

میدان ثانویه بر حسب P_z عبارت است از:

$$\mathbf{E}_s = \begin{cases} -\frac{\rho_{PS}}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z = -\frac{P_z}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < z < d \\ \mathbf{0} & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (49-3)$$

بدین ترتیب میدان کل در ناحیه ماده عایق برابر است با:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_s = (E_0 - P_z / \epsilon_0) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (50-3)$$

اما از طرف دیگر \mathbf{E} و \mathbf{P} توسط رابطه ۳-۴۶ نیز به یکدیگر مربوط می شوند:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) (E_0 - P_z / \epsilon_0) \hat{\mathbf{a}}_z = P_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (51-3)$$

پس از حل این معادله برای P_z داریم:

$$P_z = E_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) / \epsilon_r \quad (52-3)$$

با در دست داشتن P ، بردار پلاریزاسیون و چگالی سطحی بارهای القایی نیز معین می‌باشند. با استفاده از روابط ۳-۴۹، ۳-۵۰ و ۳-۵۲ میدان الکتریکی کل که خطوط شار آن در شکل ۳-۱۵-د نمایش داده شده‌اند، محاسبه و به شرح زیر خلاصه می‌شود:

$$E = \begin{cases} E_0 \hat{a}_z & z < 0 \\ \frac{E_0}{\epsilon_r} \hat{a}_z & 0 < z < d \\ E_0 \hat{a}_z & z > d \end{cases} \quad (53-3)$$

مثال ۳-۶ ^{★★} بار نقطه‌ای Q در مرکز یک لایه کروی که از جنس عایقی با قابلیت گذردهی ϵ است قرار می‌گیرد. شعاع درونی لایه کروی برابر a و شعاع بیرونی آن برابر b است. این مجموعه را، مطابق شکل ۳-۱۶، در یک سطح کروی هادی زمین شده، به شعاع c ، قرار می‌دهیم، به طوری که لایه عایق کروی و کره هادی هم‌مرکز باشند. میدانهای D و E در نواحی $0 < r < a$ ، $a < r < b$ و $b < r < c$ و همچنین چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی در ناحیه $a \leq r \leq b$ را به دست آورید.

حل:

با استفاده از تقارن مسئله و به کار بردن شکل انتگرالی قانون گوس بر حسب D می‌توان نوشت:

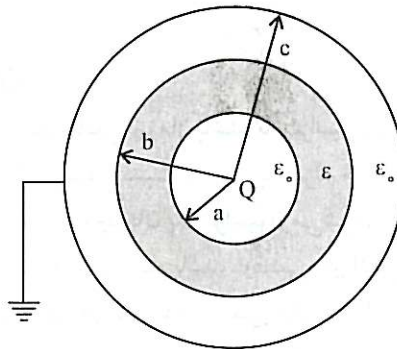
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = Q = S \quad \text{بار آزاد محصور در سطح بسته} \quad (54-3)$$

که S سطح کره‌ای به شعاع دلخواه r می‌باشد. چون برای تمام مقادیر r در فاصله $0 < r < c$ بار آزاد محصور در سطح گوسی S همان Q است و با توجه به ثابت بودن بردار D روی سطح گوسی می‌توان نوشت:

$$D(4\pi r^2) = Q \quad 0 < r < c$$

و از آنجا که D فقط مؤلفه شعاعی دارد، بردار D عبارت است از:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \quad 0 < r < c \quad (55-3)$$



شکل ۳-۱۶: سیستمی مرکب از بار نقطه‌ای Q در مرکز یک لایه کروی عایق و یک کره هادی زمین شده

بردار شدت میدان الکتریکی E را می توان به سادگی از رابطه $E = D/\epsilon$ در هر ناحیه محاسبه کرد:

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & 0 < r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & b < r < c \end{cases} \quad (56-3)$$

برای محاسبه بردار P در ناحیه $a < r < b$ از رابطه ۳-۴۴ استفاده می کنیم:

$$P = D - \epsilon_0 E = \left(\frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{\epsilon_0 Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) \hat{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \hat{a}_r \quad a < r < b \quad (57-3)$$

چگالی های بارهای القایی پلاریزاسیون روی سطوح کروی $r=a$ و $r=b$ عبارتند از:

$$\rho_{PS_1} = P \cdot \hat{a}_n = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \hat{a}_r \cdot (-\hat{a}_r) = -\frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon a^2} \quad r=a \text{ روی سطح} \quad (58-3)$$

$$\rho_{PS_2} = P \cdot \hat{a}_n = \frac{Q}{4\pi b^2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = +\frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon b^2} \quad r=b \text{ روی سطح} \quad (59-3)$$

و چگالی حجمی بارهای القایی پلاریزاسیون در ناحیه $a < r < b$ عبارت است از:

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon r^2} \right] = 0 \quad (60-3)$$

میدان الکتریکی E باعث جذب بار آزادی به مقدار $-Q$ توسط کره هادی از زمین می گردد. این بار طبیعتاً به طور یکنواخت روی سطح هادی توزیع می شود و چگالی آن برابر $-Q/4\pi c^2$ است. توجه کنید که چون بار آزاد محصور در سطح گوسی با شعاع $r > c$ صفر است، میدان الکتریکی در ناحیه $r > c$ همواره صفر می باشد.

■

۸-۳ جریان پلاریزاسیون

اگر میدان الکتریکی قطبی کننده تابعی از زمان باشد، پلاریزاسیون ایجاد شده در ماده نیز به همان شکل تابعی از زمان است. تغییرات پلاریزاسیون نسبت به زمان به منزله حرکت بارهای مقید است و حرکت این بارها منجر به ایجاد جریانی موسوم به جریان پلاریزاسیون می شود. به عنوان مثال، اگر میدان الکتریکی خارجی تغییراتی سینوسی نسبت به زمان داشته باشد، دو قطبی های اتمی (یا مولکولی) ایجاد شده در ماده عایق در هر دوره تناوب دو بار تغییر جهت می دهند. یعنی جای بارهای مثبت و منفی هر دو قطبی عوض می شود و به عبارت دقیق تر گشتاور هر دو قطبی تغییرات میدان الکتریکی را دنبال می کند (البته اگر فرکانس خیلی زیاد باشد، دو قطبی ها ممکن است نتوانند تغییرات میدان را دنبال نمایند و این پدیده به منزله کاهش

یافتن قابلیت گذردهی جسم است). چون تغییر دو قطبی ها به منزله حرکت بارهای مقید است، یک جریان پلاریزاسیون نوسانی سینوسی به وجود می آید. برای یافتن چگالی جریان پلاریزاسیون (J_p) از معادله پیوستگی، که در رابطه ۳-۱۶ بیان شده است، استفاده می کنیم:

$$\oint_S J_p \cdot dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_p dV \quad (۳-۶۱)$$

با جایگزین نمودن ρ_p با $-\nabla \cdot P$ در سمت راست رابطه ۳-۶۱، داریم:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_p dV = \frac{d}{dt} \int_V (\nabla \cdot P) dV = \frac{d}{dt} \oint_S P \cdot dS$$

بنابراین:

$$\oint_S J_p \cdot dS = \frac{d}{dt} \oint_S P \cdot dS = \oint_S \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dS \quad (۳-۶۲)$$

چون رابطه ۳-۶۲ باید برای هر سطح بسته دلخواه S صادق باشد، پس کمیت‌های زیر انتگرال در طرفین این رابطه باید برابر باشند، یعنی:

$$J_p = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (۳-۶۳)$$

بدیهی است که برای میدانهای الکتریکی ساکن، بردار پلاریزاسیون P تغییراتی نسبت به زمان ندارد و جریان پلاریزاسیون صفر است. چنانچه از طرفین رابطه ۳-۶۳ دیورژانس گرفته شود، شکل نقطه‌ای معادله پیوستگی به دست می آید:

$$\nabla \cdot J_p = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot P = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \quad (۳-۶۴)$$

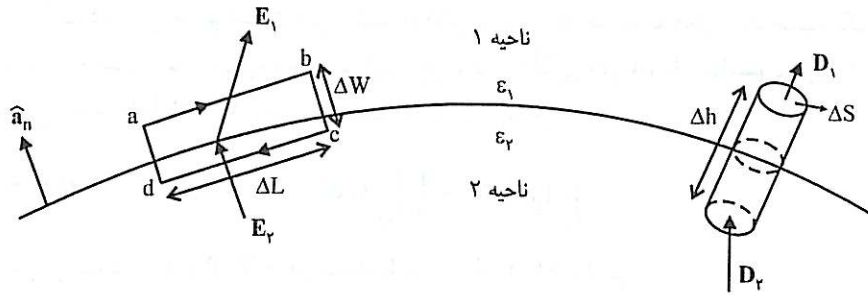
۹-۳ شرایط مرزی در سطح مشترک دو عایق

دو ناحیه عایق کامل را با مرز مشترکی مطابق شکل ۳-۱۷ در نظر می گیریم. برای تعیین شرایط مرزی عیناً از همان روشی که در اجسام هادی استفاده نمودیم پیروی می کنیم. برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های مماسی میدانها در دو ناحیه، مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را با ابعاد $ab=cd=\Delta L$ و $ad=bc=\Delta W$ مطابق شکل ۳-۱۷، در نظر می گیریم. چون ΔL و ΔW بسیار کوچک فرض می شوند، در هر ناحیه از مستطیل $abcd$ میدانهای E_1 و E_2 ثابت هستند. حال با توجه به اینکه میدانهای الکتریکی ساکن می باشند، می توان نوشت:

$$\oint_{abcd} E \cdot dL = 0$$

اما:

$$\lim_{\Delta W \rightarrow 0} \oint_{abcd} E \cdot dL = \int_a^b E_1 \cdot dL + \int_c^d E_2 \cdot dL = E_{1\tau} \Delta L - E_{2\tau} \Delta L = 0$$



شکل ۳-۱۷: شرایط مرزی در سطح مشترک دو عایق

$$\Delta L (E_{t_1} - E_{t_2}) = 0$$

یا:

و چون $\Delta L \neq 0$ است، پس:

$$E_{t_1} = E_{t_2} \quad (۶۵-۳)$$

رابطه ۳-۶۵ بیان می‌کند که مؤلفه‌های مماسی میدانهای الکتریکی در مرز دو عایق با یکدیگر برابرند. به عبارت دیگر «مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در مرز دو ناحیه عایق همواره پیوسته است». برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی، سطح گوسی استوانه‌ای شکلی به ارتفاع Δh و قاعده ΔS ، مطابق شکل ۳-۱۷، را در نظر گرفته و قانون گوس را به کار می‌بریم:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = S$$

بار آزاد محصور در سطح S حجم استوانه گوسی و S سطح کل آن است. با میل دادن Δh به سمت صفر می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta S D_{n_1} - \Delta S D_{n_2} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = \int_{\Delta S} \rho_S dS = \rho_S \Delta S$$

یا:

$$\Delta S (D_{n_1} - D_{n_2}) = \rho_S \Delta S$$

و پس از حذف ΔS از طرفین این رابطه، داریم:

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S \quad (۶۶-۳)$$

در رابطه ۳-۶۶، چگالی سطحی بار آزاد در سطح مرزی بین دو عایق است. ولی ρ_S اغلب برابر صفر است که در آن صورت:

$$D_{n_1} = D_{n_2}$$

و آنگاه:

$$\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}$$

شرایط مرزی ۳-۶۵ و ۳-۶۶ را می توان به صورت روابط برداری زیر نیز بیان داشت :

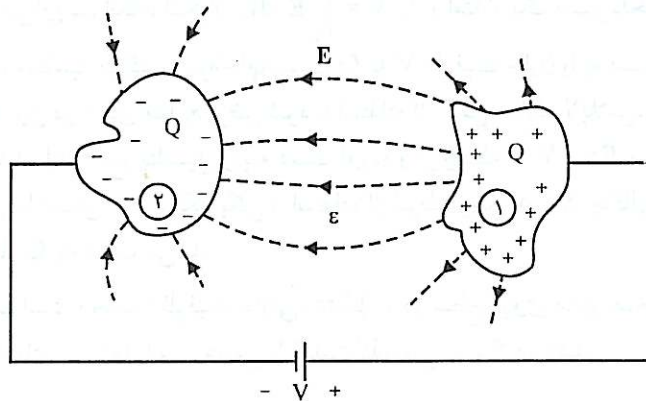
$$\left. \begin{array}{l} E_{n1} = 0 \\ D_{n1} = \rho_s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت خاص ۱} \\ \text{سطح ۲ هادی} \\ \text{کابل} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_n \times (E_1 - E_2) = 0 \\ \hat{a}_n \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{فرم برداری شرایط} \\ \text{مرزی} \end{array} \quad \begin{array}{l} (۶۷-۳) \\ (۶۸-۳) \end{array}$$

که \hat{a}_n بردار واحد عمود بر مرز مشترک دو ناحیه و جهت آن از ناحیه ۲ به سمت ناحیه ۱ می باشد. روابط ۳-۶۷ و ۳-۶۸ کلی ترین شکل شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی هستند و حتی برای میدانهای متغیر با زمان نیز صادقند. شرایط مرزی در سطح مشترک یک ناحیه هادی و یک ناحیه عایق با قابلیت گذردهی ϵ همان روابط ۳-۲۴ و ۳-۲۵ هستند که در آنها ϵ_1 با ϵ جایگزین می شود. شرایط مرزی اخیر را می توان در شکل برداری خود از روابط ۳-۶۷ و ۳-۶۸ نیز نتیجه گرفت. اگر یکی از نواحی مثلاً ناحیه ۲ هادی باشد، در آن صورت E_2 و D_2 برابر صفر بوده و آنگاه داریم :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_n \times E_1 = 0 \\ \hat{a}_n \cdot D_1 = \rho_s \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (۶۹-۳) \\ (۷۰-۳) \end{array}$$

۳-۱۰ ظرفیت

دو جسم هادی، که فضای اطراف آنها را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ فرا گرفته باشد، را در نظر می گیریم. اگر اختلاف پتانسیل V را بین این دو جسم هادی به وجود آوریم (مثلاً از طریق وصل یک باتری V ولتی بین آنها)، بارهای مساوی و ناهمنام روی سطح هادیها به وجود می آیند. بارهای سطحی به وجود آمده روی سطوح هادیها، میدان الکتریکی E را تولید می کنند که به اختلاف پتانسیل V از طریق رابطه $V = -\int E \cdot dL$ مربوط می شود. چون سطوح هادیها سطوح هم پتانسیل هستند، خطوط میدان الکتریکی بر آنها عمود بوده و با توجه به شرایط مرزی در سطح مشترک عایق و هادی، $E_n = \rho_s / \epsilon$ است که ρ_s چگالی توزیع بار روی سطح و E_n میدان الکتریکی در سطح هر یک از هادیها می باشد. شکل ۳-۱۸ دو جسم هادی، بارهای به وجود آمده روی آنها و خطوط میدان الکتریکی را



شکل ۳-۱۸: خازنی متشکل از دو جسم هادی و ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ

$$C = \frac{Q}{V} \leftarrow \sigma = \int \epsilon_0 \cdot dl \leftarrow E = \frac{D}{\epsilon} \leftarrow D = \rho_s \cdot r_s \leftarrow \rho_s = \frac{Q}{S} \leftarrow Q \text{ معادله } (1)$$

$$C = \frac{Q}{V} \leftarrow Q = \oint_S \rho_s \cdot ds \leftarrow D = \epsilon E \leftarrow E = -\nabla V \leftarrow V(r) \text{ معلوم } \sigma_0 \leftarrow (2)$$

ظرفیت ۱۰-۳

۴ جدول
کتب

۱۳۶

نشان می دهد. مقدار کل بار به وجود آمده روی سطح هر هادی (Q) متناسب با ولتاژ بین دو هادی است، به طوری که می توان نوشت:

$$Q = CV \quad (۷۱-۳)$$

ضریب تناسب C را ظرفیت قطعه متشکل از دو جسم هادی، که معمولاً از آن به عنوان خازن نام برده می شود، نامند. C در واقع شاخصی است برای مقدار باری که هر یک از دو جسم هادی تحت ولتاژ V می توانند در خود نگه دارند. چون Q و V هر دو به میدان الکتریکی E مربوط هستند، می توان ظرفیت را بر حسب میدان الکتریکی به صورت زیر نوشت:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int_S \epsilon E \cdot dS}{\int_+^- E \cdot dL} \quad (۷۲-۳)$$

صورت کسر سمت راست رابطه ۷۲-۳ یک انتگرال سطح است که روی سطح هر کدام از هادیها ممکن است محاسبه شود. در این انتگرال $E = E_n \hat{a}_n$ و $dS = dS \hat{a}_n$ است، از این رو $E \cdot dS = E_n dS$ بوده و با در نظر گرفتن شرط مرزی ۷۰-۳، $\epsilon E_n dS = \rho_s dS$ است. بدین ترتیب مقدار این انتگرال برابر بار Q خواهد بود. انتگرال $\int_+^- E \cdot dL$ در مخرج کسر، یک انتگرال خط است که در امتداد یک مسیر دلخواه، که نقطه ای از هادی با بار مثبت را به نقطه ای از هادی با بار منفی وصل کند، محاسبه می شود. ظرفیت یک خازن فقط به شکل و ابعاد هندسی آن و قابلیت گذردهی عایق به کار رفته در آن بستگی دارد و مستقل از اختلاف پتانسیل V است. وجود E هم در صورت و هم در مخرج کسر رابطه ۷۲-۳ نیز این خصوصیت را به طور ضمنی تفهیم می کند. واحد اندازه گیری ظرفیت «فاراد» نام دارد. برای محاسبه ظرفیت یک خازن، ابتدا بارهای Q و -Q را روی سطوح دو هادی آن در نظر گرفته و نحوه توزیع آنها را بررسی می کنیم. سپس، میدان الکتریکی E حاصل از توزیعی سطحی به وجود آمده را به دست می آوریم. آنگاه، انتگرال $V = \int_+^- E \cdot dL$ را در امتداد یک مسیر دلخواه، که دو هادی را به هم وصل کند، محاسبه می کنیم. سرانجام، نسبت Q به V ظرفیت خازن را به دست می دهد. چنانچه اختلاف پتانسیل بین دو هادی معلوم فرض شود با استفاده از روش معادله لاپلاس، که در فصل چهارم مطالعه خواهد شد، ابتدا تابع پتانسیل را به دست آورده و از رابطه $E = -\nabla V$ میدان الکتریکی را محاسبه می کنیم. با داشتن میدان الکتریکی و استفاده از شرط مرزی ۷۰-۳، چگالی سطحی بار روی یک هادی و آنگاه Q به دست می آید.

مثال ۷-۳ مطلوب است محاسبه ظرفیت خازنی متشکل از دو سطح کروی هادی هم مرکز به شعاعهای a و b (b > a) که فضای بین آنها را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ε پر کرده باشد.

حل:

اعمال ولتاژ V به دو کره، بارهای Q و -Q را روی آنها ایجاد می کند که به طور یکنواخت روی

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

سطوح آنها توزیع می‌شوند. میدان الکتریکی در فاصله $a < r < b$ شعاعی بوده و با استفاده از قانون گوس محاسبه می‌شود:

$$E = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad a < r < b$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره به شرح زیر محاسبه می‌گردد:

$$V = \int_+^- E \cdot dL = \int_b^a \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r dr) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{1}{r} \right|_b^a = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab}$$

آنگاه:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (۷۳-۳)$$

چنانچه شعاع کره بیرونی (b) به سمت بینهایت میل داده شود، ظرفیت یک کره تنها به شعاع a به دست می‌آید:

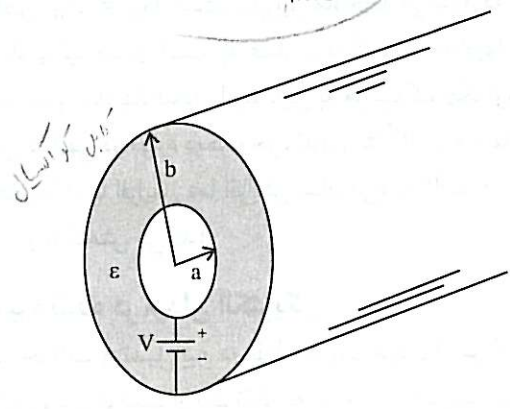
$$C = 4\pi\epsilon_0 a \quad (۷۴-۳)$$

مثال ۳-۸ کابل هم‌محور در انتقال علائم الکتریکی کاربردهای فراوانی دارد. این کابل از دو استوانه هم‌محور، مطابق شکل ۳-۱۹، تشکیل می‌شود که فضای بین آنها را ماده عایقی پر نماید. مطلوب است محاسبه ظرفیت در واحد طول یک کابل هم‌محور به طول بینهایت که شعاعهای استوانه‌های درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر a و b و قابلیت گذردهی عایق بین آنها برابر ε باشد.

حل:

فرض کنید که اعمال ولتاژ V بین دو استوانه هادی، بارهای Q و -Q را روی سطوح استوانه‌ها به ازای واحد طول به وجود آورد. توزیع بارها روی سطوح هادیها کاملاً یکنواخت است، بنابراین با توجه به تقارن استوانه‌ای کابل، میدان الکتریکی در ناحیه $a < r < b$ فقط مؤلفه شعاعی دارد و ضمناً روی یک سطح گوسی استوانه‌ای شکل به شعاع r، مقداری ثابت دارد. این میدان با استفاده از قانون گوس به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$



شکل ۳-۱۹: کابل هم‌محور متشکل از دو استوانه هادی هم‌محور با ماده عایقی در بین آنها

سازمان های سری $\int \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

۱۱-۳ میدان الکتریکی در اجسام نیمه هادی $C_T = C_1 + C_2$ ۱۳۸

اختلاف پتانسیل V را می توان با انتگرال گرفتن E در امتداد یک مسیر شعاعی که استوانه درونی را به استوانه بیرونی وصل کند به دست آورد.

$$V = \int_+^- E \cdot dL = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon r} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r dr) = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln r \Big|_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

آنگاه:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (۷۵-۳)$$

۱۱-۳ میدان الکتریکی در اجسام نیمه هادی

همان گونه که در قسمت ۳-۱ بیان گردید، در نیمه هادیها علاوه بر الکترونهای آزاد حاملهای دیگری موسوم به حفره با بار الکتریکی مثبت نیز وجود دارند. وقتی که یک جسم نیمه هادی در معرض میدان الکتریکی قرار می گیرد، حفره ها نیز مانند الکترونهای آزاد جابه جا می شوند و در فرایند هدایت الکتریکی شرکت می کنند. مشابه قابلیت تحرک μ_e در رابطه ۳-۳ برای الکترونها، می توان قابلیت تحرک μ_h را برای حفره ها تعریف کرد. این ضریب برابر نسبت سرعت متوسط حفره ها (v_d) به میدان الکتریکی اعمال شده (E) می باشد ($v_d = \mu_h E$). مقدار μ_h عموماً از مقدار μ_e کوچک تر است و این بدان معنی است که حفره ها کندتر از الکترونهای آزاد در یک نیمه هادی جابه جا می شوند. اگر در یک جسم نیمه هادی، تعداد الکترونهای آزاد و حفره ها در واحد حجم به ترتیب برابر N_e و N_h باشند، چگالی جریان الکتریکی ناشی از اعمال میدان E به نیمه هادی عبارت است از:

$$J = (\mu_e N_e |e| + \mu_h N_h |e|) E \quad (۷۶-۳)$$

نحوه استخراج رابطه مزبور مشابه یافتن رابطه ۳-۱۱ در اجسام هادی است. به این ترتیب برای نیمه هادیها می توان رسانایی σ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\sigma = (\mu_e N_e + \mu_h N_h) |e| \quad (۷۷-۳)$$

در نیمه هادیهای خالص $N_e = N_h$ است. بنابراین ملاحظه می شود که شکل نقطه ای قانون اهم، $J = \sigma E$ ، برای نیمه هادیها نیز صادق است. به عبارت دیگر، نیمه هادیها وقتی که در معرض میدان الکتریکی قرار بگیرند مشابه هادیها، لیکن با رسانایی به مراتب کوچک تر، رفتار می کنند. البته نباید فراموش شود که چنین تشابهی در موارد دیگر وجود ندارد. مثلاً σ در هادیها با افزایش دما کاهش می یابد، در حالی که در نیمه هادیها σ با افزایش دما افزایش نشان می دهد (البته در نیمه هادیها نیز اگر دما از حد معینی تجاوز کند، σ رو به کاهش می نهد).

۱۲-۳ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

در قسمت ۲-۵، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در یک میدان الکتریکی ساکن را به صورت کار لازم برای انتقال باری به اندازه یک کولمب از یک نقطه به نقطه دیگر تعریف نمودیم. اگر بار الکتریکی از یک نقطه با پتانسیل بالاتر به نقطه دیگری که پتانسیل آن پایین تر است انتقال یابد، میدان کار انجام می دهد و

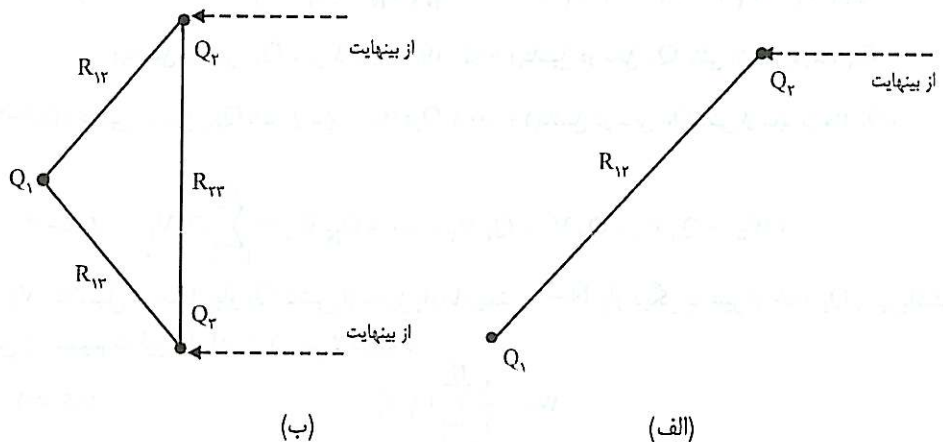
باید کاهشی در انرژی سیستم به وجود آید. اکنون می توان سؤال کرد که این انرژی را سیستم چگونه تأمین می کند؟ به طور عکس اگر باری از نقطه ای با پتانسیل پایین تر به نقطه دیگری با پتانسیل بالاتر انتقال یابد، یک عامل خارجی باید کار انجام دهد و دوباره می توان سؤال کرد که کار انجام شده که به صورت افزایش انرژی پتانسیل سیستم بروز می کند در کجا نهفته می شود؟ برای پاسخ گویی به این سؤالات می توان این طور تصور کرد که در میدان الکتریکی انرژی ذخیره می شود. در حالت اول قدری از انرژی ذخیره شده در میدان صرف انتقال بار به نقطه با پتانسیل پایین تر می شود، در صورتی که در حالت دوم انرژی صرف شده توسط عامل خارجی باعث افزایش انرژی ذخیره شده در میدان می گردد.

برای محاسبه انرژی ذخیره شده در یک میدان الکتریکی، ابتدا از سیستمی مرکب از دو بار نقطه ای Q_1 و Q_2 که به فاصله بینهایت از یکدیگر قرار دارند شروع می کنیم. برای انتقال Q_2 از بینهایت به مجاورت Q_1 ، به ترتیبی که در شکل ۳-۲۰ الف نشان داده شده است، باید کاری به اندازه حاصل ضرب Q_2 در پتانسیل ناشی از Q_1 در محل Q_2 توسط یک عامل خارجی انجام گیرد. بنابراین انرژی پتانسیل سیستم به اندازه W_2 افزایش می یابد:

$$W_2 = Q_2 V_1^1 \quad (۷۸-۳)$$

در این رابطه، V_1^1 پتانسیل ناشی از Q_1 در محل Q_2 است (یعنی $V_1^1 = Q_1 / 4\pi\epsilon_0 R_{12}$). حال اگر سیستمی مرکب از سه بار نقطه ای را در نظر بگیریم، کار لازم برای انتقال Q_2 و Q_3 از بینهایت به مجاورت Q_1 ، به گونه ای که در شکل ۳-۲۰ ب نشان داده شده است، را می توان در دو مرحله محاسبه نمود. ابتدا Q_2 را از بینهایت به مجاورت Q_1 آورده که کار لازم در این مرحله از رابطه ۳-۷۸ به دست می آید. سپس Q_3 را از بینهایت به مجاورت Q_1 و Q_2 می آوریم. در مرحله دوم، نه تنها به نیروی ناشی از Q_1 بلکه به نیروی ناشی از Q_2 نیز باید غلبه شود. بنابراین کار لازم در این مرحله عبارت است از:

$$W_3 = Q_3 V_1^1 + Q_3 V_2^2 \quad (۷۹-۳)$$



شکل ۳-۲۰: انتقال بارهای نقطه ای از بینهایت به مجاورت بار Q_1 برای محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی (الف) انرژی حاصل از دو بار نقطه ای (ب) انرژی حاصل از سه بار نقطه ای

آنگاه، مقدار کل کار لازم برای انتقال Q_2 و Q_3 به مجاورت Q_1 برابر است با:

$$W_e = W_2 + W_3 = Q_2 V_2^1 + Q_3 V_3^1 + Q_3 V_3^2 \quad (۸۰-۳)$$

اگر به همین ترتیب ادامه داده بر تعداد بارها بیفزاییم و سرانجام سیستمی مرکب از N بار نقطه‌ای، که فواصل دو به دو آنها در بدو امر بینهایت است، را در نظر بگیریم، کار لازم برای انتقال بارهای Q_2 ، Q_3 ، Q_4 ، Q_5 ، ... و Q_N به مجاورت بار Q_1 عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} W_e &= W_2 + W_3 + \dots + W_N \\ &= Q_2 V_2^1 + (Q_3 V_3^1 + Q_3 V_3^2) + (Q_4 V_4^1 + Q_4 V_4^2 + Q_4 V_4^3) + \dots \\ &= \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} Q_i V_i^j \end{aligned} \quad (۸۱-۳)$$

که V_i^j پتانسیل ناشی از بار Q_j در محل بار Q_i است. اما جمله $Q_i V_i^j$ را می‌توان به صورت زیر تغییر داد:

$$Q_i V_i^j = Q_i \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ji}} = Q_j \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = Q_j V_j^i \quad (۸۲-۳)$$

اکنون با استفاده از رابطه ۸۲-۳، W_e در رابطه ۸۱-۳ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$W_e = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} Q_j V_j^i \quad (۸۳-۳)$$

پس از جمع طرفین روابط ۸۱-۳ و ۸۳-۳ داریم:

$$\begin{aligned} 2W_e &= Q_1 (V_1^2 + V_1^3 + V_1^4 + \dots + V_1^N) + Q_2 (V_2^1 + V_2^3 + V_2^4 + \dots + V_2^N) \\ &\quad + Q_3 (V_3^1 + V_3^2 + V_3^4 + \dots + V_3^N) + \dots + Q_N (V_N^1 + V_N^2 + V_N^3 + \dots + V_N^{N-1}) \\ &= Q_1 (\text{پتانسیل در محل } Q_1 \text{ ناشی از سایر بارها}) + Q_2 (\text{پتانسیل در محل } Q_2 \text{ ناشی از سایر بارها}) \\ &\quad + Q_3 (\text{پتانسیل در محل } Q_3 \text{ ناشی از سایر بارها}) + \dots + Q_N (\text{پتانسیل در محل } Q_N \text{ ناشی از سایر بارها}) \end{aligned} \quad (۸۴-۳)$$

یا:

$$2W_e = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots + Q_N V_N = \sum_{i=1}^N Q_i V_i \quad (۸۵-۳)$$

که V_i پتانسیل در محل بار Q_i ناشی از سایر بارها (یعنی $N-1$ بار دیگر به غیر از خود Q_i) می‌باشد. پس از تقسیم طرفین رابطه ۸۵-۳ بر ۲ داریم:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i \quad (۸۶-۳)$$

پتانسیل در محل بار Q_i ناشی از سایر بارها

رابطه ۳-۸۶ انرژی پتانسیل ذخیره شده در میدان الکتریکی سیستمی مرکب از N بار نقطه‌ای را به دست می‌دهد. در صورتی که توزیع پیوسته‌ای از بار الکتریکی با چگالی حجمی ρ_V در حجم V ، که محدود به سطح بسته S است، داشته باشیم، این بار را می‌توان به منزله مجموعه‌ای از بارهای کوچک نقطه‌ای تلقی نمود که اندازه هر یک برابر $\rho_V \Delta V$ باشد. آنگاه، انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم مرکب از بارهای بینهایت کوچک، با استفاده از رابطه ۳-۸۶، برابر است با:

$$W_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_i [\rho_V \Delta V]_i V_i = \frac{1}{2} \int_V \rho_V V dV \quad (۸۷-۳)$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که برای یک توزیع سطحی بار با چگالی ρ_S ، انرژی ذخیره شده در میدان عبارت است از:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_S V dS \quad (۸۸-۳)$$

در آغاز این قسمت بیان نمودیم که انرژی پتانسیل سیستمی مرکب از بارهای الکتریکی را می‌توان به صورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی آن پنداشت. از این رو باید بتوان انرژی سیستم را بر حسب میدان الکتریکی بیان کرد. برای رسیدن به چنین نتیجه‌ای ابتدا ρ_V در رابطه ۳-۸۷ را با $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ جایگزین می‌نماییم:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) V dV \quad (۸۹-۳)$$

چون در نقاطی از فضا که بار الکتریکی وجود ندارد $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ است، اگر حجم انتگرال‌گیری در رابطه ۳-۸۹ از V به تمام فضا تغییر یابد، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{تمام فضا}} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) V dV \quad (۹۰-۳)$$

اکنون از اتحاد برداری $\nabla \cdot (V \mathbf{E}) = V \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla V$ استفاده نموده و در رابطه ۳-۹۰، $V \nabla \cdot \mathbf{E}$ را با $\nabla \cdot (V \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla V$ جایگزین می‌نماییم:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} [\nabla \cdot (V \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla V] dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV \end{aligned} \quad (۹۱-۳)$$

در انتگرال دوم رابطه ۳-۹۱ از رابطه $\mathbf{E} = -\nabla V$ استفاده شده است. با به کار بردن قضیه دیورژانس، انتگرال اول در رابطه مذکور را به یک انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dV = \oint_{\text{سطح تمام فضا}} V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (۹۲-۳)$$

که منظور از سطح تمام فضا، سطح کره‌ای به شعاع بینهایت است. اما روی چنین سطحی هر توزیع بار محدودی به مقدار کل Q به صورت یک بار نقطه‌ای به نظر می‌رسد، به طوری که وقتی r به سمت بینهایت میل کند میدان E و پتانسیل V ، صرف‌نظر از چگونگی توزیع باری که منشأ E و V است، به سمت حدود زیر میل خواهند کرد:

$$E \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r, \quad V \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

و حد رابطه انتگرالی ۳-۹۲ عبارت می‌شود از:

$$\begin{aligned} \oint_{\text{سطح فضای بینهایت}} \mathbf{VE} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \right) \sin\theta d\theta d\phi = 0 \end{aligned} \quad (۹۳-۲)$$

نتیجه به دست آمده حتی برای یک توزیع بار بینهایت نیز صادق خواهد بود، مشروط بر آنکه وقتی $r \rightarrow \infty$ ، میدان الکتریکی E حداقل با نرخ r^{-2} و پتانسیل V حداقل با نرخ r^{-1} کاهش یابد. بدین ترتیب رابطه ۳-۹۱ به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$W_e = \frac{1}{4} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \int_{\text{تمام فضا}} \left(\frac{1}{4} \epsilon_0 E^2 \right) dV \quad (۹۴-۳)$$

رابطه ۳-۹۴ به وضوح نشان می‌دهد که تصور ذخیره شدن انرژی در میدان الکتریکی کاملاً صحیح است و کمیت $w_e = \frac{1}{4} \epsilon_0 E^2$ محققاً چگالی انرژی الکتریکی محسوب می‌شود. چنانچه فضایی که بارهای الکتریکی میدان E را در آن به وجود می‌آورند به جای خلأ ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ بوده و ماده عایق همچنین از نظر الکتریکی خطی باشد، چگالی انرژی الکتریکی از رابطه $w_e = \frac{1}{4} \epsilon E^2 = \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ به دست می‌آید. چگالی انرژی الکتریکی در محیط‌های غیرخطی از رابطه $w_e = \int^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$ به دست می‌آید که به اثبات آن نمی‌پردازیم. به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$W_e = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (۹۵-۳)$$

مثال ۳-۹ انرژی ذخیره شده در سیستم خازنی شکل ۳-۱۸ را بر حسب ظرفیت C و اختلاف پتانسیل V محاسبه کنید.

حل:

در این سیستم دو بار مساوی و ناهمنام $+Q$ و $-Q$ روی سطوح S_1 و S_2 دو جسم هادی توزیع می‌شوند. اگر پتانسیل هادی حاوی بار $+Q$ را با V_1 و پتانسیل هادی حاوی بار $-Q$ را با V_2 نشان دهیم، آنگاه با استفاده از رابطه ۳-۸۸ می‌توان نوشت:

$$W_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_S V dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_1} \rho_{S_1} V_1 dS + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_2} \rho_{S_2} V_2 dS$$

اما چون S_1 و S_2 سطوح هم‌پتانسیل هستند، روی S_1 روی V_1 و روی S_2 ثابت است. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{\epsilon_0} V_1 \int_{S_1} \rho_{S_1} dS + \frac{1}{\epsilon_0} V_2 \int_{S_2} \rho_{S_2} dS = \frac{1}{\epsilon_0} V_1 Q - \frac{1}{\epsilon_0} V_2 Q \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{\epsilon_0} QV \end{aligned}$$

اما از طرفی طبق تعریف ظرفیت $Q = CV$ است، در نتیجه:

$$W_e = \frac{1}{2} C V^2 \quad (۹۶-۳)$$

■

مثال ۳-۱۰ بار Q به طور یکنواخت روی سطح کره‌ای هادی به شعاع R توزیع شده است. انرژی الکتریکی ذخیره شده در میدان حاصل از این توزیع بار را به دو روش زیر محاسبه کنید:
الف) با استفاده از رابطه ۱-۸۸، ب) با استفاده از رابطه ۳-۹۴.

حل:

الف)

$$W_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_S V dS = \frac{1}{\epsilon_0} V \int_S \rho_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} VQ$$

اما پتانسیل V روی سطح کره عبارت است از:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

ب) برای محاسبه انرژی با استفاده از رابطه ۳-۹۴ ابتدا عبارت میدان الکتریکی را می‌نویسیم:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > R \end{cases}$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{تمام فضا}} \epsilon_0 \cdot E^2 dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

■

توان تلف شده در ناحیه‌ای با رسانایی محدود

فرض کنید ناحیه‌ای از فضا را ماده‌ای با رسانایی محدود σ اشغال نموده و در آن جریانی با چگالی \mathbf{J} برقرار باشد. چنین ناحیه‌ای را می‌توان به منزله یک مقاومت تلقی کرد که عبور جریان الکتریکی از آن منجر به به اتلاف انرژی می‌شود. برای محاسبه توان تلف شده، عنصر حجمی را به طول ΔL در امتداد بردار \mathbf{J} و به سطح قاعده ΔS عمود بر \mathbf{J} در نظر می‌گیریم. جریان گذشته از سطح قاعده ΔS برابر است با $\Delta I = \mathbf{J} \Delta S$ و اختلاف پتانسیل موجود در طول ΔL عبارت است از $\Delta V = E \Delta L = \mathbf{J} \Delta L / \sigma$ که \mathbf{J} اندازه بردار \mathbf{J} را در محل عنصر حجم بیان می‌کند. با توجه به اینکه توان تلف شده از حاصل ضرب ولتاژ و جریان به دست می‌آید، می‌توان نوشت:

$$\Delta P = \Delta V \Delta I = \sigma E^2 \Delta L \Delta S = \sigma E^2 \Delta V = (\mathbf{J}^2 / \sigma) \Delta V$$

در اینجا چگالی توان تلف شده، یعنی توان تلف شده در واحد حجم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \sigma E^2 = \mathbf{J}^2 / \sigma$$

آنگاه توان تلف شده در ناحیه‌ای با حجم V از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV = \int_V (\mathbf{J}^2 / \sigma) dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (97-3)$$

باید توجه شود که در حالت کلی \mathbf{J} ، \mathbf{E} و σ ممکن است تابعی از مختصات فضایی باشند.

۱۳-۳ نیرو و گشتاور در سیستمهای الکتریکی ساکن

سیستمی مرکب از تعدادی از اجسام عایق و هادی را در نظر بگیرید که هر یک دارای مقدار معینی بار الکتریکی باشد. فرض کنید پس از تأثیرات متقابل میدانهای الکتریکی و اجسام بر یکدیگر بارهای الکتریکی توزیع نهایی خود را یافته باشند. بدیهی است که بر اساس قانون کولمب این بارهای الکتریکی و اجسام حاوی این بارها بر یکدیگر نیرو اعمال می‌کنند. مطالعه چنین نیروهایی با استفاده از قانون کولمب معمولاً کار آسانی نیست. در این قسمت روش انرژی را برای بررسی نیروهای الکتریکی می‌آموزیم.

برای روشن شدن مطلب مثال ساده یک خازن با صفحات موازی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید این خازن از دو صفحه موازی، هر یک به مساحت A ، که فضای بین آنها را عایقی با قابلیت گذردهی ϵ پر کرده است، تشکیل شده باشد. فاصله صفحات از یکدیگر x فرض می‌شود. بارهای $+Q$ و $-Q$ روی صفحات خازن گذاشته می‌شوند. طبعاً دو صفحه هادی یکدیگر را تحت تأثیر نیروی جاذبه قرار می‌دهند. در حقیقت اگر صفحات خازن مجاز به حرکت کردن بودند به یکدیگر می‌چسبیدند. اما چون سیستم ساکن فرض می‌شود حرکتی صورت نمی‌پذیرد. هدف ما محاسبه نیروی جاذبه مزبور می‌باشد. برای این منظور تصور کنید که یکی از صفحات به اندازه Δx از صفحه دیگر تغییر فاصله بدهد. کار لازم برای این جابه‌جایی مجازی برابر است با:

$$\Delta W = F_x \Delta x \quad (98-3)$$

که F_x همان نیروی مطلوب است. اگر این خازن با دنیای خارج از خودش ارتباطی نداشته باشد، انرژی مورد نیاز باید از خود سیستم تأمین شود. اما از طرف دیگر چون انرژی کل سیستم ثابت است (زیرا سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد)، پس:

$$\Delta W + \Delta W_e = 0 \quad (99-3)$$

که ΔW_e تغییر به وجود آمده در انرژی الکتریکی ذخیره شده در سیستم است اگر جابه‌جایی Δx به وقوع می‌پیوست. از روابط ۹۸-۳ و ۹۹-۳ و در حد وقتی که Δx به سمت صفر میل کند، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$F_x = -\frac{dW_e}{dx} \quad (100-3)$$

برای خازن با صفحات موازی، $W_e = Q^2 x / 2\epsilon A$ و بنابراین $F_x = -Q^2 / 2\epsilon A$ می‌باشد. در حالت کلی و برای یک سیستم دلخواه که حاوی بار معینی باشد، بردار نیروی F و جابه‌جایی ΔL را در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\Delta W_e = -F \cdot \Delta L \quad (101-3)$$

پس از به کار بستن تعریف گرادیان یک تابع نرده‌ای خواهیم داشت:

$$F = -\nabla W_e \quad | \quad Q = \text{ثابت} \quad (102-3)$$

در حالت دیگری فرض می‌کنیم سیستم با دنیای خارج ارتباط داشته باشد و اجسام هادی در این سیستم دارای پتانسیل ثابتی باشند. مثلاً می‌توان تصور کرد که صفحات خازن فوق به یک باتری با ولتاژ ثابت وصل باشند. در این حالت انرژی مورد نیاز برای جابه‌جایی Δx از منبع یا منابع خارجی تأمین شده و انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن تغییری به اندازه $\Delta W_e = \Delta W$ می‌نماید که ΔW از رابطه ۹۸-۳ به دست می‌آید. از این رو $F_x = \Delta W_e / \Delta x$ و در حد وقتی که Δx به سمت صفر میل می‌کند:

$$F_x = \frac{dW_e}{dx} \quad | \quad V = \text{ثابت} \quad (103-3)$$

انرژی ذخیره شده در خازن را می‌توان به صورت $W_e = \frac{1}{\gamma} \frac{V^2 \epsilon A}{x}$ نوشت، بنابراین:

$$F_x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{V^2 \epsilon A}{x} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{V^2 \epsilon A}{x^2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{Q^2}{\epsilon A}$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً محاسبه شده بود (از رابطه ظرفیت خازن با صفحات موازی، $C = \epsilon A / x$ در آخرین مرحله محاسبات فوق استفاده شده است). در حالت کلی و برای یک سیستم دلخواه که شامل اجسام هادی با پتانسیل ثابت است، داریم:

$$F = \nabla W_e \quad | \quad V = \text{ثابت} \quad (104-3)$$

اگر سیستم مورد مطالعه طوری طرح شده باشد که قابلیت چرخش حول محوری (مثلاً محور z) را داشته باشد، کار مورد نیاز برای جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\varphi$ برابر است با $\Delta W = T_z \Delta\varphi$ ، که T_z مؤلفه گشتاور در امتداد محور چرخش (z) است. اگر سیستم حاوی بار ثابتی باشد، به همان ترتیب که در مطالعه نیرو دیدیم:

$$T_z = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \right|_{Q = \text{ثابت}} \quad (3-105)$$

و چنانچه سیستم شامل هادی‌هایی با پتانسیل ثابت باشد:

$$T_z = \left. \frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \right|_{V = \text{ثابت}} \quad (3-106)$$

۱۴-۳ خلاصه فصل

در این فصل میدانهای ساکن در حضور اجسام را مطالعه کرده و تأثیرات ماده و میدان بر یکدیگر و نتایج حاصل را در مقیاس ماکروسکوپی بررسی نمودیم. به طور خلاصه:

- هدایت الکتریکی در اجسام را به اجمال بررسی کرده و آنها را به هادی، نیمه‌هادی و عایق دسته‌بندی نمودیم.
- اصل بقای بار الکتریکی را مطالعه نموده و آن را بر حسب چگالیهای جریان (\mathbf{J}) و بار (ρ) بیان داشتیم ($\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$).
- مقاومت الکتریکی را تعریف نموده و آن را با استفاده از میدان الکتریکی محاسبه کردیم. همچنین قانون اهم را در شکلهای انتگرالی ($V=IR$) و نقطه‌ای ($\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$) مطالعه نمودیم.
- میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی و شرایط مرزی را بررسی کرده و نتیجه گرفتیم که: الف) میدان الکتریکی در درون هادیها همواره صفر است، ب) میدان الکتریکی بر سطوح هادیها همواره عمود است، ج) بارهای الکتریکی فقط روی سطوح هادیها می‌توانند توزیع شوند.
- قطبی شدن عایقها، تحت تأثیر میدان الکتریکی، و پدید آمدن بارهای القایی مقید را مورد بررسی قرار دادیم.
- کمیت‌های برداری \mathbf{D} و \mathbf{P} ، که به ترتیب بردار پلاریزاسیون و بردار چگالی شار الکتریکی نام دارند، را تعریف کردیم. بردار \mathbf{P} میزان قطبی شدن جسم عایق را بیان می‌کند، در حالی که بردار \mathbf{D} به گونه‌ای تعریف می‌شود که دیورژانس آن مستقل از بارهای القایی مقید است ($\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$).
- برای اجسام عایق قابلیت گذردهی (ϵ) را تعریف نمودیم که در صورت همسانگرد بودن عایق ارتباط بین \mathbf{D} و \mathbf{E} را به شکل ساده $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ بیان می‌کند.
- شرایط مرزی بین دو جسم عایق را بررسی نمودیم. مؤلفه عمودی میدان \mathbf{D} و مؤلفه مماسی میدان \mathbf{E} در مرز بین دو عایق باید پیوسته باشند.
- ظرفیت بین دو جسم هادی را تعریف نموده و آن را با استفاده از میدان الکتریکی محاسبه کردیم.
- انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی را بررسی کرده و نیرو و گشتاور را به اختصار مورد مطالعه قرار دادیم.