

میدان الکتریکی ساکن در خلأ

پس از کسب آشنایی لازم با مفاهیم آنالیز برداری هم اکنون آماده مطالعه میدانهای الکترومغناطیس می‌باشیم. به‌طور کلی نظریه میدانهای الکترومغناطیس بر مبنای یک دسته معادلات، به نام معادلات ماکسول، استوار می‌باشد. هدف نهایی ما در این درس نیز آموختن این معادلات و کاربرد آنها در تجزیه و تحلیل مسائل مختلف و به خصوص امواج الکترومغناطیس می‌باشد. وقتی صحبت از میدانهای الکترومغناطیس می‌شود، وابستگی متقابل و وجود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید تفهیم شود. مطالعه نظریه میدانهای الکترومغناطیس را ممکن است مستقیماً از معادلات ماکسول و معادله نیروی لورنتز^۱، به عنوان مفروضات اولیه، شروع نمود. یاروش دیگری اتخاذ نمود که در آن ابتدا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن (مستقل از زمان) را مورد بررسی قرار داده و پس از طی مسیر تکاملی این نظریه، معادلات ماکسول را نتیجه‌گیری نمود و آنگاه مبادرت به مطالعه میدانهای الکترومغناطیس کرد. ما روش دوم را در پیش خواهیم گرفت.

منشأ میدانهای الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند. تغییرات میدانها در فضا بستگی به مقدار، موقعیت، سرعت و شتاب بارها دارد. در این فصل به مطالعه میدانهایی می‌پردازیم که از بارهای الکتریکی ساکن ناشی می‌شوند. بارهای الکتریکی به صورت مثبت یا منفی وجود داشته و کوچک‌ترین مقدار بار الکتریکی، بار الکترون فرض می‌شود. واحد اندازه‌گیری بار الکتریکی کولمب است و با حرف C نشان داده می‌شود. بار الکترون برابر 1.6×10^{-19} - کولمب می‌باشد. در مطالعات خود اصل بقای بار که بیان می‌کند « بار الکتریکی نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود » را همواره رعایت خواهیم کرد. توزیع بارهای الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا ممکن است به صورت نقطه‌ای (ناپیوسته) یا پیوسته باشد. در واقع پیوسته بودن توزیع بار با طبیعت ذره‌ای بودن آن مغایرت دارد، ولی با توجه به اینکه سر و کار ما با ابعاد

ماکروسکوپی می‌باشد و نه ابعاد میکروسکوپی، به طوری که حتی در یک عنصر کوچک طول، سطح یا حجم تعداد بی‌شماری الکترون وجود دارند، فرض پیوستگی بارها کاملاً معقول خواهد بود. در این فصل میدان الکتریکی و پتانسیل ناشی از انواع مختلف توزیع بارهای الکتریکی در خلأ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. توزیع بارهای الکتریکی در فضا ممکن است به چهار صورت باشد که عبارتند از:

- توزیع نقطه‌ای؛ بارها در یک یا چند نقطه متمرکز هستند.
- توزیع خطی؛ بارها در امتداد یک خط (مستقیم یا منحنی) توزیع می‌شوند.
- توزیع سطحی؛ بارها روی یک سطح قرار دارند.
- توزیع حجمی؛ بارها در یک حجم پراکنده هستند.

در سیستم آحاد M.K.S.، واحد اندازه‌گیری برای چگالی توزیع خطی «کولمب بر متر» (C/m)، برای چگالی توزیع سطحی «کولمب بر متر مربع» (C/m^2) و برای چگالی توزیع حجمی «کولمب بر متر مکعب» (C/m^3) می‌باشد. میدان الکتریکی ناشی از بارهای ساکن با توزیعهای مذکور را ممکن است به چندین روش محاسبه نمود که در آن میان روشهای زیر را در این فصل مطالعه خواهیم کرد:

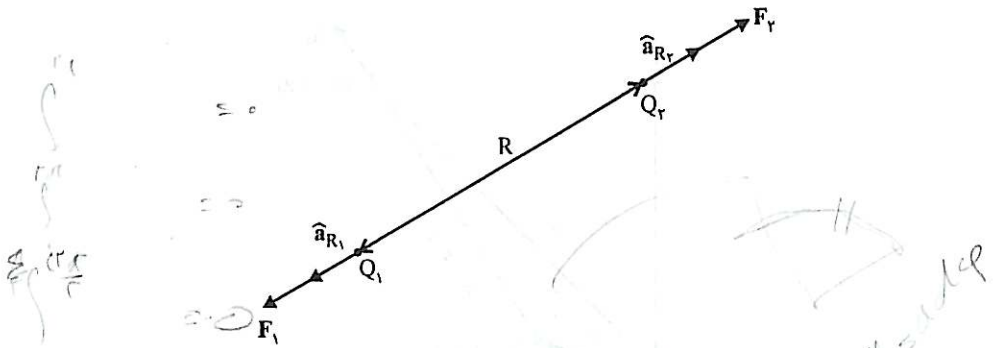
- مستقیماً با استفاده از قانون کولمب،
- با استفاده از قانون گوس،
- از طریق محاسبه پتانسیل و به دست آوردن گرادیان آن.

۱-۲ قانون کولمب

مطالعات تجربی نشان داده است که نیروی بین دو بار الکتریکی ساکن و نقطه‌ای Q_1 و Q_2 که به فاصله R از یکدیگر قرار دارند طوری است که: الف) بارهای همنام یکدیگر را دفع می‌کنند و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند. ب) نیروی بین دو بار در امتداد خطی عمل می‌کند که دو بار را به یکدیگر وصل می‌نماید. ج) اندازه نیرو متناسب با حاصل ضرب بارها می‌باشد. د) اندازه نیرو متناسب با عکس مربع فاصله دو بار است. این نتایج را که اولین بار توسط کولمب به دست آمده است می‌توان در رابطه زیر تحت عنوان قانون کولمب خلاصه نمود:

$$F_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \hat{a}_{R_1} \quad (1-2)$$

F_1 نیرویی است که بر بار Q_1 توسط بار Q_2 اعمال می‌شود. واضح است که نیروی اعمال شده بر بار Q_2 توسط بار Q_1 همواره از رابطه $F_2 = -F_1$ به دست می‌آید. شکل ۱-۲ نیروهای F_1 و F_2 را برای دو بار همنام نشان می‌دهد. \hat{a}_{R_1} بردار واحدی در جهت Q_2 به طرف Q_1 می‌باشد. k ضریب ثابتی است که بستگی به محیط اطراف بارهای Q_1 و Q_2 و همچنین سیستم آحاد دارد. برای خلأ و در سیستم آحاد M.K.S.، $k = 1/4\pi\epsilon_0$ است، که در آن ϵ_0 قابلیت‌گذردهی^۱ یا قابلیت نفوذ الکتریکی خلأ نامیده می‌شود و مقدار آن برابر با $10^{-9}/36\pi \approx 10^{-12} \times 8.85$ فاراد بر متر است.



شکل ۲-۱: بارهای همنام و نیروهای دافعه بین آنها

۲-۲ شدت میدان الکتریکی

از قانون کولمب نتیجه گرفته می‌شود که وقتی بار Q_2 در مجاورت بار Q_1 قرار می‌گیرد به آن نیرویی اعمال می‌شود. به بیان دیگر می‌توان گفت که بار Q_1 در اطراف خود میدانی به وجود می‌آورد که هرگاه بار دیگری در آن میدان قرار گیرد به آن نیرویی اعمال می‌شود. بر حسب تعریف نیرویی را که بار Q_1 بر واحد بار مثبت در نقطه‌ای از فضا وارد می‌آورد شدت میدان الکتریکی حاصل از بار Q_1 در آن نقطه گویند. شدت میدان الکتریکی با حرف E نمایش داده شده و در سیستم آحاد M.K.S. با واحد «ولت بر متر» اندازه‌گیری می‌شود.

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_{R_2} \quad (2-2)$$

در رابطه مذکور E نیرویی است که بار Q_1 بر بار $Q_2 = +1$ C اعمال می‌کند. به طور خلاصه اگر باری به اندازه Q کولمب را در مبدأ مختصات در نظر بگیریم، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات (r, θ, ϕ) برداری است که فقط مؤلفه \hat{a}_r خواهد داشت:

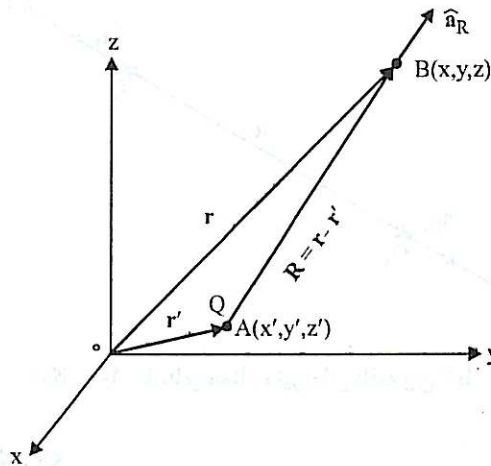
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad (3-2)$$

ولی اگر بار Q در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات واقع باشد، دیگر تقارن کروی وجود نخواهد داشت. با توجه به شکل ۲-۲، شدت میدان الکتریکی ناشی از بار Q واقع در نقطه A (که با بردار مکان r' نشان داده می‌شود) در نقطه B (که با بردار مکان r نشان داده می‌شود) عبارت است از:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (4-2)$$

$$R = r - r' \quad (5-2)$$

اما می‌دانیم:



شکل ۲-۲: نمایش بار نقطه‌ای Q و نحوه محاسبه میدان الکتریکی ناشی از آن

$$\hat{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6-2)$$

با استفاده از روابط ۵-۲ و ۶-۲ در رابطه ۴-۲ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (7-2)$$

همان‌طور که در شکل ۲-۲ ملاحظه می‌شود دو نوع مختصات در آن به کار رفته است. معمولاً مختصات بدون پریم، مانند (x, y, z) ، برای مشخص نمودن نقاطی که در آنها محاسبه میدان مورد نظر است به کار می‌روند، در حالی که مختصات پریم‌دار، مانند (x', y', z') ، برای مشخص نمودن نقاطی که توزیع بار الکتریکی را شامل می‌شوند مورد استفاده قرار می‌گیرند. این قاعده کلی برای انواع توزیعها، اعم از نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی و در هر دستگاه مختصاتی و نیز برای میدانهای مغناطیسی که در فصول بعد مطالعه می‌شوند همواره رعایت خواهد شد.

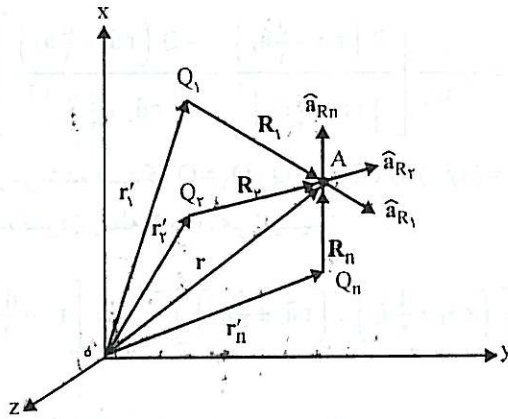
شدت میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای

میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای را می‌توان از جمع برداری میدانهای که از تک تک بارها حاصل می‌شود به دست آورد. در حقیقت نیروی اعمال شده بر بار $q = +1$ C، طبق اصل جمع آثار، برابر جمع برداری نیروهایی است که هر کدام از بارها جداگانه بر بار q وارد می‌آورند. پس میدان الکتریکی حاصل از بارهای Q_1, Q_2, \dots, Q_n را با توجه به شکل ۳-۲ می‌توان به شرح زیر محاسبه نمود:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{a}_{R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \hat{a}_{R_n} = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j^2} \hat{a}_{R_j} \quad (8-2)$$

اما از طرف دیگر:

$$R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|, \quad \hat{a}_{R_j} = \frac{\mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_j|}$$



شکل ۲-۳: نمایش چندین بار نقطه‌ای و نحوه محاسبه میدان الکتریکی ناشی از آنها

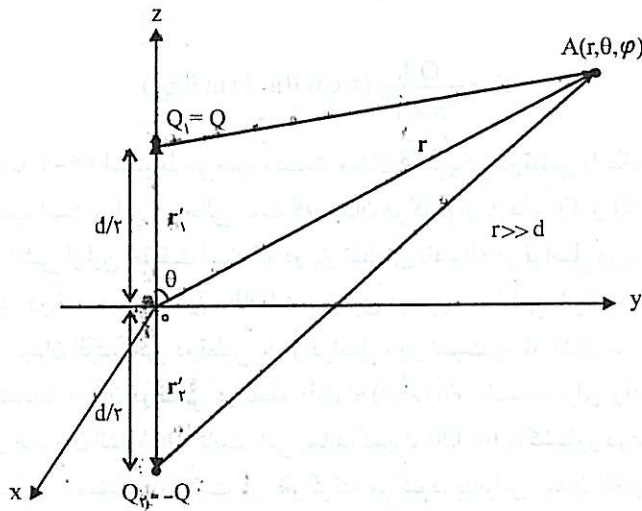
در نتیجه :

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|^3}$$

(۹-۲)

دوقطبی الکتریکی

شکل ۲-۴ یک دوقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد که از دو بار نقطه‌ای مساوی و ناهمنام که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند تشکیل می‌شود. می‌خواهیم شدت میدان را در فواصل دور از دوقطبی ($r \gg d$) به دست آوریم. با استفاده از رابطه ۲-۹ می‌توان نوشت :



شکل ۲-۴: دوقطبی الکتریکی

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q \left(r\hat{a}_r - \frac{d}{r}\hat{a}_z \right)}{\left| r\hat{a}_r - \frac{d}{r}\hat{a}_z \right|^3} + \frac{-Q \left(r\hat{a}_r + \frac{d}{r}\hat{a}_z \right)}{\left| r\hat{a}_r + \frac{d}{r}\hat{a}_z \right|^3} \right] \quad (10-2)$$

در نوشتن رابطه ۱۰-۲ فرض شده است که $Q_1 = Q$ ، $Q_2 = -Q$ ، $r_1' = (d/r)\hat{a}_z$ ، $r_2' = -(d/r)\hat{a}_z$ و $r = r\hat{a}_r$ است. برای ساده نمودن رابطه ۱۰-۲، می نویسیم:

$$\left| r\hat{a}_r \pm \frac{d}{r}\hat{a}_z \right|^{-3} = \left[\left(r\hat{a}_r \pm \frac{d}{r}\hat{a}_z \right) \cdot \left(r\hat{a}_r \pm \frac{d}{r}\hat{a}_z \right) \right]^{-3/2} = \left[r^2 + \frac{d^2}{r^2} \pm r d \cos \theta \right]^{-3/2}$$

با فرض $d < r$:

$$\cong [r^2 \pm r d \cos \theta]^{-3/2} = r^{-3} \left(1 \pm \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{-3/2}$$

و با استفاده از بسط دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$\left| r\hat{a}_r \pm \frac{d}{r}\hat{a}_z \right|^{-3} \cong r^{-3} \left(1 \mp \frac{3}{r} d \cos \theta \right) \quad (11-2)$$

با استفاده از رابطه ۱۱-۲ در رابطه ۱۰-۲ داریم:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\gamma d \cos \theta \hat{a}_r - d \hat{a}_z) \quad (12-2)$$

از طرفی، بردار واحد \hat{a}_z بر حسب بردارهای واحد دستگاه مختصات کروی عبارت است از:

$$\hat{a}_z = \cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta \quad (13-2)$$

با جایگزین نمودن رابطه اخیر در رابطه ۱۲-۲، سرانجام میدان الکتریکی دوقطبی به صورت زیر خلاصه می شود:

$$E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \quad (14-2)$$

به طوری که از رابطه ۱۴-۲ استنباط می شود، شدت میدان الکتریکی دوقطبی با عکس مکعب مسافت (یعنی r^{-3}) متناسب است و این در حالی است که میدان هر کدام از بارهای Q و $-Q$ با r^{-2} متناسب هستند. این نتیجه ناشی از این حقیقت است که دو بار نقطه‌ای ناهم نام در فواصل دور، میدانهای یکدیگر را تضعیف می کنند. در قسمتهای بعدی مطالعات بیشتری در مورد دوقطبی خواهیم داشت.

رابطه ۱۴-۲، میدان الکتریکی دوقطبی را در فواصل دور نسبت به d نشان می دهد، ولی همین رابطه را می توان شدت میدان دوقطبی در نقطه دلخواه $A(r, \theta, \rho)$ دانست، برای وقتی که d به سمت صفر میل نموده و همزمان اندازه Qd ثابت باقی بماند. کمیت $p = Qd$ را گشتاور دوقطبی نامیده و برای آن جهتی از بار منفی به سمت بار مثبت در نظر گرفته می شود. بنابراین میدان الکتریکی دوقطبی که دارای گشتاور p در امتداد محور Z باشد برابر است با:

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \quad (15-2)$$

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \dots$

میدان الکتریکی توزیعهای بیوسسته خطی

وقتی بارهای الکتریکی در امتداد یک خط با چگالی ρ_L توزیع شده باشند، می‌خواهیم میدان الکتریکی حاصل از این توزیع را در نقطه دلخواه A به دست آوریم. خط حاوی بار را به تعداد زیادی از عناصر کوچک تقسیم نموده و بار موجود در هر عنصر را به صورت یک بار نقطه‌ای تلقی می‌کنیم. بار عنصر i ام برابر $\Delta Q_i = \rho_L \Delta L'_i$ بوده و میدان حاصل از آن در نقطه A با توجه به شکل ۲-۵ عبارت است از:

$$\Delta \mathbf{E}_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_i} = \frac{\rho_L \Delta L'_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_i} \quad (16-2)$$

اما از طرفی مقدار کل بار برابر مجموع بارهای عناصر می‌باشد:

$$Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_L \Delta L'_i \quad (17-2)$$

در نتیجه با استفاده از اصل جمع آثار، میدان حاصل از کلیه عناصر برابر است با:

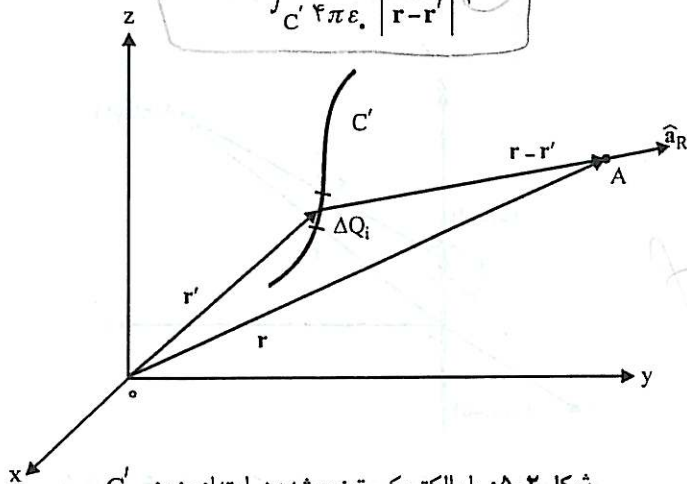
$$\mathbf{E} = \sum_i \Delta \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{\rho_L \Delta L'_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_i} \quad (18-2)$$

در حد وقتی عنصر طول $\Delta L'_i$ به سمت صفر میل نماید رابطه ۲-۱۸ به یک انتگرال تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{E} = \int_{C'} \frac{\rho_L dL'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \quad (19-2)$$

در انتگرال ۲-۱۹، R و $\hat{\mathbf{a}}_R$ هر سه ممکن است متغیر باشند و به خصوص باید در مورد تغییرات بردار واحد $\hat{\mathbf{a}}_R$ دقت کافی داشت. با استفاده از روابط ۲-۵ و ۲-۶ در رابطه ۲-۱۹، شدت میدان برای توزیع خطی بارهای الکتریکی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{C'} \frac{\rho_L(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dL' \quad (20-2)$$



شکل ۲-۵: بار الکتریکی توزیع شده در امتداد منحنی C'

اگر دستگاه مختصات مستطیلی را در رابطه ۲-۲۰ مورد استفاده قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$E(x,y,z) = \int_{C'} \left[\frac{\rho_L(x',y',z') [(x-x')\hat{a}_x + (y-y')\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right] \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 \right]^{1/2} dx' \quad (21-2)$$

با مشخص بودن $\rho_L(x',y',z')$ و معادلات منحنی C' ، انتگرال ۲-۲۱ قابل محاسبه است. مثال ۱-۲ بار الکتریکی در امتداد محور z از $z=-d$ تا $z=+d$ ، مطابق شکل ۲-۶، با چگالی یکنواخت ρ_L توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا به دست آورید.
حل:

از رابطه ۲-۲۰ برای محاسبه میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا بردارهای \mathbf{r} و \mathbf{r}' را به دست می‌آوریم. تأکید می‌شود که به دلیل تقارن استوانه‌ای توزیع بار، در حل این مثال از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۲-۶ می‌توان نوشت:

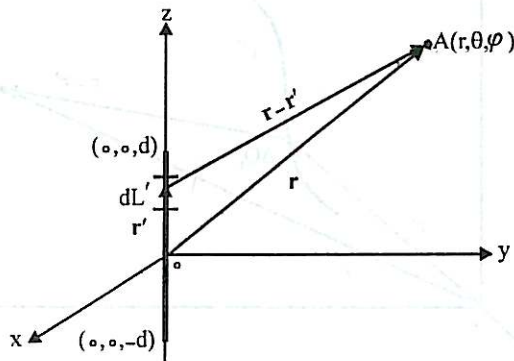
$$\mathbf{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z, \quad \mathbf{r}' = z'\hat{a}_z, \quad dL' = dz'$$

آنگاه:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = r\hat{a}_r + (z-z')\hat{a}_z \quad (22-2)$$

با استفاده از رابطه اخیر در رابطه ۲-۲۰ داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d}^d \frac{r\hat{a}_r + (z-z')\hat{a}_z}{[r^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz'$$



شکل ۲-۶: بار الکتریکی با توزیع خطی یکنواخت در امتداد محور z

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{-(z-z')\hat{a}_r}{r\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \right]_{-d}^d + \left[\frac{\hat{a}_z}{\sqrt{r^2+(z+z')^2}} \right]_{-d}^d \right\} \quad (23-2)$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{-(z-d)}{r\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \frac{-(z+d)}{r\sqrt{r^2+(z+d)^2}} \right] \hat{a}_r + \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}} \right] \hat{a}_z \right\}$$

در مثال ۱-۲ ملاحظه می‌شود که اولاً شدت میدان مؤلفه φ ندارد و این بدین دلیل است که هیچ‌کدام از عناصر بار تولید چنین مؤلفه‌ای نمی‌کند و ثانیاً اگر d به سمت بینهایت میل کند در آن صورت مؤلفه E_z نیز صفر خواهد شد. در این حالت تقارنی که نسبت به z به وجود می‌آید باعث صفر شدن مؤلفه E_z می‌شود. در حقیقت برای هر عنصر بار dq که مؤلفه dE_z را به وجود آورد عنصر بار دیگری وجود دارد که مؤلفه‌ای برابر $-dE_z$ را ناشی می‌شود به طوری که در مجموع مؤلفه E_z صفر می‌گردد. پس به طور خلاصه شدت میدان الکتریکی یک خط بار به طول بینهایت برابر است با:

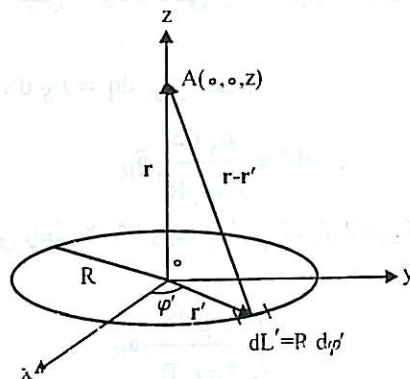
$$\boxed{E = \frac{\rho_L}{\gamma\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r} \quad (24-2)$$

در صفحه xy ، می‌توان شدت میدان الکتریکی را با قرار دادن $z=0$ در رابطه ۲۳-۲ به دست آورد:

$$\boxed{E = \frac{\rho_L}{\gamma\pi\epsilon_0 r} \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}} \hat{a}_r} \quad (25-2)$$

ملاحظه می‌شود که در صفحه xy نیز میدان E فقط مؤلفه شعاعی E_r دارد و این نتیجه مجدداً به دلیل تقارنی است که نسبت به z به وجود است.

مثال ۲-۲ بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی خطی ρ_L روی حلقه‌ای به شعاع R توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور حلقه به دست آورید. فرض کنید که حلقه در صفحه xy واقع بوده و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد. شکل ۷-۲ توزیع بار و مختصات را برای این مثال نشان می‌دهد.



شکل ۷-۲: بار الکتریکی با توزیع خطی یکنواخت روی حلقه‌ای به شعاع R

حل:

از دستگاه مختصات استوانه‌ای در حل این مثال استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۲-۷، بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' عبارت از $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{a}}_z$ و $\mathbf{r}' = R\hat{\mathbf{a}}_{r'}$ می‌باشند. اما چون بردار $\hat{\mathbf{a}}_{r'}$ در عبارت \mathbf{r}' متغیر است، برای ساده کردن انتگرال‌گیری، ابتدا آن را بر حسب بردارهای واحد دستگاه مختصات مستطیلی می‌نویسیم. (اگر $\hat{\mathbf{a}}_{r'}$ در عبارت \mathbf{r} باشد با آن به عنوان یک بردار واحد ثابت برخورد می‌شود. (چرا؟)) از این رو $\mathbf{r}' = R(\cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y)$ است. پس:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x - R \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (26-2)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (z^2 + R^2)^{2/2} \quad (27-2)$$

با جایگزین نمودن دو رابطه اخیر و $dL' = R d\varphi'$ در رابطه ۲۰-۲ داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (-R \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x - R \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z) d\varphi'$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\varphi' &= -R \hat{\mathbf{a}}_x \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' - R \hat{\mathbf{a}}_y \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' + z \hat{\mathbf{a}}_z \int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= 2\pi z \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned}$$

و سرانجام:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (28-2)$$

میدان الکتریکی توزیعیهای پیوسته سطحی

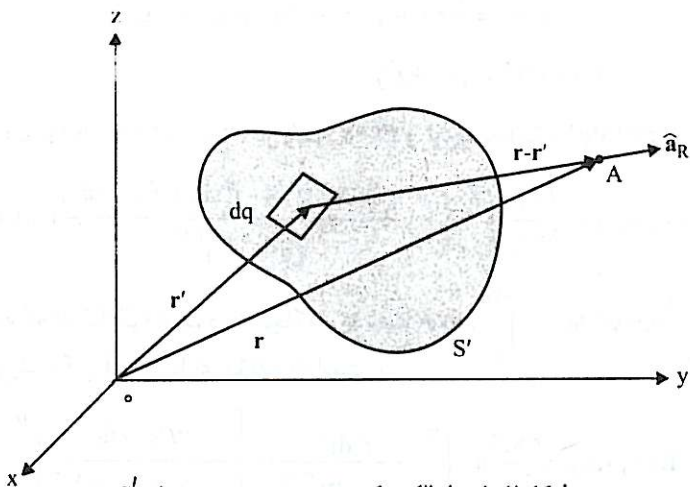
وقتی که بارهای الکتریکی با چگالی ρ_S روی سطحی توزیع شده باشند و محاسبه میدان الکتریکی ناشی از این توزیع در نقطه دلخواهی مانند A در شکل ۲-۸ مورد نظر باشد ابتدا میدان حاصل از یک عنصر بار را به دست آورده و سپس از میدان ناشی از عنصر بار انتگرال می‌گیریم تا میدان کل در نقطه مورد نظر به دست آید.

میدان ناشی از عنصر بار $dq = \rho_S dS'$ برابر است با:

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S dS'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \quad (29-2)$$

پس از انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۲۹-۲ روی سطحی که بار الکتریکی روی آن توزیع شده است خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_S dS'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \quad (30-2)$$

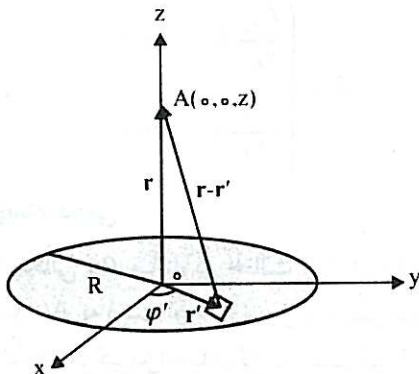
شکل ۲-۸: بار الکتریکی توزیع شده بر روی سطح S'

رابطه انتگرالی ۲-۳۰ را می‌توان بر حسب بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' نیز بیان داشت. کافی است که جمله $\hat{\mathbf{a}}_R/R^2$ را با $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3$ جایگزین نماییم.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{S' 4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dS' \quad (۲-۳۱)$$

مثال ۲-۳: بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی سطحی ρ_S روی یک دیسک به شعاع R توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور دیسک به دست آورید.
حل:

با توجه به شکل ۲-۹ بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت از $\mathbf{r} = z \hat{\mathbf{a}}_z$ و $\mathbf{r}' = r' \hat{\mathbf{a}}_{r'}$ می‌باشند. لیکن بردار واحد $\hat{\mathbf{a}}_{r'}$ متغیر بوده و برای سادگی انتگرال‌گیری آن را به صورت $\hat{\mathbf{a}}_{r'} = \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y$ می‌نویسیم. پس:

شکل ۲-۹: توزیع سطحی بار الکتریکی با چگالی ثابت روی دیسکی به شعاع R

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}' = -r' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x - r' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (۳۲-۲)$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = (r'^2 + z^2)^{2/2} \quad (۳۳-۲)$$

با جایگزین نمودن روابط ۳۲-۲ و ۳۳-۲ در رابطه ۳۱-۲ و توجه به اینکه $dS' = r' dr' d\varphi'$ ، داریم:

$$\mathbf{E}(\cdot, \cdot, z) = \frac{\rho_{S_0}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(-r' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x - r' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z)}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi' \quad (۳۴-۲)$$

اگر ابتدا نسبت به φ' انتگرال گرفته شود، از آنجا که $\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0$ ، سریعاً این نتیجه حاصل می‌شود که \mathbf{E} فقط دارای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_z$ است. پس:

$$\mathbf{E}(\cdot, \cdot, z) = \frac{\rho_{S_0} z \hat{\mathbf{a}}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = \left[\frac{-\rho_{S_0} z \hat{\mathbf{a}}_z}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$\mathbf{E}(\cdot, \cdot, z) = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{4\pi\epsilon_0} \left[+1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{a}}_z & z > 0 \\ \frac{\rho_{S_0}}{4\pi\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{a}}_z & z < 0 \end{cases} \quad (۳۵-۲)$$

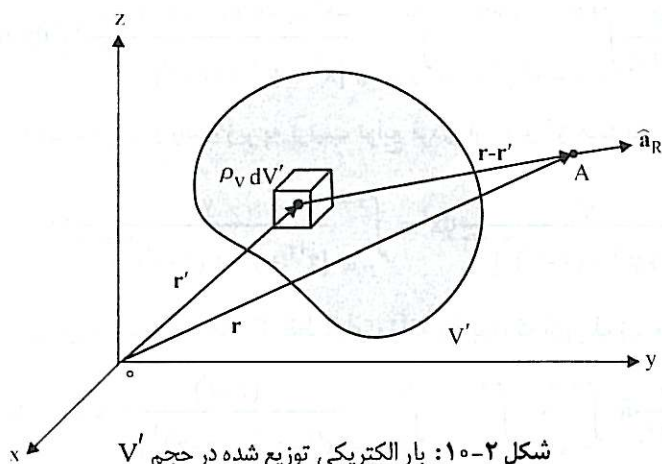
دقت شود که ± 1 در رابطه ۳۵-۲، برای محاسبه انتگرال عبارتی به صورت $z/\sqrt{z^2}$ به وجود می‌آید که مقدار آن برابر $+1$ است، اگر z مثبت و برابر -1 است، اگر z منفی باشد.

اگر در مثال ۳-۲، R به سمت بینهایت میل نماید در آن صورت شدت میدان مقدار ثابتی برابر $|\mathbf{E}| = \rho_{S_0} / 4\pi\epsilon_0$ خواهد شد و این همان شدت میدان یک صفحه بینهایت است که بار الکتریکی به طرز یکنواخت با چگالی سطحی ρ_{S_0} روی آن توزیع شده باشد. بنابراین به طور خلاصه میدان یک صفحه بینهایت بار که منطبق بر صفحه xy باشد برابر است با:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_{S_0}}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z < 0 \end{cases} \quad (۳۶-۲)$$

میدان الکتریکی توزیعهای پیوسته حجمی

برای توزیع حجمی بار با چگالی ρ_V مانند دو حالت قبل ابتدا میدان حاصل از عنصر بار $dq = \rho_V dV'$ را در نقطه $A(x, y, z)$ به دست آورده و سپس از عنصر میدان در حجم V' ، که در آن بار الکتریکی توزیع یافته است، انتگرال می‌گیریم تا میدان کل به دست آید. از این رو با در نظر گرفتن شکل ۱۰-۲ می‌توان به طور خلاصه نوشت:

شکل ۲-۱۰: بار الکتریکی توزیع شده در حجم V'

$$\mathbf{E} = \int_{V'} \frac{\rho_V dV'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \quad (37-2)$$

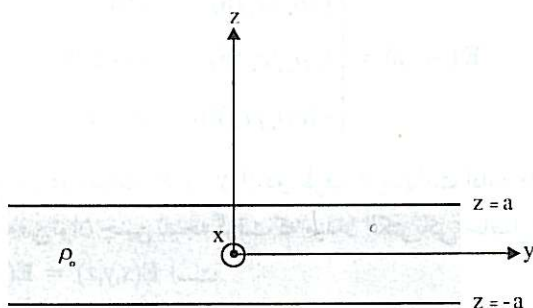
و بالاخره رابطه ۳۷-۲ بر حسب بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad (38-2)$$

مثال ۲-۴ بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت $\rho_V = \rho_0$ در بخشی از فضا که بین دو صفحه $z=a$ و $z=-a$ محصور است توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی محور z محاسبه کنید. شکل ۲-۱۱ این توزیع بار الکتریکی را نشان می دهد.

حل:

دستگاه مختصات مستطیلی یا استوانه‌ای برای حل این مثال مناسب است. ابتدا مسئله را در دستگاه مختصات مستطیلی در نظر می گیریم. با توجه به اینکه $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{a}}_x + y'\hat{\mathbf{a}}_y + z'\hat{\mathbf{a}}_z$ و $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{a}}_z$ است، از رابطه ۳۸-۲ داریم:

شکل ۲-۱۱: توزیع حجمی بار با چگالی ثابت ρ_0 در فضای محصور بین صفحات $z=a$ و $z=-a$

$$E(\cdot, \cdot, z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \int_{y'=-\infty}^{+\infty} \int_{z'=-a}^a \frac{-x'\hat{a}_x - y'\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (39-2)$$

از آنجا که عبارات درون انتگرال در رابطه زیر به ترتیب توابع فردی از x' و y' هستند، پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x'}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y'}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dy' = 0 \quad (40-2)$$

و بنابراین به سادگی روشن می شود که میدان E فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z بوده که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$E(\cdot, \cdot, z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_z \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \int_{y'=-\infty}^{+\infty} \int_{z'=-a}^a \frac{(z-z')}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (41-2)$$

اگر ابتدا نسبت به x' و سپس نسبت به y' انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_{x'=-\infty}^{+\infty} \int_{y'=-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dy'}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{y'^2 + (z-z')^2} = \frac{2\pi}{|z-z'|} \quad (42-2)$$

آنگاه:

$$\int_{-a}^a \frac{2\pi(z-z')}{|z-z'|} dz' = \begin{cases} 2\pi \int_{-a}^a dz' = 4\pi a & z > a \\ 2\pi \int_{-a}^z dz' - 2\pi \int_z^a dz' = 4\pi z & -a < z < a \\ -2\pi \int_{-a}^a dz' = -4\pi a & z < -a \end{cases} \quad (43-2)$$

و سرانجام:

$$E(\cdot, \cdot, z) = \begin{cases} (a\rho_0/\epsilon_0)\hat{a}_z & z > a \\ (z\rho_0/\epsilon_0)\hat{a}_z & -a < z < a \\ -(a\rho_0/\epsilon_0)\hat{a}_z & z < -a \end{cases} \quad (44-2)$$

با توجه به اینکه توزیع بار در جهات x' و y' از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و در ضمن تغییراتی نسبت به x' و y' ندارد، می توان چنین نتیجه گرفت که میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار مستقل از x و y بوده و $E(x, y, z) = E(\cdot, \cdot, z)$ است.

این مثال را می توان در دستگاه مختصات استوانه ای نیز حل کرد. رابطه ۲-۳۸ در این دستگاه

به صورت زیر نوشته می شود:

$$E(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'=0}^{\infty} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{z'=-a}^a \frac{-r' \hat{a}_{r'} + (z-z') \hat{a}_z}{[r'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} r' dr' d\phi' dz'$$

با نوشتن $\hat{a}_{r'} = \cos \phi' \hat{a}_x + \sin \phi' \hat{a}_y$ و انتگرال گرفتن نسبت به ϕ' بلافاصله روشن می‌شود که E دارای مؤلفه‌های \hat{a}_x و \hat{a}_y نخواهد بود. برای محاسبه مؤلفه \hat{a}_z می‌توان نوشت:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r' dr'}{[r'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \frac{1}{|z-z'|}$$

$$E(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{2\pi(z-z')}{|z-z'|} dz'$$

محاسبه انتگرال مزبور و نتایج نهایی همانند روش مبتنی بر دستگاه مختصات مستطیلی بوده که در روابط ۲-۴۳ و ۲-۴۴ ارائه شده‌اند.

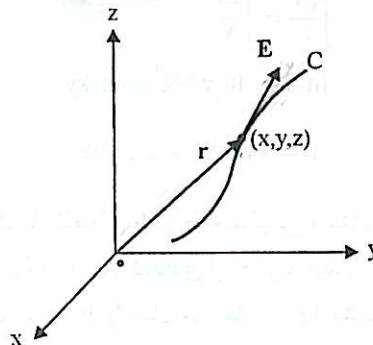
۲-۳ خطوط میدان

به منظور نمایش ترسیمی میدان الکتریکی (یا هر میدان برداری دیگر) از یک دسته منحنی که دارای معادلات عمومی یکسان هستند و در هر نقطه از فضا بر بردار میدان مماس می‌باشند استفاده می‌شود. تراکم یا پراکندگی خطوط میدان در یک ناحیه از فضا بیانگر شدت یا ضعف میدان در آن ناحیه می‌باشد. برای به دست آوردن معادلات خطوط میدان، همان‌طور که در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است، فرض می‌شود بردار E در نقطه‌ای به مختصات (x,y,z) بر منحنی C که از این نقطه می‌گذرد مماس باشد. از آنجا که بردار عنصر طول در هر نقطه بر منحنی C مماس است، بنابراین بردارهای میدان و عنصر طول در هر نقطه از منحنی C با یکدیگر موازی هستند:

$$E(\mathbf{r}) = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z \quad (۲-۴۵)$$

$$dL(\mathbf{r}) = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z \quad (۲-۴۶)$$

$$E(\mathbf{r}) \parallel dL(\mathbf{r}) \quad (۲-۴۷)$$



شکل ۲-۱۲: استخراج معادلات خطوط میدان

شرط موازی بودن دو بردار، متناسب بودن مؤلفه‌های متناظر آنها است :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (۴۸-۲)$$

معادلات اخیر معادلات خطوط میدان نامیده شده و چون از نوع معادلات دیفرانسیل هستند، در حالت کلی شامل یک دسته جواب می‌شوند. با معلوم بودن مؤلفه‌های میدان (E_x ، E_y و E_z) می‌توان این معادلات را حل نموده و از آنجا خطوط میدان را مشخص کرد.

در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی معادلات خطوط میدان به ترتیب عبارتند از :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z} \quad (۴۹-۲)$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{E_\varphi} \quad (۵۰-۲)$$

مثال ۵-۲ خطوط میدان را برای یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات به دست آورید. خطوط میدان را فقط در صفحه $z=0$ مطالعه کنید.

حل :

میدان بار نقطه‌ای عبارت از $E = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{a}_r$ است که مؤلفه‌های x و y آن در دستگاه مختصات مستطیلی به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}, \quad E_y = \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \quad (۵۱-۲)$$

در محاسبه مؤلفه‌های E_x و E_y از روابط $\hat{a}_r/r^2 = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ و $\mathbf{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$ استفاده شده است. با استفاده از رابطه ۵۱-۲ در رابطه ۴۸-۲ داریم :

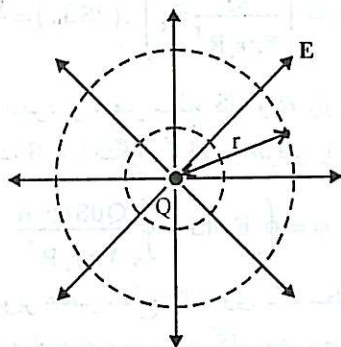
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln x = \ln y + K' = \ln ky$$

$$x = ky, \quad k = \text{مقدار ثابت} \quad (۵۲-۲)$$

بنابراین خطوط میدان برای یک بار نقطه‌ای خطوط مستقیمی هستند که به ازای مقادیر مختلف k از رابطه ۵۲-۲ به دست می‌آیند. شکل ۱۳-۲ تعدادی از خطوط میدان را نشان می‌دهد. جهت نشان داده شده روی خطوط میدان، جهت میدان E را نشان می‌دهد (بار Q مثبت فرض شده است).



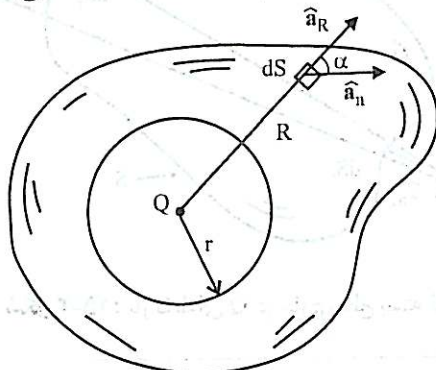
شکل ۲-۱۳: خطوط میدان بار نقطه‌ای Q

۴-۲ قانون گوس

کره‌ای به شعاع r را که در مرکز آن بار نقطه‌ای Q واقع شده باشد در نظر می‌گیریم، میدان حاصل از این بار در نقطه‌ای به مختصات (r, θ, φ) مساوی $\mathbf{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{\mathbf{a}}_r$ می‌باشد. شار بردار \mathbf{E} که از سطح کره می‌گذرد، یعنی $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ ، را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left(\frac{Q \hat{\mathbf{a}}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{a}}_r) \\ &= \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2-53)$$

ملاحظه می‌شود که $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ مستقل از شعاع کره است، بنابراین r چه یک میلی‌متر باشد و چه یک کیلومتر، مقدار انتگرال مذکور مساوی Q/ϵ_0 می‌باشد. حال اگر فرض کنیم که S به جای یک سطح کروی، سطح بسته دلخواهی باشد که بار Q را در برگیرد شار میدان \mathbf{E} که از آن سطح بسته دلخواه می‌گذرد باز همان مقدار Q/ϵ_0 است. به منظور تحقیق صحت این نتیجه، سطح بسته‌ای با بار Q در داخل آن مطابق شکل ۲-۱۴ را در نظر می‌گیریم. شاری که از عنصر سطح dS می‌گذرد برابر است با:



شکل ۲-۱۴: سطح بسته دلخواه S با بار نقطه‌ای Q در داخل آن

$$d\phi = E \cdot dS = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \right) \cdot (dS \hat{a}_n) = \frac{Q \cos \alpha dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (54-2)$$

در رابطه ۵۴-۲، \hat{a}_n بردار واحد عمود بر عنصر سطح dS و α زاویه بین بردارهای واحد \hat{a}_n و \hat{a}_R است. شار کل گذرنده از سطح بسته S را با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۵۴-۲ به دست می‌آوریم:

$$\phi = \oint_S E \cdot dS = \oint_S \frac{Q dS \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$dS \cos \alpha = dS'$ را می‌توان تصویر عنصر سطح dS روی یک سطح کروی به شعاع R و مرکز Q دانست. اما $dS'/R^2 = dS''$ به نوبه خود تصویر عنصر dS' روی سطح کره‌ای به شعاع واحد و مرکز Q است زیرا:

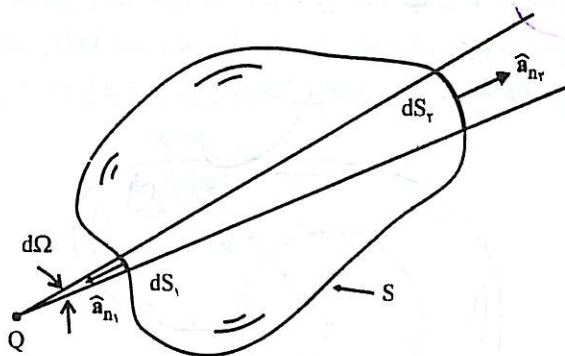
$$\frac{dS''}{dS'} = \frac{1^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{1}{R^2}$$

بنابراین $dS'' = d\Omega$ تصویر dS روی سطح کره‌ای به شعاع واحد (S'') و مرکز Q بوده و می‌توان نوشت:

$$\phi = \oint_{S''} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} dS'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (55-2)$$

$d\Omega$ زاویه فضایی محدود به dS از نقطه Q نامند. واحد اندازه‌گیری زاویه فضایی استرادیان^۱ است. زاویه فضایی یک سطح کروی (یا هر سطح بسته دلخواهی) وقتی که از مرکز آن (یا هر نقطه دلخواهی در داخل سطح بسته) دیده شود برابر 4π استرادیان می‌باشد.

اگر در داخل سطح بسته هیچ‌گونه بار الکتریکی موجود نباشد، مقدار خالص شار خارج شده از سطح بسته صفر است. زیرا هر عنصر زاویه فضایی دوبار (یا به دفعات زوج) سطح بسته را قطع می‌کند و شار خالص گذرنده از دو عنصر سطح محصور در زاویه فضایی $d\Omega$ ، به طوری که در شکل ۱۵-۲ دیده می‌شود، برابر صفر است ($E_1 \cdot dS_1 + E_2 \cdot dS_2 = 0$).



شکل ۱۵-۲: بار نقطه‌ای Q در خارج سطح بسته S

حال اگر چندین بار نقطه‌ای و سطح بسته S را در نظر بگیریم، به طوری که مطابق شکل ۲-۱۶ تعدادی از بارها در داخل سطح بسته و تعدادی دیگر در خارج آن قرار بگیرند، با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j$$

پس

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{j=1}^6 \oint_S \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S}$$

اما

$$\oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_2}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_3}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_S \mathbf{E}_5 \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_S \mathbf{E}_6 \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_6}{\epsilon_0}$$

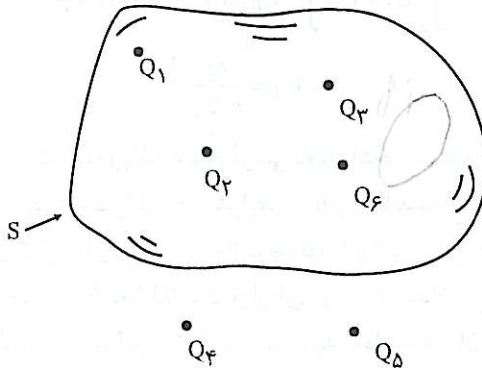
در نتیجه:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_6) = \frac{1}{\epsilon_0} (S \text{ بسته}) \quad (۵۶-۲)$$

این بحث را می‌توان به سادگی برای حالتی که توزیع بار الکتریکی پیوسته باشد نیز به کار گرفت. مثلاً در توزیع حجمی با چگالی ρ_V می‌توان بار الکتریکی محصور در سطح S را مجموع عناصر بار $\Delta q_i = \rho_V \Delta V_i$ دانست و هر عنصر بار را به صورت یک بار نقطه‌ای تلقی نمود و رابطه ۲-۵۶ را به کار برد. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \Delta q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \rho_V \Delta V_i$$

فقط برای عناصر درون سطح بسته



شکل ۲-۱۶: سطح بسته S و تعدادی از بارهای نقطه‌ای در داخل آن

در حد وقتی که ΔV_i به سمت صفر میل کند داریم:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_V dV \quad (57-2)$$

در رابطه ۵۷-۲، V حجمی است که به سطح بسته S محدود می شود. با توجه به بحثی که گذشت می توان قانون گوس را به شرح زیر بیان نمود: « شار کل گذرنده از سطح بسته S برابر است با بار الکتریکی محصور در آن سطح تقسیم بر ϵ_0 ».

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\text{بار محصور در سطح بسته } S}{\epsilon_0} \quad (58-2)$$

اگر میدان الکتریکی \mathbf{E} و سطح بسته S معلوم باشند، می توان $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ را به روشهای تحلیلی و یا عددی محاسبه نموده و در نتیجه بار محصور در داخل سطح S را به دست آورد. ولی عکس این مسئله یعنی تعیین میدان \mathbf{E} به ازای بار معلوم، تحت شرایط خاصی امکان پذیر است. اگر سطح بسته S چنان انتخاب شود که اولاً \mathbf{E} همواره عمود و یا مماس بر آن باشد و ثانیاً در جاهایی که \mathbf{E} عمود بر S است، $|\mathbf{E}|$ مقدار ثابتی باشد، در آن صورت می توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{S}_2, \quad S = S_1 + S_2 \quad (59-2)$$

در رابطه ۵۹-۲، \mathbf{E}_n را مؤلفه عمودی می نامیم که بر سطح S_1 عمود بوده و $|\mathbf{E}_n|$ روی سطح S_1 دارای مقدار ثابتی است، در حالی که \mathbf{E}_t (مؤلفه مماسی) بر سطح S_2 مماس بوده و $\mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$ می باشد. بنابراین:

$$\int_{S_2} \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{S}_2 = 0 \quad (60-2)$$

$$\int_{S_1} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} E_n dS_1 = E_n \int_{S_1} dS_1 = E_n S_1 \quad (61-2)$$

پس

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S}_1 = E_n S_1 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_n = \frac{Q}{\epsilon_0 S_1} \quad (62-2)$$

سطحی را که دارای خصوصیات مذکور باشد سطح گوسی نامند. انتخاب سطح گوسی بستگی به توزیع بار الکتریکی و تقارن آن دارد. بدیهی است با توجه به شرایط ویژه ای که باید سطح گوسی داشته باشد، محاسبه شدت میدان الکتریکی برای توزیعهای معدودی که از درجه تقارن بالایی برخوردار هستند امکان پذیر است. به علاوه استفاده از این روش منوط به اطلاعات اولیه ای در مورد میدان می باشد. چون بردار \mathbf{E} باید عمود یا مماس بر سطح گوسی باشد قبل از اینکه مبادرت به محاسبه میدان کنیم باید به طریقی جهت بردار \mathbf{E} را مشخص نماییم. تعیین جهت بردار \mathbf{E} را می توان با در نظر گرفتن جهت میدانی که یک عنصر بار به وجود می آورد و با استفاده از تقارن مسئله انجام داد.

مثال ۲-۶ بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی حجمی ρ در داخل کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

حل:

الف) نقاط خارج کره: نقطه M را در خارج کره، مطابق شکل ۲-۱۷، در نظر می‌گیریم. میدانی که دو عنصر بار واقع در نقاط (r', θ', φ') و $(r', \theta', \varphi' + \pi)$ به وجود می‌آورند در جهت عمود بر سطح کره می‌باشد و به بیان دیگر میدان فقط مؤلفه شعاعی دارد. به علاوه تقارن مسئله بیان می‌کند که اندازه میدان روی سطح کره به شعاع OM مقدار ثابتی است. با توجه به این اطلاعات در مورد میدان الکتریکی می‌توان نتیجه گرفت که سطح گوسی مطلوب، سطح کره‌ای به شعاع $r = OM$ می‌باشد. با به کار بردن قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E_r dS = E_r \oint_S dS = E_r S = 4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

اما:

$$Q = \int_V \rho_V dV = \rho \cdot \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{4\pi a^3}{3} \rho \quad (2-63)$$

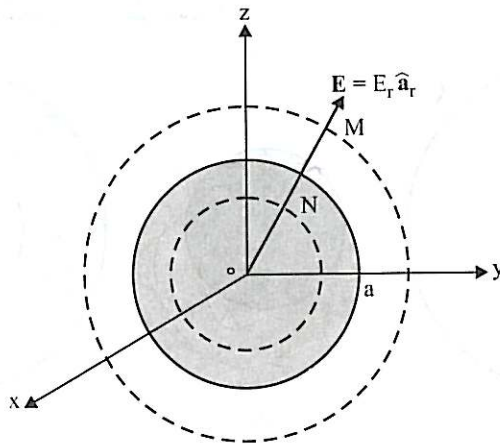
در نتیجه:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad r \geq a \quad (2-64)$$

$$\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow Q = \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$



شکل ۲-۱۷: بار الکتریکی با توزیع یکنواخت در کره‌ای به شعاع a و نحوه محاسبه میدان الکتریکی حاصل از آن

ب) نقاط داخل کره: برای محاسبه میدان در نقاط داخل کره، نقطه N را در شکل ۲-۱۷ به فاصله r از مرکز بار در نظر می‌گیریم. تمامی بار را، مطابق شکل ۲-۱۸، می‌توان مجموع بار کره‌ای به شعاع $ON=r$ ، برابر Q_1 و بار یک لایه کره‌ای به ضخامت $a-r$ ، برابر Q_2 دانست. طبق اصل جمع آثار میدانی که بار Q در نقطه N به وجود می‌آورد برابر مجموع میدانهایی است که بارهای Q_1 و Q_2 به طور جداگانه در آن نقطه ایجاد می‌کنند. با توجه به تقارن کره‌ای بارهای Q_1 و Q_2 ، میدانها همواره شعاعی بوده و اندازه آنها روی کره‌ای به شعاع ON ثابت است. اما میدان کل حاصل از بار Q_2 در نقطه N ، طبق قانون گوس، صفر بوده و میدان حاصل از بار Q_1 عبارت است از:

$$E_{r_1} = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad S = \text{سطح کره به شعاع } ON$$

اما:

$$Q_1 = \int_V \rho_V dV = \rho_0 \int_0^r r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}$$

حجم محدود به سطح گوسی S

$$Q = \int_0^a \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r'^3\right)$$

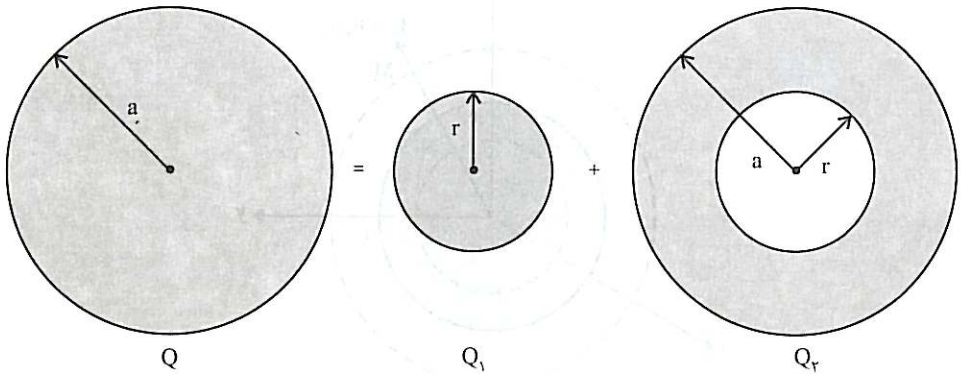
$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{\rho_0 \frac{4}{3}\pi a^3} = \left(\frac{r}{a}\right)^3$$

$$E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{a}_r \quad r \leq a$$

در نتیجه:

$$(۲-۶۵)$$

مثال ۲-۷ بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی حجمی $\rho_V = \rho_0$ در بخشی از فضا که بین دو صفحه $z=-a$ و $z=a$ محصور است توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا به دست آورید. (این مسئله قبلاً طی مثال ۲-۴ به روش انتگرال‌گیری از توزیع بار حل شده است. در اینجا حل مسئله با استفاده از قانون گوس مورد نظر است.)



شکل ۲-۱۸: تقسیم بار کره‌ای به شعاع a به دو بار Q_1 در کره‌ای به شعاع r و Q_2 در یک لایه کره‌ای به ضخامت $a-r$

حل:

با توجه به شکل ۲-۱۱، فرض کنید که محاسبه میدان در نقطه دلخواهی در داخل ناحیه بار ($|z| < a$) یا در خارج آن مورد نظر باشد. محورهای مختصات را طوری در نظر می‌گیریم که محور z از آن نقطه عبور نموده و بر سطح توزیع عمود باشد. حال اگر دو عنصر بار که در نقاط (x', y', z') و $(-x', -y', z')$ قرار دارند را در نظر بگیریم، میدان حاصل از آنها به دلیل تقارن توزیع بار فقط دارای مؤلفه E_z می‌باشد. البته برای نقاطی که $z > 0$ است میدان در جهت \hat{a}_z و برای نقاطی که $z < 0$ باشد میدان در جهت $-\hat{a}_z$ است. سطح گوسی را، همان‌گونه که در شکل ۲-۱۹ نشان داده شده است، به صورت یک سطح مکعب مستطیلی شکل با قاعده مربعی به ضلع l و ارتفاع $2z$ در نظر می‌گیریم به طوری که نیمی از آن بالای صفحه $z=0$ و نیم دیگرش در پایین صفحه $z=0$ قرار بگیرد.

الف) میدان در نقاطی که $|z| > a$ است:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E_z dS \hat{\mathbf{a}}_n \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

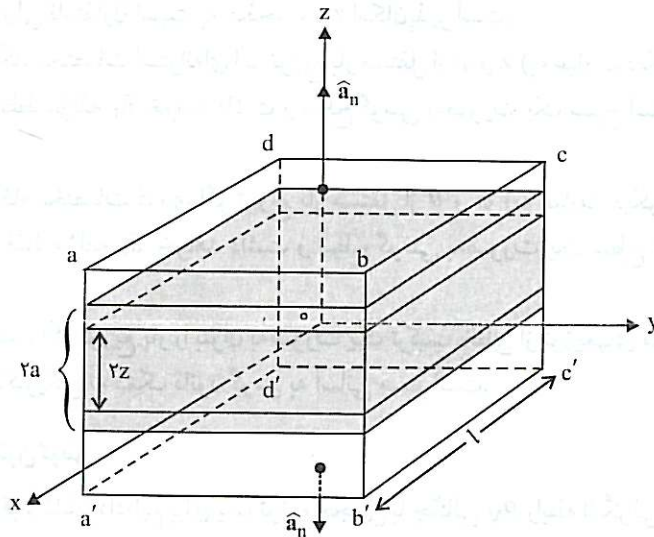
اما:

$$Q = 2al^2\rho, \quad \hat{\mathbf{a}}_n \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_{abcd} + \int_{a'b'c'd'} + \int_{abb'a'} + \int_{bcc'b'} + \int_{dcc'd'} + \int_{daa'd'} \right] \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$\underbrace{\int_{abcd}}_{=E_z l^2} \quad \underbrace{\int_{a'b'c'd'}}_{=E_z l^2} \quad \underbrace{\int_{abb'a'} + \int_{bcc'b'} + \int_{dcc'd'} + \int_{daa'd'}}_{=0}$



شکل ۲-۱۹: سطح گوسی مکعب مستطیلی شکل برای محاسبه میدان حاصل از توزیع بار در ناحیه $|z| < a$

$$\nabla E_z l^y = \nabla a \rho_z l^y / \epsilon_0 \Rightarrow E_z = a \rho_z / \epsilon_0$$

پس:

$$E = \begin{cases} \frac{a \rho_z}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z > a \\ -\frac{a \rho_z}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z < -a \end{cases} \quad (۶۶-۲)$$

ب) میدان در نقاط $|z| < a$ برابر است با:

$$\oint_S E \cdot dS = \nabla E_z l^y = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

در حالی که:

$$Q = \nabla z l^y \rho_z$$

در نتیجه:

$$E = E_z \hat{a}_z = \frac{\rho_z}{\epsilon_0} z \hat{a}_z, \quad |z| < a \quad (۶۷-۲)$$

با تجربه‌ای که طی مثالهای ۶-۲ و ۷-۲ در مورد کاربرد قانون گوس برای محاسبه میدان الکتریکی کسب کرده‌ایم می‌توان بیان داشت که:

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر توزیع بار تابع زوجی از فقط یک مختصه مثلاً z باشد، میدان E فقط مؤلفه \hat{a}_z خواهد داشت و سطح گوسی به صورت یک سطح مکعب مستطیلی شکل همانند شکل ۱۹-۲ خواهد بود. برای توزیعی که تابع فردی از z باشند (با توجه به اینکه میدان در خارج توزیع بار صفر است) تعیین میدان به کمک قانون گوس با استفاده از یک سطح گوسی مکعب مستطیلی شکل ولی نامتقارن نسبت به صفحه $z=0$ امکان پذیر است.

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر توزیع بار مستقل از φ و z (به عبارت دیگر فقط تابعی از r) باشد، میدان E فقط مؤلفه \hat{a}_r خواهد داشت و سطح گوسی به صورت یک سطح استوانه‌ای به شعاع r خواهد بود.

ج) در دستگاه مختصات کروی اگر توزیع بار مستقل از θ و φ (به عبارت دیگر فقط تابعی از r) باشد، میدان E فقط مؤلفه \hat{a}_r خواهد داشت و سطح گوسی به صورت یک سطح کروی به شعاع r خواهد بود.

به طور خلاصه، اگر توزیع بار را بتوان به صورت یک ترکیب خطی از توزیعی مذکور بیان داشت، محاسبه میدان الکتریکی به کمک قانون گوس به آسانی میسر است.

شکل نقطه‌ای قانون گوس

به طوری که قبلاً نشان داده‌ایم برای یک توزیع حجمی با چگالی ρ_V رابطه انتگرالی زیر برقرار است:

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_V dV \quad (۶۸-۲)$$

رابطه ۲-۶۸ را شکل انتگرالی قانون گوس نامند. حال اگر حجم V را آنقدر کوچک نماییم تا به عنصر حجم ΔV تبدیل شود، آنگاه سطح بسته S به عنصر سطح ΔS تبدیل خواهد شد. پس می توان نوشت:

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} \rho_V dV \quad (۶۹-۲)$$

با توجه به اینکه عنصر حجم ΔV بسیار کوچک است می توان توزیع بار را در آن یکنواخت فرض کرد. پس:

$$\int_{\Delta V} \rho_V dV \cong \rho_V \int_{\Delta V} dV = \rho_V \Delta V \quad (۷۰-۲)$$

اما طبق قضیه دیورژانس می توان نوشت:

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \cong (\nabla \cdot \mathbf{E}) \Delta V \quad (۷۱-۲)$$

با استفاده از روابط ۲-۷۰ و ۲-۷۱ در رابطه ۲-۶۹ نتیجه زیر را به دست می آوریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \quad (۷۲-۲)$$

این رابطه را شکل نقطه ای قانون گوس یا شکل دیفرانسیلی قانون گوس نامند. این رابطه به عنوان یکی از معادلات ماکسول شناخته می شود. این معادله بیان می کند که دیورژانس میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا برابر چگالی حجمی توزیع بار در آن نقطه تقسیم بر ϵ_0 می باشد. در صورت معلوم بودن میدان الکتریکی می توان چگالی حجمی توزیع بار را محاسبه نمود. شکل نقطه ای قانون گوس، به طوری که از رابطه ۲-۷۲ استنباط می شود، بر حسب چگالی حجمی بار بیان می گردد. از این رو می توان سؤال کرد که برای توزیعهای نقطه ای، خطی و سطحی رابطه ۲-۷۲ باید به چه صورتی باشد. خوشبختانه توزیعهای مذکور را می توان به کمک توابع دلتای دیراک^۱ بر حسب توزیع حجمی بیان نمود.

تابع دلتای دیراک یک بعدی (تابع ضربه یک بعدی) در نقطه $x=x_0$ به صورت $\delta(x-x_0)$ نوشته می شود. مقدار تابع در هر نقطه ای غیر از $x=x_0$ برابر صفر بوده و در $x=x_0$ بینهایت می شود. به علاوه:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-x_0) dx = 1, \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad (۷۳-۲)$$

تابع دلتای دیراک دوبعدی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \begin{cases} \infty & x=x_0, \quad y=y_0 \\ 0 & x \neq x_0 \quad \text{یا} \quad y \neq y_0 \end{cases} \quad (۷۴-۲)$$

و همچنین:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) dx dy = 1, \quad x_1 < x_0 < x_2, \quad y_1 < y_0 < y_2 \quad (۷۵-۲)$$

برای تابع دلتای دیراک سه بعدی می توان نوشت :

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \begin{cases} \infty & x=x_0, y=y_0, z=z_0 \\ 0 & x \neq x_0 \text{ یا } y \neq y_0 \text{ یا } z \neq z_0 \end{cases} \quad (۷۶-۲)$$

و نیز :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) dx dy dz = 1, \quad \begin{matrix} x_1 < x_0 < x_2 \\ y_1 < y_0 < y_2 \\ z_1 < z_0 < z_2 \end{matrix} \quad (۷۷-۲)$$

باید دقت شود که توابع دلتای دیراک دو بعدی و سه بعدی به ترتیب در (x_0, y_0, z_0) و (x_0, y_0) بینهایتی مرتبه دوم و سوم هستند.

حال فرض کنید که بار نقطه‌ای Q در نقطه (x_0, y_0, z_0) واقع باشد. چگالی حجمی بار را می توان به صورت $\rho_V = Q \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ بیان داشت، زیرا اگر از ρ_V در داخل حجم ΔV که بار Q را در بر بگیرد انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\int_{\Delta V} \rho_V dV = Q \int_{\Delta V} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) dx dy dz = Q$$

بدین ترتیب شکل نقطه‌ای قانون گوس برای بار نقطه‌ای Q به صورت زیر نوشته می شود :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \quad (۷۸-۲)$$

به عنوان مثال دیگر اگر بار الکتریکی با چگالی ρ_L در امتداد خطی موازی محور z که از نقطه $(x_0, y_0, 0)$ می گذرد توزیع شده باشد، قانون گوس به صورت زیر نوشته می شود :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \quad (۷۹-۲)$$

بالاخره در آخرین مثال فرض می کنیم که بار الکتریکی روی صفحه $z=z_0$ با چگالی سطحی ρ_S توزیع شده باشد. در این حالت شکل نقطه‌ای قانون گوس به صورت زیر نوشته می شود :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \delta(z-z_0) \quad (۸۰-۲)$$

۵-۲ پتانسیل الکتریکی

بار q را در میدان الکتریکی \mathbf{E} در نظر می گیریم. نیرویی که میدان \mathbf{E} بر بار q وارد می آورد در جهت خطوط میدان بوده و اندازه آن برابر qE می باشد. مقدار کاری که میدان \mathbf{E} برای حرکت دادن بار q از نقطه A به نقطه B در امتداد مسیر C انجام می دهد برابر است با :

$$W = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (۸۱-۲)$$

شکل ۲-۲۰: میدان E و مسیر حرکت بار q را نشان می‌دهد. اگر W مثبت باشد، کار توسط میدان انجام شده است ولی چنانچه W منفی باشد، میدان کار منفی انجام داده و به بیان دیگر کار توسط یک عامل خارجی انجام گرفته است.

بر حسب تعریف، مقدار کاری را که میدان الکتریکی برای حرکت دادن واحد بار مثبت ($q = +1 C$) از نقطه A به نقطه B انجام می‌دهد (یا کار لازم برای حرکت دادن واحد بار مثبت از نقطه B به نقطه A توسط یک عامل خارجی) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B نامیده شده و به صورت V_{AB} نشان داده می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (۸۲-۲)$$

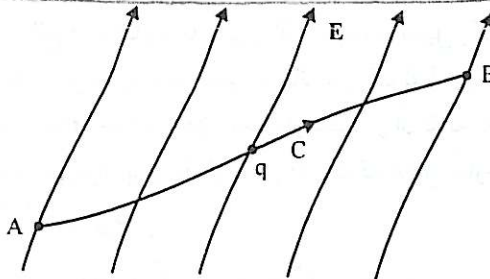
اگر مسیر C همه جا بر خطوط میدان عمود باشد (زاویه بین دو بردار E و dL برابر 90° درجه باشد) $E \cdot dL$ مساوی صفر و در نتیجه کار لازم برای حرکت دادن بار q در امتداد مسیر C صفر خواهد بود. تحت چنین شرایطی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B (یعنی V_{AB}) مساوی صفر بوده و دو نقطه A و B را هم پتانسیل گویند. مجموعه نقاطی که هم پتانسیل هستند تشکیل سطوحی به نام سطوح هم پتانسیل می‌دهند. بنابراین سطوح هم پتانسیل همیشه بر خطوط میدان عمود هستند.

پتانسیل بار نقطه‌ای

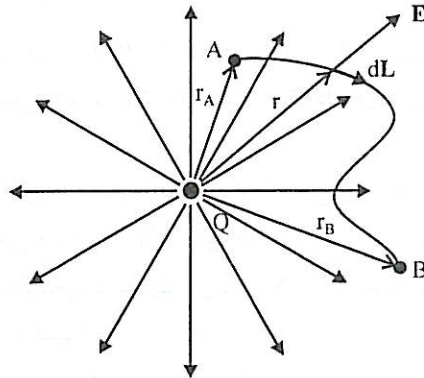
نقاط A و B را در میدان بار نقطه‌ای Q ، به صورت شکل ۲-۲۱، در نظر می‌گیریم. در دستگاه مختصات کروی میدان بار نقطه‌ای Q به صورت $E = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{a}_r$ و بردار عنصر طول برابر می‌باشد. با استفاده از رابطه ۸۲-۲ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B که از طریق مسیر دلخواه C به یکدیگر وصل شده‌اند به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_B^A \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \cdot (dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{a}_\phi)$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \quad (۸۳-۲)$$



شکل ۲-۲۰: تغییر مکان بار q در میدان الکتریکی E از نقطه A به نقطه B



شکل ۲-۲۱: اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B در میدان بار نقطه‌ای Q

رابطه ۲-۸۳ نشان می‌دهد که در میدان یک بار نقطه‌ای، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه فقط به فواصل آنها از محل بار بستگی دارد و نه به مسیری که دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند.

بحث ما تا به حال درباره اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بوده است، ولی اگر بخواهیم صحبت از پتانسیل یک نقطه بنماییم باید به دلخواه پتانسیل نقطه‌ای از فضا به نام «نقطه مبنا» را برابر صفر تعریف کنیم. بنابراین می‌توان گفت که پتانسیل یک نقطه مساوی اختلاف پتانسیل آن نقطه نسبت به نقطه مبنا می‌باشد. معمول است که پتانسیل نقطه‌ای واقع در بینهایت صفر فرض شود. با قرار دادن $r_B = \infty$ در رابطه ۲-۸۳، پتانسیل نقطه A را در میدان بار نقطه‌ای Q به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad (۸۴-۲)$$

با حذف اندیس A در رابطه ۲-۸۴، پتانسیل نقطه‌ای به فاصله r از بار Q برابر است با:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۸۵-۲)$$

تمام نقاطی که دارای پتانسیل ثابت V_0 هستند روی سطح کره‌ای به شعاع $r = Q/4\pi\epsilon_0 V_0$ قرار می‌گیرند. بنابراین سطوح هم‌پتانسیل در میدان بار نقطه‌ای Q سطوح کراتی هستند که مرکز همه آنها بار Q می‌باشد.

پس از انتخاب نقطه‌ای واقع در بینهایت به عنوان نقطه مبنا، پتانسیل یک نقطه از فضا در میدان الکتریکی E را به صورت کلی زیر تعریف می‌کنیم: «پتانسیل یک نقطه در میدان الکتریکی E برابر مقدار کاری است که میدان E برای حرکت دادن واحد بار مثبت از آن نقطه به بینهایت انجام می‌دهد.» پتانسیل یک نقطه را همچنین می‌توان برابر مقدار کاری دانست که عامل خارجی برای آوردن واحد بار مثبت از بینهایت به آن نقطه انجام می‌دهد.

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (۸۶-۲)$$

پتانسیل چندین بار نقطه‌ای

نقطه دلخواه A و بارهای نقطه‌ای Q_1, Q_2, \dots, Q_n را مطابق شکل ۲-۳ در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا از رابطه $E = \sum_{j=1}^n E_j$ به دست می‌آید که در آن میدان حاصل از بار Q_j است. پتانسیل نقطه A در میدان E را با به کار بردن رابطه ۲-۸۶ به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V_A &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_r^\infty (E_1 + E_2 + \dots + E_n) \cdot d\mathbf{L} \\ &= \int_r^\infty E_1 \cdot d\mathbf{L} + \int_r^\infty E_2 \cdot d\mathbf{L} + \dots + \int_r^\infty E_n \cdot d\mathbf{L} = \sum_{j=1}^n \int_r^\infty E_j \cdot d\mathbf{L} \quad (۸۷-۲) \end{aligned}$$

اما جمله $\int_r^\infty E_j \cdot d\mathbf{L}$ پتانسیل ناشی از بار Q_j به تنهایی در نقطه A می‌باشد و مقدار آن با توجه به رابطه ۲-۸۴ برابر $Q_j / 4\pi\epsilon_0 R_j$ است. پس می‌توان نوشت:

$$V_A = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j} \quad (۸۸-۲)$$

اگر نقطه A را با بردار مکان \mathbf{r} مشخص نموده و رابطه $R_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|$ را در رابطه ۲-۸۸ به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j|} \quad (۸۹-۲)$$

ملاحظه می‌شود که پتانسیل ناشی از چندین بار نقطه‌ای مساوی مجموع پتانسیل‌هایی است که هر کدام از بارها به تنهایی به وجود می‌آورد. به بیان دیگر اصل جمع آثار را می‌توان در مورد محاسبه پتانسیل چندین بار نقطه‌ای به کار برد.

پتانسیل برای توزیعهای پیوسته

برای محاسبه پتانسیل ناشی از توزیعهای پیوسته بار الکتریکی (خطی، سطحی و حجمی)، ابتدا بار را به تعداد زیادی از عناصر کوچک تقسیم نموده و هر عنصر بار را به صورت یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. پتانسیل در نقطه دلخواه A که به فاصله R_j از عنصر بار ΔQ_j قرار دارد و فقط از همین عنصر ناشی می‌شود برابر با $\Delta V_j = \Delta Q_j / (4\pi\epsilon_0 R_j)$ است. پتانسیل ناشی از کلیه عناصر را با جمع پتانسیل‌هایی که تک تک آنها به وجود می‌آورند به دست می‌آوریم:

$$V = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j} \quad (۹۰-۲)$$

در حد وقتی که $\Delta Q_j \rightarrow 0$ ، عبارت سمت راست رابطه ۲-۹۰ به یک انتگرال تبدیل می‌شود. بر حسب اینکه توزیع بار خطی، سطحی یا حجمی باشد انتگرال حاصل به ترتیب به صورت انتگرال خط، سطح یا حجم خواهد بود:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{C'} \frac{\rho_L(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'_j|} dL' \quad (91-2)$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_{S'} \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'_j|} dS' \quad (92-2)$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\rho_V(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'_j|} dV' \quad (93-2)$$

مثال ۸-۲ بار نقطه‌ای Q در نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r}' ، مطابق شکل ۲-۲۲، واقع است. پتانسیل حاصل از این بار را در نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r} ، وقتی که $r \gg r'$ باشد، به صورت یک سری برحسب r به دست آورید.

حل:

با به کار بردن رابطه ۲-۸۹، پتانسیل حاصل از بار Q در نقطه A عبارت است از:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

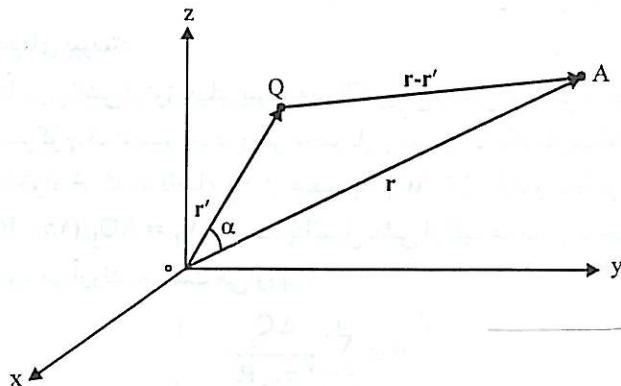
اما:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \alpha)^{1/2} = (r^2 + r'^2 - 2r \cdot r')^{1/2} = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r \cdot r'}{r^2} \right)^{1/2}$$

در نتیجه:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r \cdot r'}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (94-2)$$

$= r' < r$



شکل ۲-۲۲: بار نقطه‌ای Q و نحوه محاسبه پتانسیل حاصل از آن در فواصل دور

با استفاده از بسط :

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + \dots$$

در رابطه ۲-۹۴ داریم :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2r^2} [\mathcal{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^2 - (r\mathbf{r}')^2] + \dots \right\} \quad (95-2)$$

با توجه به اینکه $(r'/r) < 1$ می باشد، جملات با درجات بالاتر در سری ۲-۹۵ به سرعت کاهش یافته و کافی است به چند جمله اول سری اکتفا کنیم :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^3} [\mathcal{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^2 - (r\mathbf{r}')^2] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Qr' \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Qr'^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{\mathcal{V} \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) \end{aligned} \quad (96-2)$$

اگر چندین بار نقطه‌ای Q_1, Q_2, \dots و Q_n در نقاط $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots$ و \mathbf{r}'_n داشته باشیم، پتانسیل حاصل از آنها را در فواصل دور با استفاده از رابطه ۲-۹۶ و اصل جمع آثار به صورت زیر می نویسیم :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q_j}{8\pi\epsilon_0 r^3} [\mathcal{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_j)^2 - (r\mathbf{r}'_j)^2] + \dots \right\} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n Q_j}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum_{j=1}^n Q_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\sum_{j=1}^n Q_j [\mathcal{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_j)^2 - (r\mathbf{r}'_j)^2]}{8\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \end{aligned} \quad (97-2)$$

چنانچه بخواهیم پتانسیل حاصل از توزیع پیوسته‌ای را در فواصل دور به دست آوریم کافی است که هر کدام از مجموع‌ها را در رابطه ۲-۹۷ با انتگرال جایگزین نماییم. مثلاً برای توزیع پیوسته بار در حجم V خواهیم داشت :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\int_V dQ}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\int_V \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' dQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \quad (98-2)$$

پتانسیل حاصل از دوقطبی، چهارقطبی^۱ و چندقطبی^۲ در فواصل دور را می توان به سادگی و به سرعت از رابطه ۲-۹۷ به دست آورد. برای دوقطبی الکتریکی شکل ۲-۴ داریم : $Q_2 = -Q, Q_1 = Q$ ، $\mathbf{r}'_2 = (-d/2)\hat{\mathbf{a}}_z$ و $\mathbf{r}'_1 = (d/2)\hat{\mathbf{a}}_z$ در نتیجه :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q-Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q\frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} + (-Q)\frac{d}{r}(-\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

$$\cong \frac{Qd\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{Qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (99-2)$$

یادآوری می‌شود که $\mathbf{p} = Qd\hat{\mathbf{a}}_z$ گشتاور دو قطبی می‌باشد.

برای چهار قطبی خطی که در شکل ۲-۲۳ نشان داده شده است داریم:

$$Q_1 = Q, \quad Q_2 = Q, \quad Q_3 = -2Q$$

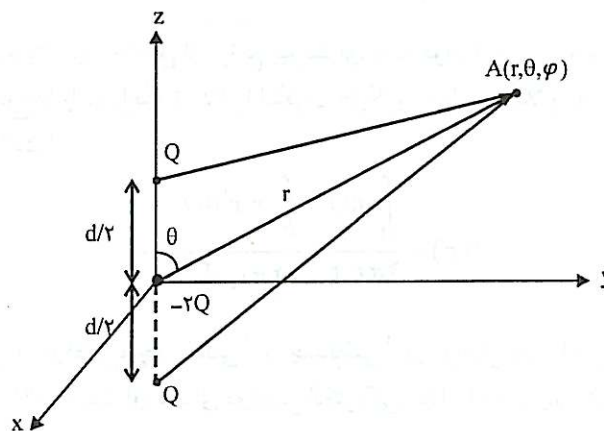
$$r_1' = \frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z, \quad r_2' = -\frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z, \quad r_3' = 0$$

در نتیجه پتانسیل حاصل از چهار قطبی در فواصل دور ($r \gg d$) برابر است با:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q+Q-2Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q\frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} - Q\frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} - 0}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$\left\{ Q \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} \right)^2 - \left(r \frac{d}{r} \right)^2 \right] + Q \left[\frac{1}{r} \left(-\frac{d}{r}\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} \right)^2 - \left(r \frac{d}{r} \right)^2 \right] - 2Q[0] \right\} + \dots$$

$$\cong \frac{2Q \left(\frac{d}{r} \right)^2}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left[r^2 (\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r})^2 - r^2 \right] = \frac{Q \left(\frac{d}{r} \right)^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2\theta - 1) \quad (100-2)$$



شکل ۲-۲۳: چهار قطبی الکتریکی خطی

ملاحظه می‌کنیم پتانسیل یک دوقطبی متناسب با r^{-2} و پتانسیل یک چهارقطبی خطی متناسب با r^{-3} تغییر می‌کند. بنابراین کاهش پتانسیل چهارقطبی به مراتب سریع‌تر از کاهش پتانسیل دوقطبی می‌باشد. اکنون که پتانسیل حاصل از دوقطبی و چهارقطبی را به دست آورده‌ایم، هر کدام از جملات رابطه ۲-۹۶ را می‌توانیم به خوبی تفسیر نماییم. اولین جمله پتانسیل حاصل از بار Q در مبدأ مختصات بوده و دومین جمله را می‌توان پتانسیل حاصل از یک دوقطبی با گشتاور Qr' دانست. سومین جمله را به منزله پتانسیل ناشی از یک چهارقطبی تلقی می‌کنیم و جملات با درجات بالاتر را ممکن است منسوب به پتانسیل حاصل از چندقطبی‌ها نمود.

مثال ۲-۹ پتانسیل حاصل از یک خط بار به طول بینهایت با چگالی یکنواخت ρ_L را در نقطه‌ای به فاصله r از آن به دست آورید.

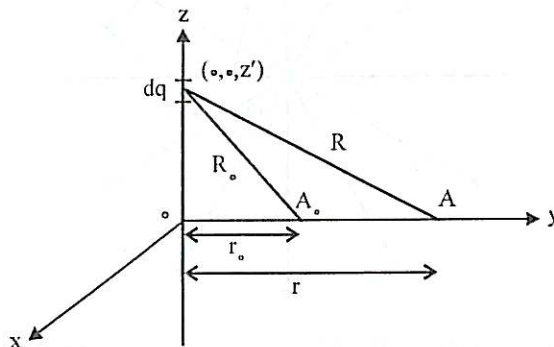
حل:

به طوری که خواهیم دید در این مثال نمی‌توان پتانسیل نقطه‌ای واقع در بینهایت را صفر فرض کرد. در نتیجه باید نقطه دیگری مانند A_0 را به عنوان نقطه مبنا انتخاب نمود و پتانسیل نقطه دلخواه A را برابر اختلاف پتانسیل بین A و A_0 تعریف کرد. با در نظر گرفتن شکل ۲-۲۴ پتانسیل حاصل از عنصر بار dq در نقطه A برابر است با:

$$dV = \frac{\rho_L dz'}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{\rho_L dz'}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{\rho_L dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{\rho_L dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r_0^2 + z'^2}} \quad (۱۰۱-۲)$$

پتانسیل حاصل از تمامی خط بار را با انتگرال گرفتن از رابطه ۲-۱۰۱ به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{dz'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2}} \right] = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{dz'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2}} \right]$$



شکل ۲-۲۴: خط بار به طول بینهایت و نحوه محاسبه پتانسیل حاصل از آن

$$= \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} [\ln(\sqrt{r^2 + z'^2} + z') - \ln(\sqrt{r_0^2 + z'^2} + z')]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{\sqrt{r^2 + z'^2} + z'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2} + z'} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \quad (۱۰۲-۲)$$

از رابطه ۱۰۲-۲ پیدا است که $r_0 = \infty$ انتخاب مناسبی برای نقطه مبنا نیست، زیرا در آن صورت پتانسیل تمام نقاط برابر بینهایت خواهد شد. همچنین از رابطه ۱۰۲-۲ می توان به سادگی نتیجه گرفت که سطوح هم پتانسیل استوانه‌هایی هستند که محور آنها خط بار باشد.

■

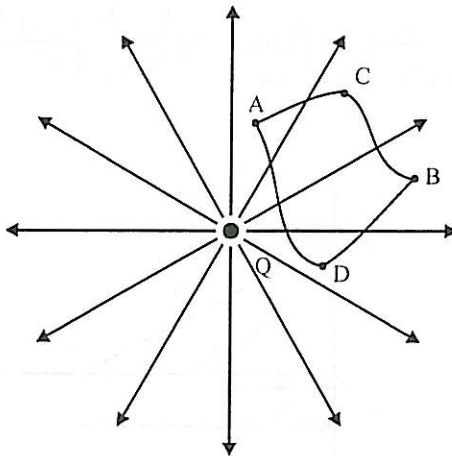
۶-۲ معادله کرل ماکسول برای میدان الکتریکی ساکن

در قسمت ۵-۲ نشان دادیم که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B در میدان یک بار نقطه‌ای، مستقل از مسیری است که دو نقطه A و B را به یکدیگر وصل می‌کند. حال اگر دو مسیر ACB و ADB را مطابق شکل ۲-۲۵ در میدان یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$V_{AB} = \int_{ACB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_{ADB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

پس از منتقل کردن انتگرال روی مسیر ADB به سمت چپ داریم:

$$\int_{ACB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_{ADB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{ACBDA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (۱۰۳-۲)$$



شکل ۲-۲۵: دو مسیر مختلف بین نقاط A و B در میدان بار نقطه‌ای Q

حال اگر چندین بار نقطه‌ای یا توزیع پیوسته‌ای از بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا داشته باشیم با به کار بردن اصل جمع آثار می‌توان نتیجه گرفت که برای هر میدان الکتریکی ساکن داریم:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (۱۰۴-۲)$$

رابطه ۱۰۴-۲ بیان می‌کند که سیرکولاسیون میدان الکتریکی ساکن حول هر مسیر بسته همواره صفر است. بنابراین میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار بوده و مقدار کار لازم برای حرکت دادن بار q در امتداد هر مسیر بسته در یک میدان الکتریکی ساکن همواره صفر می‌باشد. این رابطه در حقیقت مبنای قانون ولتاژ کیرشهف، که یکی از قوانین اساسی حاکم بر مدارهای الکتریکی است، می‌باشد. براساس این رابطه مجموع اختلاف پتانسیل‌ها (ولتاژها) روی هر مسیر بسته‌ای (حلقه) در یک مدار الکتریکی صفر است.

کرل میدان الکتریکی ساکن \mathbf{E} ، با توجه به تعریف کرل یک بردار که در رابطه ۱-۱۱۰ بیان شده است، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} \hat{\mathbf{a}}_n \quad (۱۰۵-۲)$$

اما با توجه به رابطه ۱۰۴-۲ داریم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (۱۰۶-۲)$$

رابطه اخیر به عنوان معادله کرل ماکسول برای میدان الکتریکی ساکن شناخته می‌شود. این معادله بیان می‌کند که کرل یک میدان الکتریکی ساکن در هر نقطه از فضا همواره برابر صفر است.

تا به حال دو معادله ماکسول را برای میدان الکتریکی ساکن مطالعه کرده‌ایم که عبارت از $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v / \epsilon_0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ می‌باشند. این دو معادله قادر به تشریح کامل خصوصیات و رفتار میدان الکتریکی ساکن می‌باشند. معادله دیورژانس ماکسول ارتباط بین میدان و مولد آن، یعنی بار الکتریکی را بیان می‌کند و معادله کرل ماکسول مشخص می‌کند که آیا یک میدان برداری می‌تواند یک میدان الکتریکی ساکن باشد یا نه، به عبارت دیگر هرگونه جوابی که از حل معادله دیورژانس ماکسول برای توزیع بار معینی به دست آید باید در معادله کرل ماکسول نیز صدق نماید.

۲-۷ پتانسیل و شدت میدان الکتریکی

در مبحث گرادیان، در فصل اول، نشان دادیم که برای هر تابع نرده‌ای ϕ رابطه $\oint (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{L} = 0$ همواره برقرار است. با به کار بردن این نتیجه در رابطه ۱-۱۱۰، تساوی $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ فوراً به دست خواهد آمد. رابطه اخیر بیان می‌کند که اگر برداری مساوی گرادیان یک تابع نرده‌ای باشد کرل آن صفر خواهد بود. همچنین بالعکس می‌توان گفت که اگر کرل برداری برابر صفر باشد باید بتوان آن بردار را بر حسب گرادیان یک تابع نرده‌ای بیان نمود. به این ترتیب چون برای میدان الکتریکی ساکن $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، باید بتوان \mathbf{E} را بر حسب گرادیان تابعی نرده‌ای مانند ϕ نوشت. اما سؤالی که بلافاصله مطرح

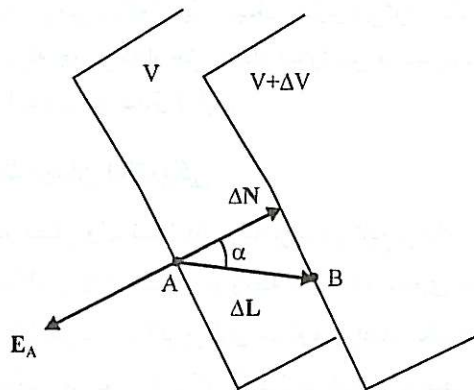
می‌شود این است که ماهیت تابع ϕ چیست؟ برای اینکه به پاسخ این سؤال پی ببریم باید به یاد آوریم که گرادیان یک تابع زده‌ای در هر نقطه، برداری است عمود بر سطحی که از آن نقطه می‌گذرد و تابع زده‌ای روی آن برابر مقدار ثابتی می‌باشد. حال اگر توجه خود را به تابع پتانسیل V معطوف نماییم، نتیجه می‌گیریم که بردار ∇V در جهت عمود بر سطوح هم‌پتانسیل می‌باشد. از طرف دیگر چون خطوط میدان بر سطوح هم‌پتانسیل عمود هستند میدان الکتریکی E نیز در جهت عمود بر سطوح هم‌پتانسیل بوده و در نتیجه بردارهای E و ∇V از امتدادهای یکسان برخوردارند.

برای اینکه رابطه دقیق بین E و ∇V را به دست آوریم دو سطح هم‌پتانسیل V و $V+\Delta V$ را در میدان الکتریکی ساکن E ، مطابق شکل ۲-۲۶، در نظر می‌گیریم. اختلاف پتانسیل دو سطح (یعنی ΔV) بینهایت کوچک فرض می‌شود. واضح است که جهت میدان E باید در جهت کاهش پتانسیل باشد، زیرا اگر بار q از نقطه B به نقطه A در امتداد میدان تغییر مکان دهد و پتانسیل نقطه B بالاتر از پتانسیل نقطه A باشد کار لازم برای حرکت دادن بار q توسط میدان انجام می‌گیرد و میدان باید در جهت تغییر مکان، یعنی در جهت کاهش پتانسیل، باشد. چون دو سطح هم‌پتانسیل V و $V+\Delta V$ خیلی به یکدیگر نزدیک هستند میدان الکتریکی بین آنها را در همسایگی نقطه A یکنواخت و برابر میدان در نقطه A فرض می‌کنیم. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B برابر است با:

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_A \cdot \Delta L = V - (V + \Delta V) = -\Delta V$$

اما از طرف دیگر:

$$E_A \cdot \Delta L = -E_A \Delta N = -\Delta V$$



شکل ۲-۲۶: دو سطح با پتانسیل‌های V و $V+\Delta V$ و به فاصله ΔN از یکدیگر

که ΔN تصویر ΔL روی امتداد عمود بر سطح V می‌باشد. در نتیجه:

$$E_A = \frac{\Delta V}{\Delta N}$$

و

$$E_A = -\frac{\Delta V}{\Delta N} \hat{a}_n \quad (107-2)$$

که \hat{a}_n بردار واحدی در جهت ΔN می‌باشد. در حد وقتی که ΔN به سمت صفر میل کند، \hat{a}_n $(\Delta V/\Delta N)$ برابر گرادیان تابع V در نقطه A می‌شود. اما چون A یک نقطه دلخواه است می‌توان اندیس A را از رابطه ۲-۱۰۷ حذف نمود و رابطه بین میدان الکتریکی ساکن E و پتانسیل V را در یک نقطه به صورت زیر نوشت:

$$E = -\nabla V \quad (108-2)$$

با معلوم بودن پتانسیل می‌توان شدت میدان الکتریکی را به سادگی با استفاده از رابطه ۲-۱۰۸ محاسبه نمود. مثال ۲-۱۰ مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی دوقطبی شکل ۲-۴ و چهارقطبی شکل ۲-۲۳ که پتانسیل آنها در فواصل دور به ترتیب از روابط ۲-۹۹ و ۲-۱۰۰ به دست می‌آید.

حل:

دوقطبی:

$$\begin{aligned} E = -\nabla V &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \right) \\ &= \frac{-Qd}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \hat{a}_\theta \right] \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \end{aligned}$$

توجه کنید که این نتیجه همان رابطه ۲-۱۴ است که قبلاً به روش دیگری محاسبه شده بود. چهارقطبی:

$$\begin{aligned} E &= \frac{-Q \left(\frac{d}{r} \right)^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma \cos^2 \theta - 1}{r^3} \right) \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\gamma \cos^2 \theta - 1}{r^3} \right) \hat{a}_\theta \right] \\ &= \frac{Q d^2}{16\pi\epsilon_0 r^5} [\gamma (\gamma \cos^2 \theta - 1) \hat{a}_r + 6 \sin \theta \cos \theta \hat{a}_\theta] \end{aligned}$$

■

۸-۲ خلاصه فصل

در این فصل میدانهای الکتریکی ساکن را که از توزیعهای بار الکتریکی معلومی در خلأ ناشی می شوند مورد بحث و بررسی قرار دادیم. کلیه مطالعات این فصل بر اساس قانون تجربی کولمب استوار می باشند. به طور خلاصه:

- قانون کولمب را بیان نموده و سپس کمیت شدت میدان الکتریکی (E) حاصل از یک بار نقطه‌ای را تعریف نمودیم. این تعریف را به توزیعهای دیگر و از جمله چندین بار نقطه‌ای و توزیعهای پیوسته از نوع خطی، سطحی و حجمی گسترش دادیم. روابطی که میدان الکتریکی را بر حسب چگالی توزیع بار بیان می کنند به دست آوردیم.
- خطوط میدان و شیوه تعیین آنها را در دستگاههای مختصات مختلف بررسی نمودیم.
- قانون گوس را برای یک توزیع دلخواه بار الکتریکی مطالعه نموده و استفاده از آن را جهت محاسبه میدان الکتریکی ناشی از برخی توزیعهای بار که ویژگیهای لازم را دارا باشند مورد بحث قرار دادیم. همچنین شکل نقطه‌ای قانون گوس را که به عنوان یکی از معادلات ماکسول شناخته می شود آموختیم.
($\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$)
- پتانسیل را تعریف نموده و نحوه محاسبه آن را برای توزیعهای مختلف بار الکتریکی ارائه نمودیم.
- نشان دادیم که میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار است و کرل آن همواره برابر صفر می باشد.
($\nabla \times E = 0$)
- ارتباط میدان الکتریکی با پتانسیل را تحقیق کردیم و این نتیجه مهم را گرفتیم که:

$$E = -\nabla V$$

۹-۲ مسائل خودآزمایی

محاسبه شدت میدان الکتریکی و پتانسیل ناشی از توزیعهای گوناگون بار الکتریکی هدف اصلی اغلب این مسائل می باشد. با توجه به مطالب آموخته شده در این فصل، محاسبه میدان الکتریکی ممکن است با استفاده از یکی از سه روش زیر انجام پذیرد:

الف) انتگرالگیری مستقیم با استفاده از روابط ۲-۹، ۲-۲۰، ۲-۳۱ و ۲-۳۸ به ترتیب برای توزیعهای بار نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی.

ب) استفاده از قانون گوس، رابطه ۲-۵۸.

ج) محاسبه پتانسیل با استفاده از روابط ۲-۹۰ تا ۲-۹۳ و سپس به دست آوردن گرادیان آن با استفاده از رابطه ۲-۱۰۸.

پرسشی که به ذهن می آید این است که کدام یک از روشهای مذکور را باید در بررسی مسئله خاص به کار برد. گرچه از دیدگاه اصولی استفاده از هر یک از روشهای مذکور بلامانع است، به ویژه اگر محاسبات عددی و روشهای نرم‌افزاری را نیز مد نظر داشته باشیم، لیکن سادگی محاسبه میدان الکتریکی، به