$$\oint_C (\nabla V) \, . \, dL = 0$$

- قضیه هلمولتز راکه بیان می‌دارد یک بردار را با در دست داشتن دیورژانس و کرل آن می‌توان به طور کامل (تا حد یک بردار ثابت) تعیین نمود، به اختصار بررسی کردیم.

۱-۷ مسائل خودآزمایی

این مسائل را می‌توان عمدتاً به دو گروه دسته‌بندی نمود:

الف) مسائلی که مستقیماً در برگیرنده عملیات ساده برداری از قبیل جمع، تفریق، ضرب داخلی، ضرب خارجی، محاسبه اندازه بردار و مشتق‌گیری بوده یا بررسی آنها مستلزم استفاده از مفاهیم مذکور می‌باشد. مسائل ۱ تا ۱۰ را می‌توان در زمره این گروه به شمار آورد. در این‌گونه مسائل بیان همه بردارهای به کار رفته در یک رابطه برحسب مؤلفه‌هایشان در یک دستگاه مختصات واحد بسیار مفید خواهد بود. همچنین، بیان بردارهای واحد استوانه‌ای و کروی برحسب بردارهای واحد مستطیلی با استفاده از روابط ۱-۴۸ تا ۱-۵۲ به سادگی زیادی در حل برخی مسائل مانند ۲، ۳ و ۹ منجر می‌شود.

ب) گروه دیگر این مسائل شامل انتگرالهای خط، سطح و حجم می‌باشند. مسائل ۱۱ تا ۲۲ از این‌گونه‌اند. در این مسائل، انتگرال‌گیری ممکن است با تجزیه انتگرال مورد نظر روی بخشهای مختلف مسیر یا سطح مورد نظر انجام گیرد. لیکن اگر مسیر انتگرال یک منحنی بسته باشد استفاده از قضیه استوکس (رابطه ۱-۱۲۷)، و در صورتی که سطح انتگرال یک سطح بسته باشد استفاده از قضیه دیورژانس (رابطه ۱-۱۰۶) غالباً به آسان‌تر شدن محاسبه انتگرال مورد نظر می‌انجامد. به عنوان مثال، حل مسئله ۱۲-ب با استفاده از قضیه استوکس به مراتب ساده‌تر از انتگرال‌گیری مستقیم می‌باشد.

بالاخره، اگر کمیت برداری مورد انتگرال‌گیری شامل بردارهای واحد استوانه‌ای یا کروی باشد (به عبارت دیگر انتگرال از نوع $\int_C A \, dL$، $\int_C A \, dL$، $\int_C A \times dL$، $\int_S A \, dS$، $\int_S A dS$، $\int_S A \times dS$ یا $\int_V A \, dV$، که در آنها بردارهای A، dL و dS در دستگاه مختصات استوانه‌ای یا کروی بیان شده‌اند، باشد) چون $\hat{a}_{r_s}$، $\hat{a}_{r_c}$، $\hat{a}_\theta$ و $\hat{a}_\varphi$ در نقاط مختلف فضا جهت ثابتی نداشته و متغیر محسوب می‌شوند، نمی‌توان آنها را به بیرون انتگرال انتقال داد. از این رو بیان این بردارهای واحد برحسب بردارهای واحد مستطیلی $\hat{a}_x$، $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ که همواره ثابت هستند ضروری است. این‌گونه انتگرالها در محاسبه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به ترتیبی که در فصول ۲ و ۵ ملاحظه خواهد شد کاربرد پیدا می‌کنند. نمونه‌هایی از این‌گونه انتگرالها را در مسائل ۲۰ تا ۲۲ بررسی می‌کنیم.

۱. به فرض آنکه $A = ۲\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z$ ، $B = \hat{a}_x + \hat{a}_z$ و $C = \hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + ۲\hat{a}_z$ باشد، عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $A+B$ ب) $|B-C|$ ج) $B.C$

د) $A\times B$ هـ) $A.(B\times C)$

۲. صحت اتحادهای برداری زیر را تحقیق کنید :

الف) $A.(B\times C) = B.(C\times A) = C.(A\times B)$

ب) $A\times(B\times C) = B(A.C) - C(A.B)$

ج) $(A\times B).(C\times D) = (A.C)(B.D) - (B.C)(A.D)$

د) $A\times(B\times C) + B\times(C\times A) + C\times(A\times B) = o$

۳. نتایج ضرب داخلی یا خارجی بردارهای واحد زیر را به دست آورید :

الف) $\hat{a}_\varphi \times \hat{a}_x$ ب) $\hat{a}_{r_s} \times \hat{a}_z$ ج) $\hat{a}_{r_c} . \hat{a}_\theta$

د) $\hat{a}_\theta \times \hat{a}_z$ هـ) $\hat{a}_{r_c} . \hat{a}_{r_s}$ و) $\hat{a}_{r_c} \times \hat{a}_{r_s}$

ز) $\hat{a}_{r_s} \times \hat{a}_y$ ح) $\hat{a}_x . \hat{a}_{r_c}$ ط) $\hat{a}_{r_s} . \hat{a}_z$

(جهت رفع ابهام بردار واحد $\hat{a}_r$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای با $\hat{a}_{r_c}$ و بردار واحد $\hat{a}_r$ در دستگاه مختصات کروی با $\hat{a}_{r_s}$ نشان داده شده است.)

۴. بردار $A = (۳/r)\,\hat{a}_r$ در دستگاه مختصات کروی داده شده است. مقادیر A و A_y را در نقطه $M(-۲,-۴,۴)$ محاسبه نمایید.

۵. بردارهای $A = ۳\hat{a}_x + ۸\hat{a}_y + \hat{a}_z$ ، $B = \hat{a}_x - ۶\hat{a}_y + ۵\hat{a}_z$ و $C = ۷\hat{a}_x - ۴\hat{a}_z$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین :

الف) بردار واحدی که بر دو بردار A و B عمود باشد،

ب) بردار واحدی که بر بردارهای $A-B$ ، $B-C$ و $C-A$ عمود باشد،

ج) مساحت مثلثی که از وصل سه نقطه انتهایی بردارهای A ، B و C حاصل شود.

۶. سه نقطه به مختصات $A(-۴ , ۶ , ۵)$ ، $B(-۲ , ۳ , ০)$ و $C(۶ , ۲ , -۳)$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه :

الف) مساحت مثلث ABC

ب) بردار واحدی که بر سطح مثلث ABC عمود باشد.

۷. بردار $A = ۲xyz\,\hat{a}_x - ۵(x+y+z)\hat{a}_z$ داده شده است.

الف) بردار A را بر حسب مختصات استوانه‌ای و بردارهای واحد استوانه‌ای بیان کنید.

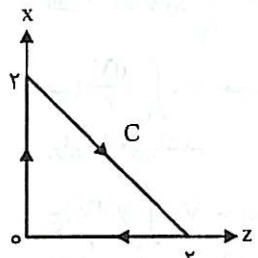
ب) $|A|$ را در نقطه $(r=۲ , \varphi=\pi/۳ , z=۳)$ محاسبه کنید.

۸. نقطه $A(۳ , -۴ , ۵)$ را در نظر بگیرید.
الف) بردار واحد $\hat{a}_x$ را بر حسب مؤلفه‌های مختصات کروی در نقطه A بیان کنید.
ب) بردار واحد $\hat{a}_\theta$ را بر حسب مؤلفه‌های مختصات مستطیلی در نقطه A بیان کنید.

۹. بردارهای A و B مفروضند. رابطه‌ای به دست آورید که مؤلفه بردار A را در امتداد بردار B تعیین نماید. این رابطه باید کاملاً عمومی و مستقل از دستگاه مختصات به خصوصی باشد. سپس با استفاده از رابطه‌ای که به دست آورده‌اید مؤلفه $A = -۴\hat{a}_x + ۲\hat{a}_y + ۳\hat{a}_z$ را در امتداد $B = ۳\hat{a}_x + ۴\hat{a}_y - \hat{a}_z$ محاسبه کنید.

۱۰. مشتقات $d\hat{a}_r/d\varphi$ و $d\hat{a}_\varphi/d\varphi$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

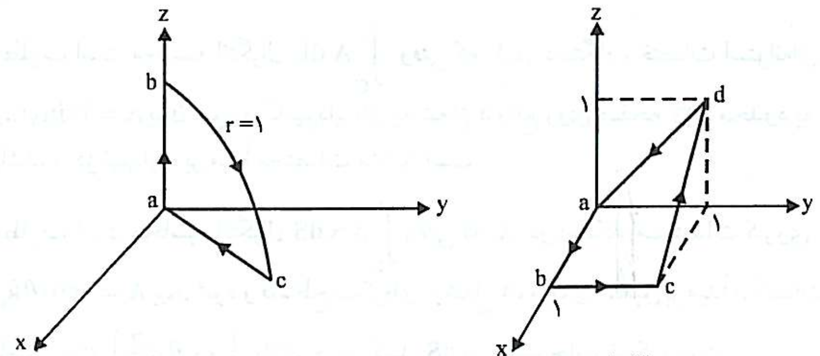
۱۱. مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\int_C A \,.\, dL$ از نقطه $A(۲ , ۱ , -۲)$ تا نقطه $B(۸ , ۲ , -۲)$ برای $A = y\,\hat{a}_x + x\,\hat{a}_y$ وقتی که:
الف) مسیر C عبارت از خط راستی است که A را به B وصل می‌کند.
ب) مسیر C در امتداد یک سهمی به معادله $x = ۲y^۲$ می‌باشد.
آیا میدان برداری A از نوع پایستار است ؟ توضیح دهید.



شکل ۱-۲۸

۱۲. حاصل $\oint_C A \,.\, dL$ را برای بردار $A = (۲x^۲+z^۲)\hat{a}_x + (xz-z^۲)\hat{a}_z$ و مسیر بسته C مطابق شکل ۱-۲۸ محاسبه نمایید. این محاسبه را با استفاده از قضیه استوکس تکرار کنید.

۱۳. انتگرال خط $\oint_C A \,.\, dL$ را برای دو حالت زیر محاسبه نمایید:
الف) $A = xy\,\hat{a}_x + yz\,\hat{a}_y + zx\,\hat{a}_z$ و C به‌صورت مسیربسته abcda مطابق شکل ۱-۲۹-الف.
ب) $A = (e^{-r}/r)\,\hat{a}_\theta$ و C به‌صورت مسیر بسته abca مطابق شکل ۱-۲۹-ب.



(ب) (الف)
شکل ۱-۲۹

۱۴. برای بردار $A = x^2yz\,\hat{a}_x + y^2zx\,\hat{a}_y + z^2xy\,\hat{a}_z$ انتگرال سطح $\oint_S A\,.\,dS$ را محاسبه کنید. S سطح بسته‌ای است که به صفحات $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$ و $x + 2y + 3z = 3$ محدود می‌باشد.

۱۵. میدان برداری $A = r\cos\varphi\,\hat{a}_r + r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi + \hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. مطلوب است محاسبه $\oint_S A\,.\,dS$ که S عبارت است از:

الف) سطح بسته محدود به صفحات $z = 0$ و $z = l$ و سطح استوانه‌ای $r = a$.

ب) سطح بسته محدود به صفحات $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$ و $z = l$ و سطح استوانه‌ای $r=a$.

۱۶. مسئله ۱۵ را با استفاده از قضیه دیورژانس تکرار نمایید.

۱۷. بردار $A = z\,\hat{a}_x$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $\oint_S A\,.\,dS$ که در آن S سطح نیم‌کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات، شعاع ۳ و محدود به صفحه xy می‌باشد. مسئله را از دو طریق، روش انتگرال‌گیری مستقیم و روش مبتنی بر قضیه دیورژانس حل کنید.

۱۸. انتگرالهای حجم زیر را محاسبه نمایید:

الف) $\int_V xyz\,dV$، V حجم محدود به صفحات $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$ و $x+y+z = 1$ است.

ب) $\int_V \frac{dV}{r}$، V حجم استوانه‌ای است که محورش منطبق بر محور z، شعاعش برابر a و طولش برابر l می‌باشد.

ج) $\int_V y\,dV$، V حجم بخشی از کره‌ای به شعاع واحد، به مرکز مبدأ مختصات و واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا می‌باشد (در $\frac{1}{8}$ اول فضا $x>0$، $y>0$ و $z>0$ است).

۱۹. دیورژانس و کرل بردارهای زیر را محاسبه نمایید:

الف) $A = y\hat{a}_x - x\,\hat{a}_y$ ب) $B = r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi$

ج) $C = r^2\,\hat{a}_r + r\sin\theta\,\hat{a}_\theta$

۲۰. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C A\,dL$ وقتی که A در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت $A = 2\sin\varphi\,\hat{a}_r$ بیان شود و C نیم‌دایره‌ای به شعاع a واقع روی صفحه xy و محدود به $0<\varphi<\pi$ باشد. مرکز نیم‌دایره بر مبدأ مختصات منطبق است.

۲۱. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_S A \times dS$ وقتی که A در دستگاه مختصات کروی به‌صورت $A = r\cos\theta\,\hat{a}_\varphi$ بیان شود و S سطح نیم‌کره‌ای به شعاع a، مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات و واقع در ناحیه $z>0$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ باشد. فرض کنید dS در جهت خارج نیم‌کره است.

۲۲. مطلوب است محاسبه $\int_V \mathbf{A}\, dV$ وقتی که $\mathbf{A}$ در دستگاه مختصات کروی به‌صورت $\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{a}}_r$ بیان شود، V حجم $\frac{1}{8}$ کره‌ای به شعاع a، مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات و محدود به $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ و $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ باشد.

۱-۸ مسائل

۱. بردارهای $\mathbf{A}=5\hat{\mathbf{a}}_r-3\hat{\mathbf{a}}_\varphi+2\hat{\mathbf{a}}_z$ و $\mathbf{B}=2\hat{\mathbf{a}}_r+\hat{\mathbf{a}}_\varphi-3\hat{\mathbf{a}}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای دارای مبدأ مشترک می‌باشند. مطلوب است تعیین

الف) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ ب) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

ج) بردار واحدی که بر بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود باشد.

د) زاویه بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$.

۲. بردارهای $\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{a}}_x+\hat{\mathbf{a}}_y+\hat{\mathbf{a}}_z$ و $\mathbf{B}=\alpha\hat{\mathbf{a}}_x+\beta\hat{\mathbf{a}}_y+2\hat{\mathbf{a}}_z$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه α و β برای حالات زیر:

الف) بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی باشند.

ب) بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بر یکدیگر عمود بوده و $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=3\sqrt{2}$ باشد.

۳. دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دارای مبدأ مشترک هستند. نشان دهید که مساحت مثلثی که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ضلع آن باشند از رابطه $S=\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ به دست می‌آید.

۴. دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ داده شده‌اند. نشان دهید که:

الف) مؤلفه بردار $\mathbf{A}$ در امتداد بردار $\mathbf{B}$ برابر است با $\mathbf{C}=\frac{\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2}$.

ب) مؤلفه بردار $\mathbf{A}$ در امتداد عمود بر بردار $\mathbf{B}$ برابر است با $\mathbf{D}=\mathbf{A}-\frac{\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2}$.

۵. سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ دارای مبدأ مشترک می‌باشند. نقاط انتهایی این سه بردار تشکیل صفحه‌ای می‌دهند که آن را P می‌نامیم. ثابت کنید که بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}$ بر صفحه P عمود می‌باشد.

۶. سه بردار $\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{a}}_y$، $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{a}}_x$ و $\mathbf{C}=2\hat{\mathbf{a}}_z$ داده شده‌اند. با استفاده از نتیجه مسئله ۵ تعیین کنید کدام‌یک از بردارهای زیر بر صفحه متشکل از نقاط انتهایی بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ عمود، با آن موازی، یا نه موازی و نه عمود بر آن می‌باشد.

الف) $\mathbf{D}=2\hat{\mathbf{a}}_x+\hat{\mathbf{a}}_y+\hat{\mathbf{a}}_z$ ب) $\mathbf{D}=\hat{\mathbf{a}}_x-\hat{\mathbf{a}}_y-\hat{\mathbf{a}}_z$ ج) $\mathbf{D}=\hat{\mathbf{a}}_x+2\hat{\mathbf{a}}_y$

۷. سه نقطه $M(-1,2,3)$، $N(4,-2,-1)$ و $Q(1,3,2)$ تشکیل یک صفحه می‌دهند. مطلوب است تعیین بردار واحدی که بر صفحه مزبور عمود باشد و در جهت دور شدن از مبدأ مختصات باشد (وقتی که مبدأ در امتداد این بردار واحد قرار گیرد).

۸. نقطه $M(۲,-۲,۳)$ در دستگاه مختصات مستطیلی مفروض است. مختصات نقطه M را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی به دست آورید.

۹. نقاط $M(۵,\pi/۴,۳)$ و $N(۴,۳\pi/۴,۳)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. مختصات نقاط M و N را در دستگاههای مختصات مستطیلی و کروی به دست آورید.

۱۰. نقاط $M(۵,۳\pi/۴,۵\pi/۴)$ و $N(۴,\pi/۳,۲\pi/۳)$ در دستگاه مختصات کروی داده شده‌اند. مختصات نقاط M و N را در دستگاههای مختصات مستطیلی و استوانه‌ای به دست آورید.

۱۱. بردار $\mathbf{A}=-۳\hat{a}_x+۲\hat{a}_y-۵\hat{a}_z$ در نقطه $M(۱,\sqrt{۳},-۲)$ در دستگاه مختصات مستطیلی داده شده است. بردار A را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید.

۱۲. بردار $\mathbf{B}=-۲\hat{a}_r+۳\hat{a}_\varphi+\hat{a}_z$ در نقطه $N(۵,\pi/۳,۳)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. بردار B را در دستگاههای مختصات مستطیلی و کروی بیان کنید.

۱۳. بردار $\mathbf{C}=۳\hat{a}_r-\hat{a}_\theta-۲\hat{a}_\varphi$ در نقطه $P(۱,\pi/۴,۳\pi/۴)$ در دستگاه مختصات کروی داده شده است. بردار C را در دستگاههای مختصات مستطیلی و استوانه‌ای بیان کنید.

۱۴. بردارهای A، B و C را به گونه‌ای که در مسائل ۱۱، ۱۲ و ۱۳ تعریف شده‌اند در نظر بگیرید. مطلوب است محاسبه عبارات زیر:

الف) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

ب) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ در نقطه $N(۵,\pi/۳,۳)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای

ج) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}$ در نقطه $P(۱,\pi/۴,۳\pi/۴)$ در دستگاه مختصات کروی

د) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

راهنمایی: کلیه محاسبات را در دستگاه مختصات مستطیلی انجام دهید، آنگاه نتیجه را اگر کمیت برداری باشد در دستگاه مورد نظر بیان کنید.

۱۵. بردارهای زیر را برحسب مختصات و بردارهای واحد در دستگاه مختصات کروی بیان کنید.

الف) $\mathbf{A}=y\,\hat{a}_x+x\,\hat{a}_y$

ب) $\mathbf{B}=\cos\varphi\,\hat{a}_r+\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi+\sin\varphi\,\hat{a}_z$

۱۶. سه بردار $\mathbf{A}=۲\hat{a}_x+۵\hat{a}_y-\hat{a}_z$، $\mathbf{B}=-۳\hat{a}_x+۲\hat{a}_z$ و $\mathbf{C}=\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۲\hat{a}_z$ دارای مبدأ مشترک $O(۰,۰,۰)$، که مرکز مختصات است، می‌باشند. مطلوب است محاسبه

الف) مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط انتهایی بردارهای A، B و C باشند.

ب) فاصله نقطه O از صفحه مثلث مذکور در بند (الف).

۱۷. صحت اتحادهای برداری زیر را تحقیق کنید:

الف) $(A+B).[(B+C)\times(C+A)]=2A.(B\times C)$

ب) $(A\times B).[(B\times C)\times(C\times A)]=[A.(B\times C)]^{2}$

ج) $(A\times B).(C\times D)-(B\times C).(D\times A)=(A.B)(C.D)-(B.C)(D.A)$

د) $|A\times B|^{2}+|A.B|^{2}=|A|^{2}|B|^{2}$

هـ) $A\times(B\times(\dots A\times(B\times(A\times B))\dots))=(-1)^{n-1}(A.B)^{n-1}(A\times B)$ که A و B هر کدام n بار در عبارت سمت چپ ظاهر می‌شوند.

۱۸. سه بردار A، B و C مفروضند. نشان دهید که اگر $A.(B\times C)=0$ باشد، هر یک از بردارها را می‌توان حاصل ترکیب خطی دو بردار دیگر دانست.

۱۹. فرض کنید A و B دو بردار واقع در صفحه xy باشند که با محور x به ترتیب زوایای α و β می‌سازند. با استفاده از ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارهای A و B صحت اتحادهای مثلثاتی زیر را تحقیق کنید.

الف) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$

ب) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$

ج) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta$

د) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$

۲۰. مثلثی از سه بردار A، B و C تشکیل شده است به طوری که $C=B-A$ می‌باشد؛ اندازه این بردارها را به ترتیب a، b و c فرض می‌کنیم. با استفاده از رابطه $C.C=(B-A).(B-A)$ نشان دهید که $c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos\alpha$ که α زاویه بین بردارهای A و B می‌باشد.

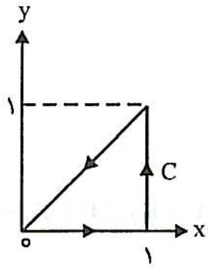
۲۱. مثلث ABC به اضلاع AB=c، BC=a و CA=b را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه برداری $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ و ضرب خارجی بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ یا $\overrightarrow{CA}$ در رابطه مزبور نشان دهید که:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

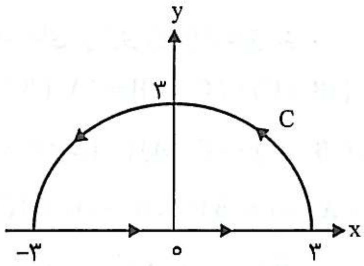
۲۲. مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\oint_C A.dL$ برای بردار $A=-(2x^{2}+y^{2})\hat{a}_x+xy\,\hat{a}_y$ و مسیر بسته C مطابق شکل ۱-۳۰.

۲۳. مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\oint_C A.dL$ برای بردار $A=r\cos\varphi\,\hat{a}_r+\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و مسیر بسته C مطابق شکل ۱-۳۱.

۲۴. مسائل ۲۲ و ۲۳ را با استفاده از قضیه استوکس تکرار نمایید.



شکل ۱-۳۰

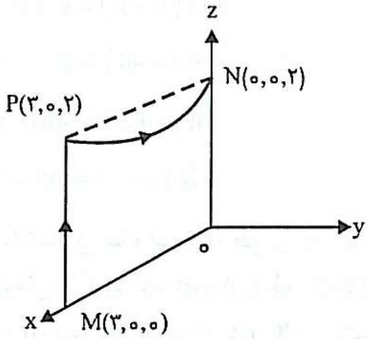


شکل ۱-۳۱

۲۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_M^N \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}$ در امتداد مسیر C به شرح زیر و بردار A که در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت $\mathbf{A} = ۳r\cos\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_r + ۴\sin\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi + ۲\cos\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_z$ بیان می‌شود:

الف) مسیر C شامل یک پاره‌خط از نقطه $M(۳,۰,۰)$ به نقطه $P(۳,۰,۲)$ و یک نیم‌دایره مطابق شکل ۱-۳۲ می‌باشد.

ب) مسیر C عبارت از پاره‌خطی است که مستقیماً از M به N وصل می‌شود.



شکل ۱-۳۲

۲۶. مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ برای بردار $\mathbf{A} = xz\,\hat{\mathbf{a}}_x - yx^۲\,\hat{\mathbf{a}}_y - xy\,\hat{\mathbf{a}}_z$ و S سطح مکعبی محدود به صفحات $x = \pm ۱$ ، $y = \pm ۱$ و $z = \pm ۱$ است.

۲۷. مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ برای بردار $\mathbf{A} = r\sin\theta\,\hat{\mathbf{a}}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_\theta$ در دستگاه مختصات کروی، که S به‌صورت سطح نیم‌کره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ مختصات و محدود به صفحه xy می‌باشد.

۲۸. مسائل ۲۶ و ۲۷ را با استفاده از قضیه دیورژانس تکرار نمایید.

۲۹. انتگرالهای حجم زیر را محاسبه نمایید:

الف) $\int_V x^2yz\,dV$ که V محدود به سطوح x=۰، y=۰، z=۰ و $x^2+y^2+z^2=1$ می‌باشد. در درون این حجم x>۰، y>۰ و z>۰ است.

ب) $\int_V r\cos^2\varphi\,dV$ که V محدود به سطوح r=۲ و z=۳ و z=-۳ است.

ج) $\int_V r\sin\theta\,dV$ که V فضای محصور بین دو نیم‌کره r=۱، r=۳ و صفحه z=۰ است.

۳۰. برای هر یک از میدانهای برداری زیر تعیین کنید آیا میدان از نوع سیملوله‌ای، چرخشی یا هر دو می‌باشد:

الف) $\mathbf{A}=2xy\,\hat{a}_x-y^2\,\hat{a}_y$ ب) $\mathbf{B}=x^2\,\hat{a}_x+y^2\,\hat{a}_y+z^2\,\hat{a}_z$

ج) $\mathbf{C}=r\sin^2\varphi\,\hat{a}_r+2\cos^2\varphi\,\hat{a}_\varphi$ د) $\mathbf{D}=\frac{1}{r}\hat{a}_r+r\cos\theta\,\hat{a}_\theta$

۳۱. از طریق بسط در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که دیورژانس کرل یک بردار و کرل گرادیان یک کمیت نرده‌ای همواره صفر است، یعنی:

الف) $\nabla.(\nabla\times\mathbf{A})=0$

ب) $\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$

۳۲. از طریق بسط در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که:

الف) $\nabla.(f\mathbf{A})=f\nabla.\mathbf{A}+\mathbf{A}.\nabla f$

ب) $\nabla\times(f\mathbf{A})=(\nabla f)\times\mathbf{A}+f(\nabla\times\mathbf{A})$

ج) $\nabla.(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}.(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}.(\nabla\times\mathbf{B})$

۳۳. از طریق بسط در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که برای توابع نرده‌ای f و g داریم:

الف) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

ب) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

ج) $\nabla(e^f)=(\nabla f)e^f$

د) $\nabla^2(\nabla f)=\nabla(\nabla^2 f)$

توجه کنید که در بند (د)، لاپلاسین سمت راست از نوع کمیت نرده‌ای و لاپلاسین سمت چپ از نوع برداری می‌باشد.

۳۴. ثابت کنید :

$$\int_V (\nabla f)\, dV = \oint_S f\, dS$$

که f یک کمیت نرده‌ای و V حجمی محدود به سطح بسته S است.

۳۵. ثابت کنید :

$$\int_S \nabla f \times dS = -\oint_C f\, dL$$

که f یک کمیت نرده‌ای و S سطحی باز محدود به منحنی بسته C است.

۳۶. ثابت کنید :

$$\int_V (\nabla \times A)\, dV = -\oint_S A \times dS$$

که A یک کمیت برداری و V حجمی محدود به سطح بسته S است.

۳۷. با استفاده از مفهوم گرادیان، معادله صفحه مماس بر سطح $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 10$ را در نقطه (۲,۱,۱) بنویسید.

۳۸. با استفاده از مفهوم گرادیان فاصله نقطه (۱,۱,۶) را از سطح $x + y - z^2 = 0$ به دست آورید.