۲-۸ خلاصه فصل

در این فصل میدانهای الکتریکی ساکن راکه از توزیعهای بار الکتریکی معلومی در خلأ ناشی می‌شوند مورد بحث و بررسی قرار دادیم. کلیه مطالعات این فصل بر اساس قانون تجربی کولمب استوار می‌باشند. به طور خلاصه :

- قانون کولمب را بیان نموده و سپس کمیت شدت میدان الکتریکی (E) حاصل از یک بار نقطه‌ای را تعریف نمودیم. این تعریف را به توزیعهای دیگر و از جمله چندین بار نقطه‌ای و توزیعهای پیوسته از نوع خطی، سطحی و حجمی گسترش دادیم. روابطی که میدان الکتریکی را بر حسب چگالی توزیع بار بیان می‌کنند به دست آوردیم.
- خطوط میدان و شیوه تعیین آنها را در دستگاههای مختصات مختلف بررسی نمودیم.
- قانون گوس را برای یک توزیع دلخواه بار الکتریکی مطالعه نموده و استفاده از آن را جهت محاسبه میدان الکتریکی ناشی از برخی توزیعهای بار که ویژگیهای لازم را دارا باشند مورد بحث قرار دادیم. همچنین شکل نقطه‌ای قانون گوس راکه به عنوان یکی از معادلات ماکسول شناخته می‌شود آموختیم ($\nabla.\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$).
- پتانسیل را تعریف نموده و نحوه محاسبه آن را برای توزیعهای مختلف بار الکتریکی ارائه نمودیم.
- نشان دادیم که میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار است و کرل آن همواره برابر صفر می‌باشد ($\nabla\times\mathbf{E}=0$).
- ارتباط میدان الکتریکی با پتانسیل را تحقیق کردیم و این نتیجه مهم را گرفتیم که :

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

۲-۹ مسائل خودآزمایی

محاسبه شدت میدان الکتریکی و پتانسیل ناشی از توزیعهای گوناگون بار الکتریکی هدف اصلی اغلب این مسائل می‌باشد. با توجه به مطالب آموخته شده در این فصل، محاسبه میدان الکتریکی ممکن است با استفاده از یکی از سه روش زیر انجام پذیرد :

الف) انتگرال‌گیری مستقیم با استفاده از روابط ۲-۹، ۲-۲۰، ۲-۳۱ و ۲-۳۸ به ترتیب برای توزیعهای بار نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی.

ب) استفاده از قانون گوس، رابطه ۲-۵۸.

ج) محاسبه پتانسیل با استفاده از روابط ۲-۹۰ تا ۲-۹۳ و سپس به دست آوردن گرادیان آن با استفاده از رابطه ۲-۱۰۸.

پرسشی که به ذهن می‌آید این است که کدام یک از روشهای مذکور را باید در بررسی مسئله خاص به کار برد. گرچه از دیدگاه اصولی استفاده از هر یک از روشهای مذکور بلامانع است، به ویژه اگر محاسبات عددی و روشهای نرم‌افزاری را نیز مد نظر داشته باشیم، لیکن سادگی محاسبه میدان الکتریکی، به

روشهای مختلف یکسان نبوده و در مواردی دارای تفاوتهای زیادی است. ساده‌ترین روش محاسبه میدان الکتریکی استفاده از قانون گوس است. ولی این روش محدود به آن دسته از توزیعهای بار الکتریکی است که از درجه تقارن بالایی برخوردار بوده و یا قابل تجزیه به چنین توزیعهایی باشند. توزیعهای بار الکتریکی که محاسبه میدان ناشی از آنها با استفاده از قانون گوس به سادگی انجام‌پذیر است به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

۱- در دستگاه مختصات مستطیلی اگر توزیع بار تابعی از فقط یک مختصه، مثلاً z باشد، میدان الکتریکی فقط دارای مؤلفه z بوده و این مؤلفه نیز فقط تابعی از z می‌باشد؛ یعنی $\mathbf{E}=\mathrm{E_z}(z)\,\hat{\mathbf{a}}_z$. سطح گوسی را به شکل مکعب مستطیلی با سطح قاعده واحد (۱×۱) و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. در این صورت $h=2z$ از $z-$ تا $z+$ برای توزیعهایی که تابع زوجی از z باشند و $h=z_1-z$ از z تا z_1 برای توزیعهایی که تابع فردی از z باشند. در اینجا $z_1>z_0$ که $z=z_0$ مرز فوقانی توزیع بار را مشخص می‌کند به طوری که برای $|z|>z_0$ توزیع بار صفر است. آنگاه می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{E}(z)=\begin{cases}\dfrac{Q}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}\hat{\mathbf{a}}_z & \text{برای توزیعهای زوج}\\[2ex] -\dfrac{Q}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{a}}_z & \text{برای توزیعهای فرد}\end{cases}$$

که Q بار محصور در سطح گوسی به شرح بالا می‌باشد. بدیهی است که توزیعهای بار مذکور فقط می‌توانند از نوع سطحی یا حجمی باشند؛ زیرا توزیعهای خطی و نقطه‌ای تقارن لازم را در دستگاه مختصات مستطیلی ایجاد نمی‌کنند. در صورتی که توزیع بار نه تابعی زوج و نه تابعی فرد از z باشد می‌توان آن را به‌صورت مجموعی از توابع زوج و فرد نوشت، به عنوان مثال چگالی توزیع زیر:

$$\rho_V(z)=\begin{cases}e^{-z} & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

را می‌توان به‌صورت $\rho_V(z)=\rho_{V_1}(z)+\rho_{V_2}(z)$ نوشت به طوری که:

$$\rho_{V_1}(z)=\frac{1}{2}e^{-|z|}\quad,\quad -\infty<z<\infty$$

$$\rho_{V_2}(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-z} & z>0\\[2ex] -\dfrac{1}{2}e^{z} & z<0\end{cases}$$

یک صفحه بینهایت بار با چگالی ثابت ρ_{S_0} را می‌توان به سهولت با استفاده از قانون گوس بررسی نمود. اگر صفحه بار بر $z=0$ منطبق باشد میدان الکتریکی حاصل، از رابطه ۲-۳۶ به دست می‌آید. اگر صفحه بینهایت بار دارای آرایش فضایی دلخواهی باشد، میدان الکتریکی ناشی از آن در نقطه A از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_{S_0}}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{a}}_n$$

که $\hat{a}_n$ بردار واحدی در امتداد عمود بر صفحه بار از نقطه A و در جهت دور شدن از صفحه بار می‌باشد. بدیهی است که برای چندین صفحه بینهایت بار با چگالیهای ثابت و آرایشهای فضایی دلخواه، میدان الکتریکی هر یک را جداگانه به دست آورده، سپس جمع برداری آنها را محاسبه می‌کنیم.

۲- در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر توزیع بار الکتریکی فقط تابعی از مختصه شعاعی r باشد. میدان الکتریکی حاصل فقط دارای مؤلفه r بوده که این مؤلفه نیز فقط تابعی از r می‌باشد؛ یعنی $E = E_r(r)\hat{a}_r$. سطح گوسی را به شکل استوانه‌ای به شعاع r، طول واحد و محوری منطبق بر محور z در نظر می‌گیریم. آنگاه می‌توان نشان داد:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$$

که Q بار محصور در سطح گوسی به شرح بالا می‌باشد. توزیعهایی که محاسبه میدان الکتریکی ناشی از آنها با استفاده از قانون گوس در دستگاه مختصات استوانه‌ای میسر است عبارتند از: خط بار بینهایت با چگالی توزیع ثابت، یک یا چندین سطح استوانه‌ای بینهایت طویل هم‌محور با توزیعهای سطحی یکنواخت و استوانه یا لایه‌های استوانه‌ای بینهایت طویل، که بار الکتریکی به طور حجمی با چگالی $\rho_V = \rho_V(r)$ در آنها توزیع شده باشد. ترکیبی از توزیعهای خطی، سطحی و حجمی را به شرطی که این توزیعها هم‌محور باشند، نیز می‌توان با استفاده از قانون گوس ساده‌تر از هر روش دیگر مطالعه نمود. ویژگی مشترک همه توزیعهای استوانه‌ای مذکور بینهایت بودن طول آنها از هر دو طرف در امتداد محور z می‌باشد.

یک خط بینهایت بار با چگالی ثابت ρ_{L_0} و منطبق بر محور z ساده‌ترین مثال برای کاربرد قانون گوس در دستگاه مختصات استوانه‌ای است. میدان حاصل از رابطه ۲-۴۲ به دست می‌آید. اگر خط بار در امتداد دلخواهی در فضا قرار داشته باشد میدان الکتریکی ناشی از آن در نقطه A از رابطه کلی زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0 d}\hat{a}_n$$

که d فاصله نقطه A از خط بار و $\hat{a}_n$ بردار واحدی است که در امتداد عمود بر خط بار از نقطه A و در جهت دور شدن از خط بار می‌باشد.

۳- در دستگاه مختصات کروی، اگر توزیع بار الکتریکی فقط تابعی از مختصه شعاعی r باشد میدان الکتریکی فقط دارای مؤلفه r بوده و این مؤلفه نیز فقط تابعی از r می‌باشد؛ یعنی $E = E_r(r)\hat{a}_r$. سطح گوسی را به شکل کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. آنگاه می‌توان نشان داد:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$$

که Q بار محصور در سطح گوسی کروی می‌باشد. توزیعهایی که محاسبه میدان الکتریکی ناشی از آنها با استفاده از قانون گوس در دستگاه مختصات کروی به سادگی انجام‌پذیر است عبارتند از: بار نقطه‌ای، یک

یا چندین سطح کروی هم‌مرکز با چگالیهای توزیع ثابت و کره یا لایه‌های کروی هم‌مرکز، که بار الکتریکی در آنها با چگالی حجمی $\rho_V = \rho_V(r)$ توزیع شده باشد. توزیع مرکّبی شامل یک بار نقطه‌ای، چندین سطح کروی با چگالیهای توزیع سطحی ثابت و هم‌مرکز با بار نقطه‌ای و چندین لایه کروی هم‌مرکز با بار نقطه‌ای و چگالیهای توزیع حجمی که حداکثر تابعی از r باشند را نیز می‌توان با به کار بردن قانون گوس مطالعه کرده و میدان الکتریکی ناشی از آنها را یکجا محاسبه کرد. بار نقطه‌ای ساده‌ترین مثال برای کاربرد قانون گوس در دستگاه مختصات کروی است.

یک ویژگی عمومی قانون گوس، صرف نظر از اینکه در چه دستگاه مختصاتی به کار رود، این است که میدان الکتریکی در کلیه نقاط فضا محاسبه می‌شود. نکته دیگر اینکه استفاده از قانون گوس برای محاسبه میدان الکتریکی محدود به توزیعهای بار الکتریکی است که حداکثر تابعی از یک مختصه بوده که در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی فقط می‌تواند شعاعی باشد.

در صورتی که توزیع بار فاقد تقارن لازم برای کاربرد قانون گوس باشد، محاسبه میدان باید از طریق انتگرال‌گیری مستقیم یا غیرمستقیم با محاسبه پتانسیل و سپس تعیین گرادیان آن انجام گیرد. از بحث قانون گوس در بالا می‌توان چنین نتیجه گرفت که محاسبه میدان الکتریکی ناشی از هر گونه توزیع بار با ابعاد محدود و فاقد تقارن کروی را نمی‌توان به سادگی با استفاده از قانون مزبور انجام داد، زیرا این گونه توزیعها الزاماً تابعی از دو یا سه مختصه خواهند بود. موارد متعدد دیگری را می‌توان برشمرد که کاربرد قانون گوس برای آنها میسر نیست. به عنوان مثال، یک خط بینهایت بار که چگالی توزیع آن تابعی از z باشد، یک استوانه بینهایت که بار توزیع شده روی آن تابعی از z، φ یا هر دو باشد، باری که فقط روی بخشی از یک سطح کروی توزیع شده باشد، و باری که در درون یک نیم‌کره توزیع شده باشد نمونه‌هایی هستند که محاسبه میدان الکتریکی آنها با استفاده از قانون گوس به روش تحلیلی امکان‌پذیر نیست. در کلیه موارد بالا استفاده از روشهای مبتنی بر انتگرال‌گیری اجتناب‌ناپذیر است.

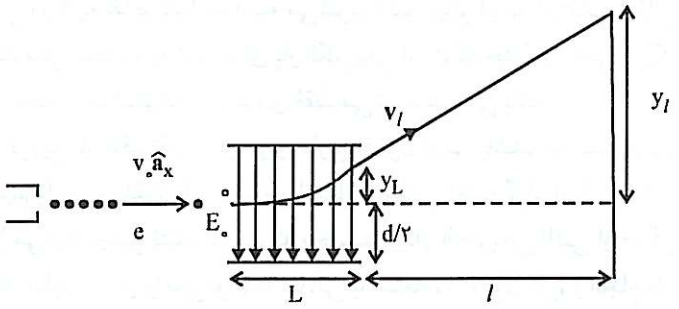
در استفاده از روش مبتنی بر محاسبه پتانسیل باید دقت شود که پتانسیل به‌صورت یک تابع به دست آید تا تعیین گرادیان آن امکان‌پذیر باشد. به عنوان مثال اگر میدان الکتریکی ناشی از توزیع باری در نقطه خاصی از فضا مورد نظر باشد، کافی نیست که پتانسیل فقط در آن نقطه محاسبه شود، چه در آن صورت مشتق آن صفر و نتیجه به دست آمده برای میدان الکتریکی نیز صفر خواهد بود. کاربرد مؤثر این روش در حقیقت بیشتر مربوط به مسائلی است که در آنها پتانسیل از طریق حل معادله لاپلاس محاسبه می‌شود و بررسی آن در فصل ۴ خواهد آمد. چنانچه هدف اصلی محاسبه پتانسیل باشد، دو روش را می‌توان در نظر گرفت. روش اول تعیین میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس و سپس استفاده از رابطه ۲-۸۶؛ روش دوم به کار بردن روابط ۲-۸۹ تا ۲-۹۳ که همان روش انتگرال‌گیری است. توزیعهای باری که نتوان میدان الکتریکی ناشی از آنها را با استفاده از قانون گوس محاسبه کرد باید از طریق انتگرال‌گیری مورد بررسی قرار گیرند.

۱. اصول کار یک اسیلوسکوپ (نوسان نما) با انحراف میدان الکتریکی ساکن در شکل ۲-۲۷ نشان داده شده است. الکترونها پس از خارج شدن از تفنگ الکترونی با سرعت ثابت $\mathbf{v}=v_0\,\hat{\mathbf{a}}_x$ وارد ناحیه بین

صفحات انحراف دهنده می‌شوند. برای سادگی، مطالعه خود را به حرکت یک الکترون با بار e و جرم m محدود می‌نماییم. اِعمال ولتاژ V_0 به صفحات انحراف دهنده تولید میدان الکتریکی $\mathbf{E}=E_0\,\hat{a}_y$ می‌کند که $E_0=V_0/d$ است.

الف) نشان دهید که مسیر حرکت الکترون در بین صفحات انحراف دهنده یک سهمی است و از آنجا فاصله y_L و نیز سرعت الکترون در لحظه خروج از بین دو صفحه، یعنی v_l، را محاسبه کنید.

ب) انحراف الکترون از محور لامپ اسیلوسکوپ یا به عبارت دیگر فاصله y_l را به دست آورید و ملاحظه کنید که این انحراف متناسب با ولتاژ اِعمال شده یعنی V_0 است.



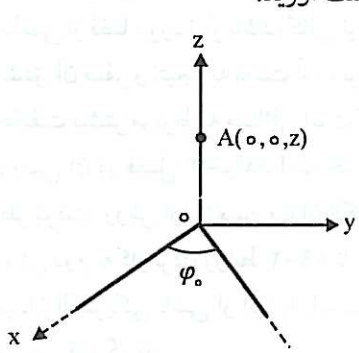
شکل ۲-۲۷

۲. بار الکتریکی $Q+$ در نقطه $(-a,0,0)$ و بار $-2Q$ در نقطه $(a,0,0)$ قرار دارد. نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که در آن شدت میدان الکتریکی حاصل از دوبار فوق صفر باشد.

۳. چهار بار نقطه‌ای مساوی و هر یک به اندازه Q در چهار رأس یک مربع به ضلع a قرار دارند. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در نقطه‌ای روی محور این مربع محاسبه نمایید. محور مربع را منطبق بر محور z فرض کنید.

۴. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{L_0} روی نیمه مثبت محور z $(z>0)$ توزیع شده است. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در نقطه $A(r,\varphi,0)$ روی صفحه xy به دست آورید.

۵. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{L_0} در امتداد دو نیم‌خط که زاویه بین آنها φ_0 است توزیع شده است. دو نیم‌خط بار را، مطابق شکل ۲-۲۸، در صفحه xy و یکی را منطبق بر محور x فرض می‌کنیم.



شکل ۲-۲۸

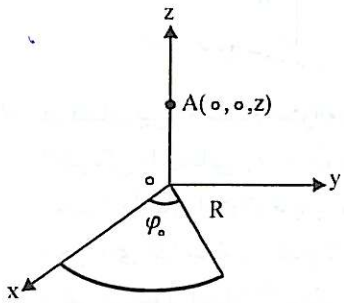
الف) میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در نقطه $A(0,0,z)$ روی محور z محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که نتیجه به دست آمده به ازای $\varphi_0=\pi$ به میدان الکتریکی ناشی از یک خط بینهایت بار، ساده می‌گردد.

۶. بار الکتریکی با توزیع غیر یکنواخت بر روی پاره‌خطی در امتداد محور z قرار دارد. مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی در نقطه $A(r,\varphi,z)$ برای چگالیهای توزیع زیر:

الف) $\rho_L = \begin{cases} |z| & |z|<a \\ 0 & |z|>a \end{cases}$ ب) $\rho_L = \begin{cases} z & |z|<a \\ 0 & |z|>a \end{cases}$

۷. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{L_0} در امتداد قوسی از یک دایره به شعاع R و محدود به $0<\varphi<\varphi_0$، مطابق شکل ۲-۲۹، توزیع شده است. میدان الکتریکی E را در نقطه‌ای روی محور z محاسبه نمایید. توجه کنید که نتیجه به ازای $\varphi_0 = 2\pi$ به رابطه ۲-۲۸ ساده می‌شود.



شکل ۲-۲۹

۸. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{S_0} روی یک سطح استوانه‌ای که محور آن بر محور z منطبق و شعاعش برابر a است و از $z=-h$ تا $z=+h$ امتداد دارد توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور z به دست آورید.

۹. مسئله ۸ را برای حالتی که توزیع بار روی بخشی از سطح استوانه‌ای محدود به $0<\varphi<\varphi_0$ باشد تکرار نمایید.

۱۰. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{S_0} روی $\frac{1}{8}$ سطح کره‌ای به شعاع a، که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود، توزیع شده است. فرض کنید توزیع بار در ناحیه‌ای از فضا باشد که $x>0$، $y>0$ و $z>0$ است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات، $E(0,0,0)$، به دست آورید.

۱۱. با استفاده از میدان الکتریکی یک صفحه بینهایت بار با توزیع یکنواخت، مندرج در رابطه ۲-۳۶، میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای بار زیر را به دست آورید:

الف) $\rho_S = \begin{cases} \rho_{S_0} & z=a \\ -\rho_{S_0} & z=-a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$ ب) $\rho_V = \begin{cases} a-|z| & |z|<a \\ 0 & |z|>a \end{cases}$

۱۲. میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای مسئله ۱۱ را با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس به دست آورید.

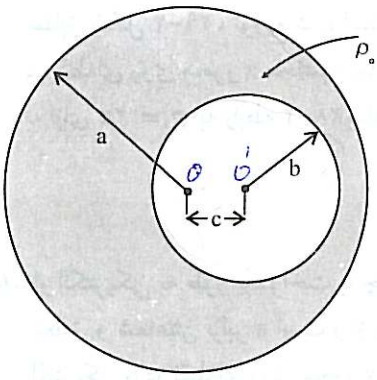
۱۳. با استفاده از قانون گوس، میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای بار الکتریکی زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، را به دست آورید:

الف) $\rho_S = \begin{cases} \rho_{S_0} & r=a \\ -\frac{a}{b}\rho_{S_0} & r=b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$ ب) $\rho_V = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{a} & r<a \\ 0 & r>a \end{cases}$

۱۴. مسئله ۱۳ را برای توزیعهای بار الکتریکی زیر، که در دستگاه مختصات کروی بیان شده‌اند، تکرار نمایید:

الف) $\rho_S = \begin{cases} \rho_{S_0} & r=a \\ -\frac{a^2}{b^2}\rho_{S_0} & r=b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$ ب) $\rho_V = \begin{cases} \rho_0 (1-r^2/a^2) & r<a \\ 0 & r>a \end{cases}$

۱۵. در فضای بین دو سطح استوانه‌ای به طول بینهایت، بار الکتریکی با چگالی ρ_0 به طور یکنواخت توزیع شده است. شعاعهای استوانه‌ها برابر a و b بوده و فاصله بین محورهای آنها مساوی مقدار ثابت c است که $c<a-b$ فرض می‌شود. میدان الکتریکی را در درون استوانه به شعاع b محاسبه نمایید. شکل ۲-۳۰ سطح مقطع توزیع بار را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳۰

راهنمایی: با استفاده از قانون گوس ابتدا میدان الکتریکی حاصل از یک استوانه بینهایت طویل بار با چگالی توزیع $\rho_V = \rho_0$ را به دست آورید و سپس از اصل جمع آثار استفاده نمایید.

۱۶. چگالی توزیع بار الکتریکی را در تمام نقاط فضا برای میدانهای الکتریکی زیر به دست آورید:

الف) در دستگاه مختصات کروی:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{a}}_r & a<r<b \\ \mathbf{0} & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\mathbf{E} = \frac{1-e^{-r}}{4\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{a}}_r$$

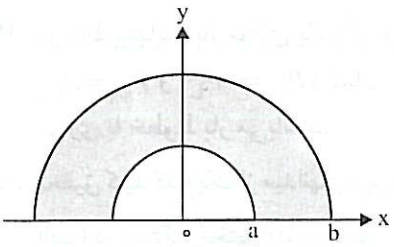
ج) در دستگاه مختصات مستطیلی:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{a}}_z & z>a \\ -\frac{\rho_{S_0}}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{a}}_z & 0<z<a \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{a}}_z & z<0 \end{cases}$$

۱۷. یک عرقچین کروی به شعاع R و زاویه $2\theta_0$ دارای بار الکتریکی با چگالی ρ_{S_0} و توزیع سطحی یکنواخت است. نشان دهید که پتانسیل در نقطه‌ای روی محور عرقچین و به فاصله r از مرکز آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V(r) = \frac{\rho_{S_0} R}{2\varepsilon_0 r}\left[(r^2+R^2-2rR\cos\theta_0)^{1/2} - |r-R|\right]$$

۱۸. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{S_0} روی سطحی محصور بین دو نیم‌دایره به شعاعهای a و b، مطابق شکل ۲-۳۱، توزیع شده است. پتانسیل را در مبدأ مختصات به‌دست آورید. توزیع بار در صفحه xy فرض می‌شود.



شکل ۲-۳۱

۱۹. برای توزیع بار الکتریکی مسئله ۱۰، پتانسیل را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.

۲۰. بار الکتریکی با چگالی ρ_0 به طور یکنواخت در کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه پتانسیل حاصل از این توزیع بار در تمام نقاط فضا به دو روش زیر:

الف) محاسبه میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ (مثلاً با استفاده از قانون گوس) و به کار بردن رابطه ۲-۸۶،

ب) مستقیماً با استفاده از رابطه ۲-۹۳.

۲۱. پتانسیل ناشی از توزیعهای بار الکتریکی در مسائل ۱۱، ۱۳ و ۱۴ را به دست آورید. اگر بینهایت را نتوان به عنوان نقطه مبنا در نظر گرفت، نقطه مبنای مناسبی را خود انتخاب کنید (پتانسیل نقطه مبنا صفر فرض می‌شود).

راهنمایی: چون میدان الکتریکی برای این توزیعها قبلاً محاسبه شده است، از رابطه ۲-۸۶ برای تعیین پتانسیل استفاده کنید.

۲۲. توزیع بار الکتریکی را در شکل ۲-۲۹ مجدداً در نظر بگیرید.

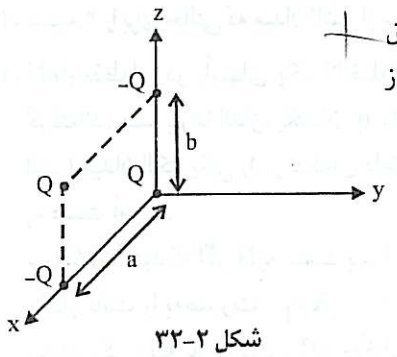
الف) پتانسیل را در نقطه‌ای روی محور z برای توزیع مذکور به دست آورید.

ب) پتانسیل را برای حالت $\varphi_0 = 2\pi$ تعیین کنید و سپس با استفاده از رابطه $\mathbf{E} = -\nabla V$ میدان الکتریکی را محاسبه کنید. نتیجه باید همانند رابطه ۲-۲۸ باشد.

ج) میدان الکتریکی را برای حالت کلی، یعنی وقتی که φ_0 مقدار دلخواهی دارد، مجدداً از رابطه $\mathbf{E} = -\nabla V$ به دست آورید. ملاحظه می‌کنید که مقدار حاصل با مقداری که در مسئله ۷ به دست آمده است یکسان نیست. علت تناقض چیست و چگونه می‌توان آن را برطرف کرد؟

۲۳. برای چهارقطبی نشان داده شده در شکل ۲-۳۲ تحقیق کنید که تابع پتانسیل در نقاط دور ($r>>a$ و $r>>b$) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{3abQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$$



شکل ۲-۳۲

۲۴. دو خط بینهایت بار موازی یکدیگر بوده و دارای چگالیهای توزیع مساوی و ناهمنام هستند (یعنی $\rho_{L_1} = \rho_{L_0}$ و $\rho_{L_2} = -\rho_{L_0}$). نشان دهید که سطوح هم‌پتانسیل به‌صورت سطوح استوانه‌ای شکل موازی با خطوط بار می‌باشند.

۲۵. تحقیق کنید کدام‌یک از میدانهای زیر شرایط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا می‌باشد :

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی : $\mathbf{A} = \frac{1}{y}\hat{a}_x - \frac{x}{y^2}\hat{a}_y$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $\mathbf{B} = \frac{1}{r}\hat{a}_\varphi$

ج) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $\mathbf{C} = \frac{1}{r^2}(\cos\varphi\,\hat{a}_r + \sin\varphi\,\hat{a}_\varphi)$

د) در دستگاه مختصات کروی : $\mathbf{D} = \left(3 + \frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_r - \left(3 - \frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta$

۲۶. توزیع بار الکتریکی (ρ_V) راکه منجر به تولید هر یک از پتانسیلهای الکتریکی زیر گردیده است به دست آورید :

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی : $V = V_0\, e^{-y} \sin y \sinh x$

ب) در دستگاه مختصات کروی : $V = V_0 \frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2}$

۲-۱۰ مسائل

۱. دو بار نقطه‌ای $Q_1 = 2\mu C$ و $Q_2 = 5\mu C$ به ترتیب در نقاط $A(1,6,-4)$ و $B(4,3,0)$ قرار دارند. فضای اطراف بارها خلأ بوده و مختصات نقاط A و B بر حسب متر بیان شده‌اند. شدت میدان الکتریکی را در نقطه $M(3,5,-2)$ به دست آورید.

۲. بار نقطه‌ای $Q_1 = q$ در نقطه $A(-1,2,3)$ و دو بار نقطه‌ای Q_2 و Q_3 به ترتیب در نقاط $B(3,7,-2)$ و $C(2,3,-1)$ قرار دارند. فضای اطراف بارها خلأ می‌باشد. بارهای Q_2 و Q_3 را بر حسب q به گونه‌ای که میدان الکتریکی ناشی از این سه بار در نقطه $M(1,1,1)$ فقط دارای مؤلفه x باشد به دست آورید.

۳. مسئله ۲ را برای حالتی که میدان ناشی از سه بار نقطه‌ای در نقطه M فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ باشد تکرار نمایید.

۴. N بار نقطه‌ای در رأسهای یک N ضلعی منظم که شعاع دایره محیطی آن برابر R می‌باشد قرار گرفته‌اند. همه بارها اندازه یکسان q داشته و فضای اطراف آنها خلأ می‌باشد.

الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای دلخواه روی محور N ضلعی که بر محور z منطبق فرض می‌شود به دست آورید.

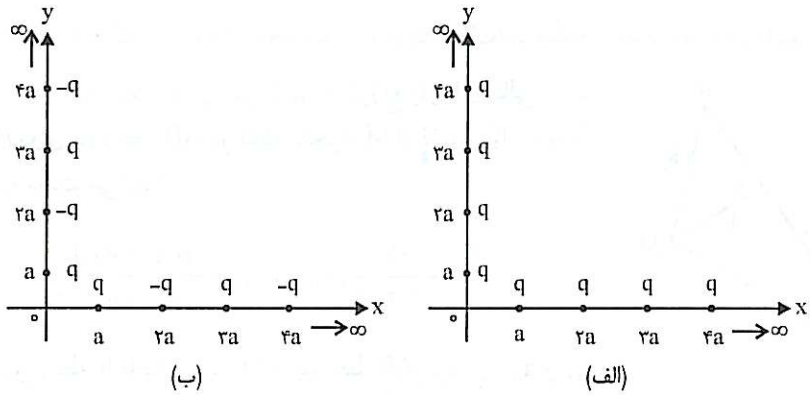
ب) نشان دهید که اگر N به سمت بینهایت میل کند و همزمان مقدار کل بار N ضلعی ثابت بماند (این مقدار ثابت را به‌صورت $Nq = 2\pi R\rho_L$ در نظر بگیرید)، میدان به دست آمده در بند (الف) به میدان یک حلقه بار به شعاع R و چگالی خطی ρ_L که در رابطه ۲-۲۸ داده شده است ساده می‌شود.

۵. دو بار نقطه‌ای همنام Q_1 و Q_2 به ترتیب در نقاط $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ در فضای آزاد قرار دارند. اندازه و مکان بار نقطه‌ای Q_3 را به گونه‌ای که نیروی وارد بر هر یک از سه بار نقطه‌ای توسط دو بار دیگر برابر صفر باشد، تعیین کنید.

۶. شدت میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات ناشی از بینهایت بار نقطه‌ای که به شرح زیر در فضای آزاد توزیع شده‌اند محاسبه کنید:

الف) همه بارها اندازه یکسان q داشته و روی محورهای x و y مطابق شکل ۲-۳۳-الف توزیع شده‌اند. فاصله بار nام روی هر یک از محورها از مبدأ مختصات برابر na می‌باشد.

ب) بارهای نقطه‌ای متناوباً اندازه‌های q و q- داشته و توزیع آنها روی محورهای x و y همانگونه که در شکل ۲-۳۳-ب نشان داده شده است، همانند بند (الف) می‌باشد.



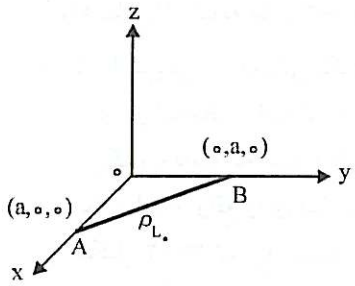
شکل ۲-۳۳

۷. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_{L_0} روی پاره خط AB واقع در صفحه xy مطابق شکل ۲-۳۴ توزیع شده است.

الف) شدت میدان الکتریکی را در نقطه دلخواه $M(0,0,z)$ روی محور z محاسبه کنید.

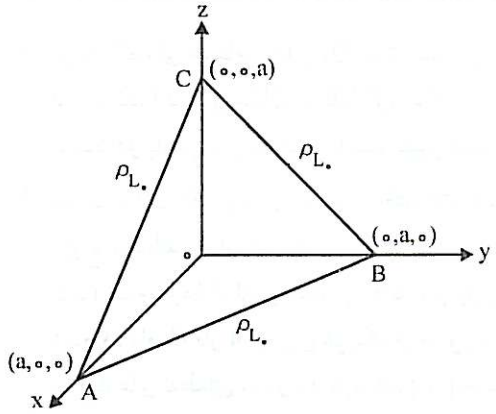
ب) نشان دهید که بردار میدان محاسبه شده در بند (الف) بر پاره خط AB عمود می‌باشد.

ج) میدان را در مبدأ مختصات محاسبه کرده و نشان دهید که نتیجه به دست آمده با رابطه ۲-۲۵ تطبیق می‌کند.



شکل ۲-۳۴

۸. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{L_0} روی اضلاع مثلث ABC که در شکل ۲-۳۵ نشان داده شده توزیع گردیده است. فضای حاوی بار الکتریکی خلأ می‌باشد.



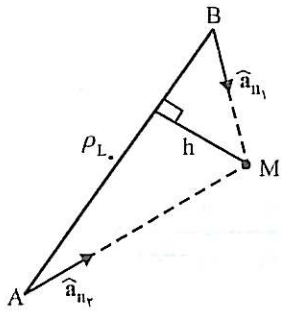
شکل ۲-۳۵

الف) میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.

راهنمایی: از نتیجه بند (ج) در مسئله ۷ استفاده کرده و تبدیلهای $x \to y$، $y \to z$ و $z \to x$ را به کار گیرد.

ب) نشان دهید که بردار میدان محاسبه شده در بند (الف) بر صفحه مثلث عمود می‌باشد.

۹. نشان دهید که میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار با چگالی ثابت ρ_{L_0} روی پاره خط AB در نقطه دلخواه M از فضای آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:



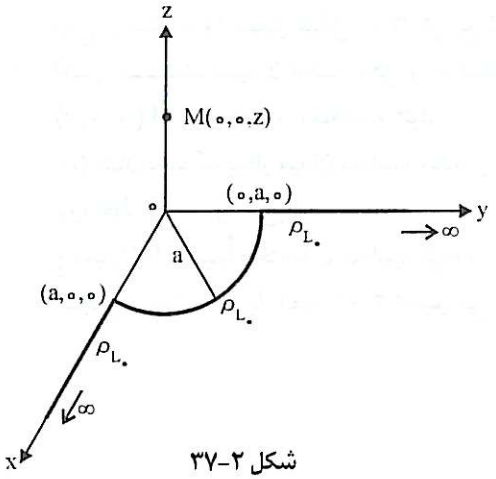
شکل ۲-۳۶

$$E = -\frac{\rho_{L_0}}{4\pi\varepsilon_0 h}(\hat{a}_{n_1} - \hat{a}_{n_2}) \times \frac{(\hat{a}_{n_1} \times \hat{a}_{n_2})}{|\hat{a}_{n_1} \times \hat{a}_{n_2}|}$$

در این رابطه h فاصله نقطه M از پاره‌خط AB بوده و $\hat{a}_{n_1}$ و $\hat{a}_{n_2}$ بردارهای واحدی به ترتیب در امتداد BM و AM مطابق شکل ۲-۳۶ می‌باشند.

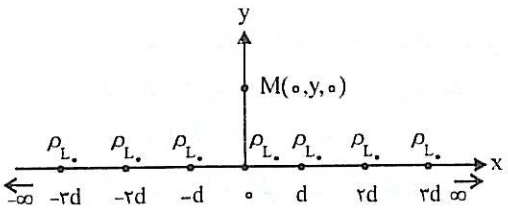
راهنمایی: از نتیجه مثال ۲-۱ و رابطه ۲-۲۳ استفاده کنید.

۱۰. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_{L_0} روی دو نیم‌خط در امتداد محورهای x و y و یک ربع‌دایره به شعاع a، مرکز مبدأ مختصات و واقع روی صفحه xy مطابق شکل ۲-۳۷ توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در یک نقطه روی محور z محاسبه کنید.



شکل ۲-۳۷

۱۱. تعداد بینهایت خط بار موازی و چگالی توزیع یکسان ρ_{L_0} مطابق شکل ۲-۳۸ در نظر بگیرید. خطوط بار موازی محور z و روی صفحه y=۰ قرار گرفته و فاصله خط بار nام از محور z در هر طرف صفحه x=۰ برابر nd می‌باشد.

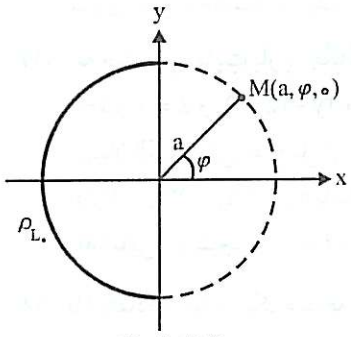


شکل ۲-۳۸

الف) میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در یک نقطه دلخواه روی محور y (مثل نقطه M) به دست آورید.

ب) نشان دهید که اگر d و ρ_{L_0} بسیار کوچک شده به طوری که نسبت ρ_{L_0}/d همواره ثابت بماند (این مقدار ثابت را ρ_{S_0} فرض کنید)، میدان مزبور به سمت میدان الکتریکی یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع یکنواخت میل خواهد نمود.

۱۲. بار الکتریکی با چگالی ثابت ρ_{L_0} روی نیم‌دایره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات مطابق شکل ۲-۳۹ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه (M) روی نیم‌دایره مکمل که به‌صورت خط‌چین نشان داده شده است، محاسبه کنید. نیم‌دایره بار و نیم‌دایره خط‌چین، تشکیل یک دایره کامل روی صفحه xy به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a می‌دهند.



شکل ۲-۳۹

۱۳. بار الکتریکی با چگالی غیر یکنواخت $\rho_L = \rho_{L_0}\cos^m(n\varphi)$ روی دایره‌ای به شعاع a، به مرکز مبدأ مختصات و واقع روی صفحه xy توزیع شده است. m و n در تابع چگالی توزیع بار اعدادی صحیح می‌باشند (m,n= ۰,۱,۲,۳,...). میدان الکتریکی را در نقطه دلخواه M(۰,۰,z) روی محور z در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطه M فاقد مؤلفه y می‌باشد. این نتیجه را ناشی از چه خاصیت تابع توزیع بار می‌دانید؟

ب) به ازای چه مقادیری از m و n میدان الکتریکی در نقطه M فقط (i) دارای مؤلفه x، (ii) دارای مؤلفه z، یا (iii) برابر صفر می‌باشد؟

۱۴. یک صفحه بار بینهایت با چگالی توزیع ثابت ρ_{S_0} منطبق بر سطح ax+by+cz=d در نظر بگیرید. نشان دهید که شدت میدان الکتریکی ناشی از این صفحه بار در نقطه دلخواه $M(x_0,y_0,z_0)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{\rho_{S_0}}{2\varepsilon_0}\,\frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{|ax_0+by_0+cz_0-d|}\,\frac{a\,\hat{a}_x+b\,\hat{a}_y+c\,\hat{a}_z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

توجه کنید که اندازه $\mathbf{E}$ در کلیه نقاط فضا برابر است با $|\mathbf{E}| = \rho_{S_0}/2\varepsilon_0$. به عنوان مثال، شدت میدان الکتریکی یک صفحه بینهایت بار منطبق بر سطح $6x-3y-2z=1$ را در نقطه $M(1,2,-1)$ محاسبه کنید.

۱۵. بار الکتریکی با چگالی غیریکنواخت سطحی $\rho_S = \rho_{S_0} r\cos\varphi$ روی یک دیسک که با روابط $r \le a$ و $z=0$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌شود توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه $M(0,0,z)$ روی محور دیسک به دست آورید.

۱۶. بار الکتریکی با چگالی $\rho_S = \rho_{S_0} \cos\theta \sin\varphi$ روی بخشی از سطح یک کره به شعاع a که با روابط $r=a$، $0 \le \theta \le \theta_0$ و $0 \le \varphi \le \varphi_0$ در دستگاه مختصات کروی بیان می‌شود توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات محاسبه کنید. نتیجه به دست آمده را برای (i) سطح کروی در $\frac{1}{8}$ اول فضا $(x>0, y>0, z>0)$، (ii) یک نیم‌کره بالای صفحه $z=0$ و (iii) یک سطح کروی کامل محاسبه نمایید.

۱۷. سه صفحه بینهایت بار با چگالیهای توزیع یکنواخت ρ_{S_1}، ρ_{S_2} و ρ_{S_3} به ترتیب منطبق بر صفحات $x=0$، $z=0$ و $4y-3z=2$ مفروضند. مقادیر ρ_{S_1}، ρ_{S_2} و ρ_{S_3} را به گونه‌ای محاسبه کنید که میدان الکتریکی حاصل از این سه صفحه بینهایت بار، در نقطه $M(2,1,5)$ برابر با $\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z \ \ V/m$ باشد.

راهنمایی: از نتیجه مسئله ۱۴ استفاده کنید.

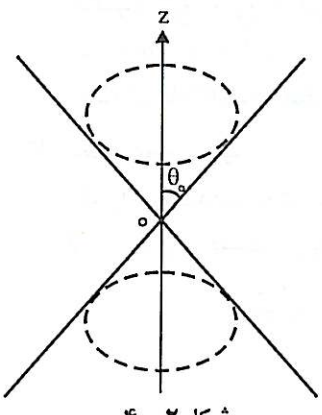
۱۸. با استفاده از میدان یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت و اصل جمع آثار، میدان‌الکتریکی ناشی از توزیعهای زیر را در یک نقطه دلخواه از فضا به دست آورید.

الف)
$$\rho_V = \begin{cases} \rho_0 \sin\left(\frac{\pi}{2d}|z|\right) & |z|<d \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ب)
$$\rho_V = \begin{cases} \rho_0 e^{-z/d_0} & z>0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ج)
$$\rho_V = \rho_0 e^{-|z|/d_0}$$

پارامترهای d و d_0 مقادیر ثابت و مثبت می‌باشند.



شکل ۲-۴۰

۱۹. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_{S_0} روی دو بخش یک سطح مخروطی بینهایت، که با معادلات $\theta=\theta_0$ و $\theta=\pi-\theta_0$ مطابق شکل ۲-۴۰ بیان می‌شوند، توزیع شده است.
الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطه‌ای دلخواه روی محور z همواره مقدار ثابت دارد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{E} = \frac{z}{|z|}\frac{\rho_{S_0}\sin\theta_0}{\varepsilon_0}\left[1+\cos\theta_0 \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\hat{a}_z$$

ب) نتیجه مزبور را به ازای $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ محاسبه نموده و آن را با میدان یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ρ_{S_0} مقایسه کنید.

۲۰. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی $\rho_V = \rho_0$ در ناحیه‌ای از فضا که با روابط $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$ مشخص شده، توزیع گردیده است. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه روی محور z به دست آورید. نتیجه را برای وقتی که a=b باشد، خلاصه نمایید.

۲۱. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی $\rho_V = \rho_0$ در یک لایه استوانه‌ای بینهایت طویل، که با روابط $0 \le \varphi \le \varphi_0$ و $a \le r \le b$ بیان شده، توزیع گردیده است. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه روی محور z به دست آورید. نتیجه را برای وقتی که $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ یا π باشد، خلاصه نمایید.

۲۲. بار الکتریکی با چگالی $\rho_V = \rho_0 / r^2$ در درون یک لایه کروی، که با روابط $a \le r \le b$، $0 \le \theta \le \theta_0$ و $0 \le \varphi \le \varphi_0$ بیان گردیده، توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات محاسبه کنید. نتیجه را برای وقتی که $\theta_0 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ باشد، خلاصه نمایید.

۲۳. با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای زیر را به دست آورید:

الف) $\rho_V = \rho_0 \frac{1}{z^2+1}$ در تمام فضا. ب) $\rho_V = \begin{cases} \rho_0 \left(1+\frac{z}{d}\right) & -d \le z \le d \\ 0 & |z| > d \end{cases}$

۲۴. برای توزیع بار بند (ب) مسئله ۱۸، میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گوس به دست آورید. راهنمایی: چگالی توزیع بار را به‌صورت حاصل‌جمع دو تابع، یکی زوج و دیگری فرد، بیان کنید و از اصل جمع آثار استفاده نمایید.

۲۵. با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای زیر را که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند به دست آورید.

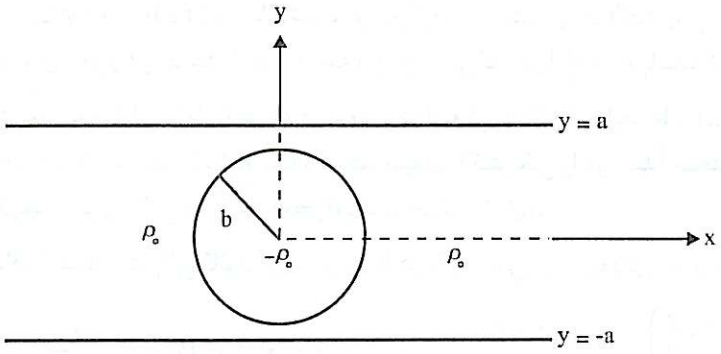
الف) $\rho_V = \rho_0 e^{-r^2/r_0^2}$ در تمام فضا. ب) $\rho_V = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{r} \sin(\pi r/a) & r < a \\ \rho_{S_0} \delta(r-b) & r = b > a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

توجه کنید که توزیع بار در بند (ب) شامل یک توزیع حجمی محدود به ناحیه r<a و یک توزیع سطحی روی استوانه r=b می‌باشد.

۲۶. بار الکتریکی با چگالی $\rho_V = \frac{\rho_0 a}{r} e^{-r^2/a^2}$ در فضا توزیع شده است. در این تابع توزیع بار، r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی می‌باشد. میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را به دست آورید. میدان الکتریکی در همسایگی مبدأ مختصات چیست؟

۲۷. بار الکتریکی با چگالی ثابت $\rho_V = \rho_0$ در ناحیه $-a < y < a$ از فضا، به‌جز در درون استوانه $r=b$، $(b<a)$، که چگالی توزیع بار، در آن برابر با $\rho_V = -\rho_0$ می‌باشد توزیع شده است. شکل ۲-۴۱ سطح مقطع این مجموعه بار الکتریکی را نشان می‌دهد. محور استوانه منطبق بر محور z فرض می‌شود. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه در درون استوانه به دست آورید. جواب را برحسب مختصات و مؤلفه‌های واحد در دستگاه مختصات مستطیلی بیان کنید.

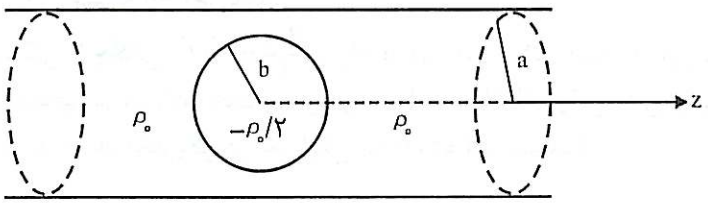
راهنمایی: در این مسئله و نیز مسائل ۲۸ تا ۳۰ از اصل جمع آثار و قانون گوس استفاده کنید.



شکل ۲-۴۱

۲۸. بار الکتریکی با چگالی ثابت $\rho_V = \rho_0$ در ناحیه $-a < z < a$ از فضا، به‌جز در درون کره $r=b$، $(b<a)$، که چگالی توزیع بار در آن برابر با $\rho_V = -2\rho_0$ می‌باشد، توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه در درون کره، به دست آورید. جواب را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

۲۹. بار الکتریکی با چگالی ثابت $\rho_V = \rho_0$ در ناحیه استوانه‌ای $r_c < a$ از فضا، به‌جز در درون کره $r_s = b$، $(b<a)$، که چگالی توزیع بار در آن برابر با $\rho_V = -\rho_0 / 2$ می‌باشد، توزیع شده است، محور استوانه منطبق بر محور z و مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. در اینجا برای رفع ابهام، مختصه شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای با r_c و در دستگاه مختصات کروی با r_s نشان داده شده است. میدان الکتریکی در یک نقطه دلخواه در درون کره را به دست آورید. جواب را در دستگاه مختصات مستطیلی بیان کنید. شکل ۲-۴۲ این توزیع بار را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴۲

۳۰. یک توزیع بار الکتریکی شامل دو بخش به شرح زیر می‌باشد: یک بار کروی با چگالی ρ_{V_1} و یک بار استوانه‌ای با چگالی ρ_{V_2}، به طوری که

$$\rho_{V_1}=\begin{cases}\rho_0\dfrac{a}{r_s} & r_s<a\\ 0 & r_s>a\end{cases}\qquad \rho_{V_2}=\begin{cases}-\rho_0 & 2a<r_c<3a\\ 0 & r_c<2a, r_c>3a\end{cases}$$

در عبارات توزیع مزبور، r_s و r_c به ترتیب بیانگر مختصه شعاعی در دستگاههای مختصات کروی و استوانه‌ای می‌باشند. در ضمن، مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات و محور استوانه منطبق بر محور z فرض می‌شود. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه واقع در صفحه xy، به دست آورید. در چه نقاطی میدان برابر صفر می‌باشد؟

۳۱. چگالی توزیع بار الکتریکی را در تمام نقاط فضا برای میدان الکتریکی زیر محاسبه کنید:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}4\hat{a}_z & z>2\\ 0 & 1<z<2\\ \left[\dfrac{5}{\pi}\tan^{-1}(z)-2\right]\hat{a}_z & -1<z<1\\ -4\hat{a}_z & z<-1\end{cases}$$

۳۲. مسئله ۳۱ را برای میدانهای الکتریکی زیر تکرار کنید.

الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{r}[1-\cos(\pi r)]\hat{a}_r & r<1\\ \dfrac{2}{r}\hat{a}_r & 1<r<3\\ 0 & r>3\end{cases}$$

ب) در دستگاه مختصات کروی:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}r^3\hat{a}_r & r<1\\ \dfrac{1}{r^2}\hat{a}_r & 1<r<2\\ 0 & r>2\end{cases}$$

۳۳. برای توزیع بار الکتریکی مسئله ۱۶، پتانسیل را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.

۳۴. میدان الکتریکی $\mathbf{E}=xy^2\hat{a}_x+yx^2\hat{a}_y$ مفروض است. اختلاف پتانسیل بین نقاط $A(1,5,-2)$ و $B(3,-4,7)$، یعنی V_{AB} را محاسبه کنید.

۳۵. بار الکتریکی با چگالی $\rho_V=\rho_0 e^{-r/a}$ در درون کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. پتانسیل ناشی از این توزیع بار را در یک نقطه دلخواه از فضا، به روش انتگرال‌گیری مستقیم (رابطه ۲-۹۳)، به دست آورید.

۳۶. بار الکتریکی با چگالی $\rho_V=\rho_0\cos\theta$ در درون کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. این توزیع بار را می‌توان به‌منزله یک دو قطبی با توزیع پیوسته تلقی کرد. پتانسیل را در نقاط دور از کره $(r>>a)$ به دست آورید. نتیجه به‌دست آمده را با پتانسیل یک دو قطبی متشکل از بارهای q و q- واقع در $(0,0,d/2)$ و $(0,0,-d/2)$ که در آن

اندازه q معادل بار الکتریکی موجود در نیمه فوقانی کره است مقایسه کنید. به ازای چه مقداری از d، برحسب a، دو تابع پتانسیل یکسان می‌شوند؟

۳۷. پتانسیل ناشی از توزیعهای بار الکتریکی در مسائل ۲۳ و ۳۵ را با استفاده از رابطه $V=-\int_{\infty}^{r}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$ به دست آورید. میدان الکتریکی مورد نظر در هر حالت را ابتدا با استفاده از قانون گوس محاسبه کنید. اگر بینهایت را نتوان به عنوان نقطه مبنا در نظر گرفت، نقطه مبنای مناسبی را که پتانسیل آن صفر فرض می‌شود، انتخاب کنید.

۳۸. بار الکتریکی با چگالی ثابت ρ_L روی پاره خطی در امتداد محور z در فاصله $-a<z<a$ توزیع شده است. نشان دهید که خطوط میدان الکتریکی برای این توزیع بار هذلولی‌هایی هستند که کانونهای آنها نقاط انتهایی پاره‌خط بار می‌باشند. همچنین نشان دهید که سطوح هم پتانسیل، سطوح بیضوی شکلی هستند که کانونهای آنها همان نقاط انتهایی پاره‌خط بار می‌باشند.

۳۹. برای میدان الکتریکی داده شده در مسئله ۳۴، معادلات خطوط میدان و سطوح هم‌پتانسیل را به دست آورده، ماهیت آنها را مورد بررسی قرار داده، و تعدادی از هر کدام را ترسیم نمایید.

۴۰. برای میدانهای زیر ساده‌ترین شکل تابع f را به گونه‌ای تعیین کنید که شرایط میدان الکتریکی ساکن فراهم شود.

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی: $\mathbf{E}=x^{2}y\,\hat{a}_x+f(x)\,\hat{a}_y$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای: $\mathbf{E}=r\sin\varphi\,\hat{a}_r+f(r,\varphi)\,\hat{a}_\varphi$

ج) در دستگاه مختصات کروی: $\mathbf{E}=\frac{\sin^{2}\varphi}{r}\hat{a}_\varphi+f(r,\theta,\varphi)\,\hat{a}_\theta$