

# ۱

## آنالیز برداری

در مطالعه پدیده‌های فیزیکی با دو نوع کمیت سر و کار داریم. یکی کمیت‌های نرده‌ای<sup>۱</sup> که فقط با «اندازه» مشخص می‌شوند مانند جرم، انرژی، بار الکتریکی و اختلاف پتانسیل. دیگری کمیت‌های برداری که مشخص کردن آنها مستلزم «اندازه» و «جهت» هر دو می‌باشد از قبیل نیرو، شتاب، شدت میدان الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی. یک بردار با پاره خطی که طول آن معرف اندازه کمیت بوده و در انتهای آن علامت پیکان به کار رفته باشد نمایش داده می‌شود. به منظور متمایز نمودن کمیت‌های برداری از کمیت‌های نرده‌ای، از سرقلم سیاه استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال بردار نیرو را با  $\mathbf{F}$  و بردار شدت میدان الکتریکی را با  $\mathbf{E}$  نشان داده، در حالی که اگر فقط اندازه‌های بردارهای نیرو و شدت میدان الکتریکی مورد نظر باشند می‌توان علائم  $F$  و  $E$  را به تنهایی به کار برد. اندازه بردار را ممکن است با استفاده از علامت قدر مطلق نیز نشان داد، مثلاً  $|\mathbf{F}|$  بیانگر اندازه  $F$  می‌باشد.

مطالعه میدان‌های الکترومغناطیس که موضوع اصلی این کتاب را تشکیل می‌دهند از نوع کمیت‌های برداری می‌باشند. مطالعه میدانها نیازمند دانش ریاضی ویژه‌ای است که تحت عنوان «آنالیز برداری» بیان می‌شود. بدین جهت، این فصل به بررسی کلیاتی از آنالیز برداری که در تجزیه و تحلیل میدان‌های الکترومغناطیس کاربرد فراوان دارند اختصاص داده می‌شود. قواعد ساده برداری شامل جمع و ضرب بردارها، دستگاه‌های مختلف مستطیلی، استوانه‌ای و کره‌ای و بیان یک بردار در این دستگاهها، انتگرال کمیت‌های برداری در انواع خط، سطح و حجم و مشتقات برداری مشتمل بر گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسین از اهم مطالبی هستند که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

## ۱-۱ قواعد ساده برداری

### تساوی بردارها

دو بردار را وقتی مساوی گویند که اندازه و جهتشان یکی باشد. اگر  $A = -B$  باشد، اندازه دو بردار  $A$  و  $B$  یکی بوده ولی مختلف‌الجهت هستند.

### جمع بردارها

جمع چند بردار را می‌توان با استفاده از روش چند ضلعی انجام داد. در این روش از انتهای بردار اول برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم برداری مساوی بردار سوم و ... رسم می‌کنیم (بردارها را می‌توان به دلخواه شماره گذاری کرد). بردار حاصل جمع از وصل ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار به دست می‌آید. شکل ۱-۱ نحوه جمع بردارها را نشان می‌دهد. در این شکل  $D = A + B + C$  است. می‌توان به سادگی نشان داد که در جمع بردارها قوانین جابه‌جایی پذیری و شرکت پذیری صادق هستند. روابط زیر به ترتیب قوانین مذکور را نشان می‌دهند:

$$A + B = B + A \quad (1-1)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (2-1)$$

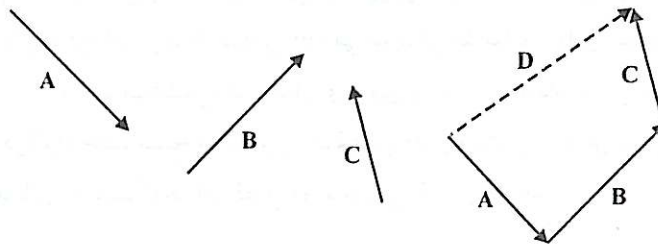
### ضرب بردار در کمیت‌های نرده‌ای

اگر بردار  $A$  را در کمیت نرده‌ای  $m$  ضرب کنیم، اندازه بردار  $A$ ،  $m$  برابر شده و بر حسب اینکه  $m$  مثبت یا منفی باشد جهت بردار حاصل ( $mA$ ) همانند یا عکس جهت بردار  $A$  خواهد بود.

### ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی یا ضرب نرده‌ای دو بردار  $A$  و  $B$  که با علامت « $\cdot$ » نشان داده می‌شود یک کمیت نرده‌ای است و اندازه آن برابر حاصل ضرب اندازه‌های  $A$  و  $B$  و کسینوس زاویه بین آنها می‌باشد. اگر  $\theta$  زاویه کوچک‌تر بین دو بردار  $A$  و  $B$  باشد، ضرب داخلی آنها عبارت است از:

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta = AB \cos \theta \quad (3-1)$$



شکل ۱-۱: جمع بردارها به روش چند ضلعی

در ضرب داخلی بردارها قوانین جابه‌جایی پذیری و توزیع پذیری صادق بوده ولی قانون شرکت پذیری صادق نمی‌باشد. یعنی:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (۴-۱)$$

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (۵-۱)$$

$$\underline{A(B \cdot C) \neq (A \cdot B)C} \quad (۶-۱)$$

### ضرب خارجی دو بردار

ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار  $A$  و  $B$  که با علامت « $\times$ » نشان داده می‌شود بردار دیگری مانند  $C$  است که اندازه آن مساوی حاصل ضرب اندازه‌های  $A$  و  $B$  و سینوس زاویه بین آنها می‌باشد.

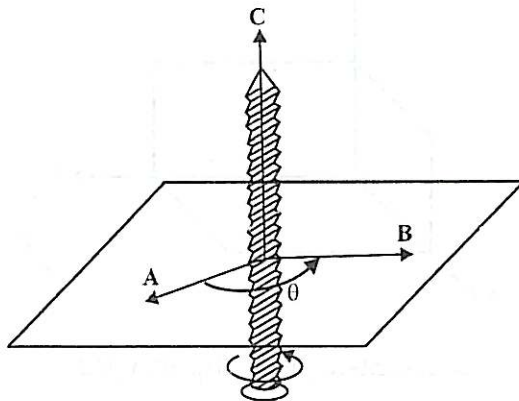
$$|A \times B| = |C| = |A| |B| \sin \theta = AB \sin \theta \quad (۷-۱)$$

جهت بردار  $C$  در جهت پیشروی پیچ راستگردی است که در امتداد عمود بر صفحه حاوی بردارهای  $A$  و  $B$  و در جهت چرخش بردار  $A$  به سمت بردار  $B$  از طریق زاویه کوچک‌تر بین دو بردار چرخانیده شود. شکل ۲-۱ ضرب خارجی دو بردار را نشان می‌دهد. در ضرب خارجی بردارها قوانین جابه‌جایی پذیری و شرکت پذیری صادق نیستند ولی قانون توزیع پذیری صادق می‌باشد.

$$A \times B = -B \times A \neq B \times A \quad (۸-۱)$$

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \quad (۹-۱)$$

$$A \times (B+C) = A \times B + A \times C \quad (۱۰-۱)$$



شکل ۲-۱: بردار  $C$  عمود بر صفحه حاوی بردارهای  $A$  و  $B$

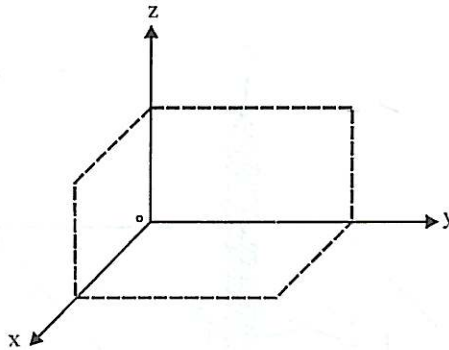
## بردار واحد

اگر بردار  $A$  را بر اندازه آن  $|A|$  تقسیم کنیم، یا به عبارت دیگر بردار  $A$  را در کمیت نرده‌ای  $1/|A|$  ضرب نماییم، برداری حاصل می‌شود که اندازه آن برابر واحد بوده و جهت آن با جهت بردار  $A$  یکی است. چنین برداری را بردار واحد نامیده و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

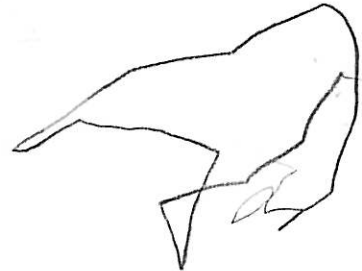
$$\hat{a}_A = \frac{A}{|A|} \quad (11-1)$$

## ۲-۱ دستگاههای مختصات

کمیت‌هایی که با آنها سر و کار داریم عموماً توابعی از زمان و مکان هستند. به عنوان مثال شدت میدان الکتریکی، که یک کمیت برداری است، وقتی از نقطه‌ای از فضا به نقطه دیگر برویم تغییر اندازه و جهت می‌دهد. از این رو برای بیان تغییرات کمیت‌های فیزیکی نسبت به مکان باید به شیوه مناسبی نقاط فضا را مشخص کنیم. ابتدا مبنای مقایسه‌ای که نقاط فضا را بتوان نسبت به آن مشخص نمود تعیین می‌کنیم. برای این منظور سه صفحه دو به دو عمود بر هم را به عنوان صفحات مختصات در نظر می‌گیریم. این سه صفحه نقطه تلاقی مشترکی دارند که آن را مبدأ یا مرکز مختصات می‌نامیم. از تقاطع دو به دو صفحات سه خط مستقیم که همگی از مبدأ مختصات می‌گذرند ایجاد می‌شوند. این خطوط را که دو به دو بر یکدیگر عمودند محورهای مختصات نامیده و با حروف  $x$ ،  $y$  و  $z$  مشخص می‌کنیم. جهت مثبت محورهای  $x$  و  $y$  را به دلخواه انتخاب نموده ولی جهت مثبت محور  $z$  را طوری در نظر می‌گیریم که مطابق پیشروی پیچ راستگردی باشد که در امتداد عمود بر صفحه حاوی محورهای  $x$  و  $y$  و در جهت چرخش محور  $x$  به طرف محور  $y$  بچرخد. شکل ۳-۱ مبدأ، محورها و صفحات مختصات را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱: مبدأ، محورها و صفحات مختصات



حال نقطه دلخواهی را در فضا در نظر گرفته و فاصله آن را از صفحات  $xy$ ،  $xz$ ،  $yz$  به ترتیب  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌نامیم. به طوری که بعداً خواهیم دید  $x$ ،  $y$  و  $z$  همان مختصات مستطیلی<sup>۱</sup> نقطه مورد نظر هستند. مجموعه نقاطی که مختصاتشان در رابطه  $f(x,y,z)=u$  صدق نماید تشکیل یک سطح می‌دهند. حال سه سطح به معادلات

$$f_1(x,y,z)=u_1 \quad (12-1)$$

$$f_2(x,y,z)=u_2 \quad (13-1)$$

$$f_3(x,y,z)=u_3 \quad (14-1)$$

را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که دو به دو بر یکدیگر عمود باشند. آنگاه یک نقطه دلخواه از فضا را می‌توان محل تلاقی سه سطح مزبور به ازای مقادیر معین  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  دانست. پارامترهای  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  را مختصات منحنی‌الخط نقطه می‌نامند. بر حسب اینکه سطوح متعامد  $f_1$ ،  $f_2$  و  $f_3$  را چگونه انتخاب کنیم دستگاههای مختصات مختلفی را می‌توان به وجود آورد. در اینجا فقط به مطالعه دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی اکتفا می‌کنیم.

### دستگاه مختصات مستطیلی

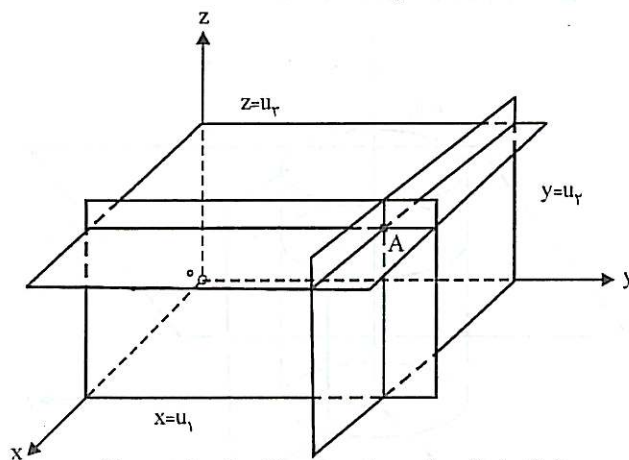
در دستگاه مختصات مستطیلی سطوح متعامد شامل سه صفحه به معادلات زیر می‌باشند:

$$f_1(x,y,z)=x=u_1 \quad (15-1)$$

$$f_2(x,y,z)=y=u_2 \quad (16-1)$$

$$f_3(x,y,z)=z=u_3 \quad (17-1)$$

بنابراین در دستگاه مختصات مستطیلی هر نقطه از فضا به مختصات  $(u_1, u_2, u_3)$  را می‌توان محل تلاقی سه صفحه  $x=u_1$ ،  $y=u_2$  و  $z=u_3$  مطابق شکل ۴-۱ دانست.



شکل ۴-۱: سطوح متعامد در دستگاه مختصات مستطیلی

دستگاه مختصات استوانه‌ای

در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه سطح عمود بر هم عبارتند از: ۱- یک سطح استوانه‌ای که محور آن بر محور  $Z$  منطبق بوده و شعاع آن برابر  $r$  باشد. ۲- یک نیم‌صفحه که یال آن محور  $Z$  بوده و با صفحه  $y=0$  (صفحه  $xz$ ) زاویه  $\varphi$  بسازد. ۳- صفحه‌ای که روی آن  $Z$  مقدار ثابتی باشد. بدیهی است که این صفحه بر محور  $Z$  عمود می‌باشد. شکل ۵-۱ این سطوح را نشان می‌دهد. اگر نقطه  $A$  به مختصات  $r=u_1, \varphi=u_2, Z=u_3$  را در نظر بگیریم، این نقطه از محل تلاقی سه سطح مذکور که دارای معادلات زیر می‌باشند به دست خواهد آمد:

$$f_1(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{1/2} = r = u_1 \quad (18-1)$$

$$f_2(x,y,z) = \tan^{-1}(y/x) = \varphi = u_2 \quad (19-1)$$

$$f_3(x,y,z) = z = u_3 \quad (20-1)$$

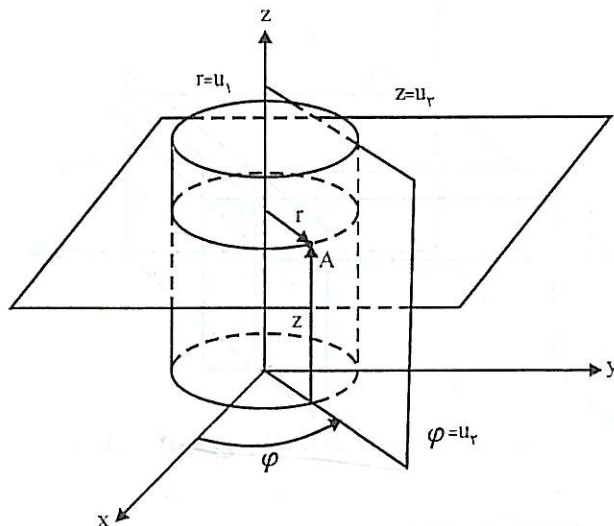
دستگاه مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی هر نقطه از فضا محل تلاقی سه سطح به شرح زیر می‌باشد: ۱- یک سطح کروی به مرکز مبدأ مختصات و شعاع  $r$ . ۲- یک سطح مخروطی به رأس مبدأ مختصات و نیم‌زاویه  $\theta$  و محوری منطبق بر محور  $Z$ . ۳- یک نیم‌صفحه که یال آن محور  $Z$  بوده و با صفحه  $y=0$  زاویه  $\varphi$  بسازد. شکل ۶-۱ این سطوح را نشان می‌دهد. معادلات سطوح متعامد مذکور که محل تلاقی آنها نقطه  $A$  به مختصات  $r=u_1, \theta=u_2, \varphi=u_3$  را تشکیل دهد عبارتند از:

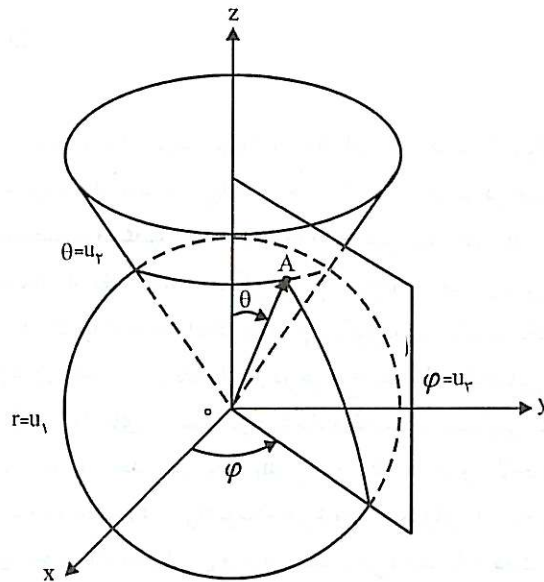
$$f_1(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r = u_1 \quad (21-1)$$

$$f_2(x,y,z) = \cos^{-1} \left[ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \theta = u_2 \quad (22-1)$$

$$f_3(x,y,z) = \tan^{-1}(y/x) = \varphi = u_3 \quad (23-1)$$

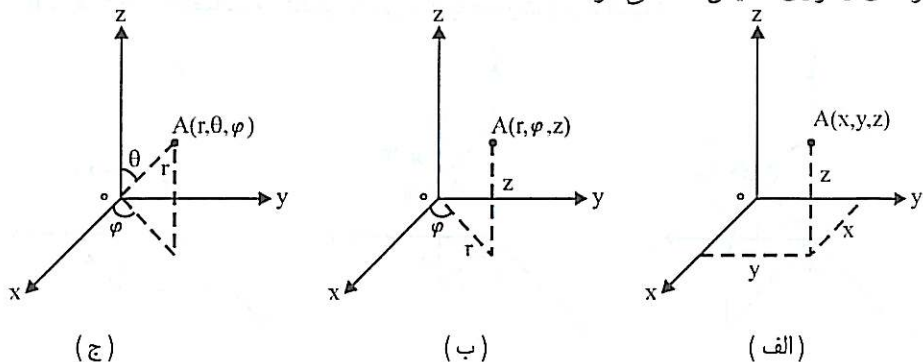


شکل ۵-۱: سطوح متعامد در دستگاه مختصات استوانه‌ای



شکل ۱-۶: سطوح متعامد در دستگاه مختصات کروی

مختصه  $z$  در دستگاههای مستطیلی و استوانه‌ای و مختصه  $\varphi$  در دستگاههای استوانه‌ای و کروی یکسان هستند. ولی باید دقت شود که مختصه  $r$  در دستگاههای استوانه‌ای و کروی یکسان نیستند. در دستگاه مختصات مستطیلی  $x$ ،  $y$  و  $z$  هر کدام ممکن است مثبت یا منفی باشند، در حالی که در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $r$  همواره غیرمنفی بوده و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  است و  $z$  ممکن است مثبت یا منفی باشد. بالاخره در دستگاه مختصات کروی  $r \geq 0$ ،  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  می‌باشد. یادآوری می‌شود که مختصه  $\varphi$  در دستگاههای استوانه‌ای و کروی زاویه بین نیم‌صفحه  $x > 0$  و  $y = 0$  با نیم‌صفحه‌ای با یال محور  $z$  است که از نقطه مورد نظر بگذرد و در جهت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) اندازه‌گیری شود. به طور خلاصه نقطه  $A$  از فضا مطابق شکل ۱-۷ در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی نمایش داده می‌شود.

شکل ۱-۷: مختصات نقطه  $A$  در دستگاههای (الف) مستطیلی (ب) استوانه‌ای (ج) کروی

## ۳-۱ مؤلفه‌های بردار

## بردارهای واحد

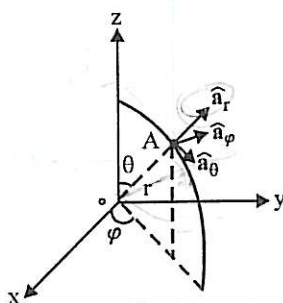
در هر نقطه از فضا سه بردار واحد تعریف می‌کنیم. اندازه این بردارها همواره برابر واحد بوده و بر سطوح متعامد گذرنده از نقطه مورد نظر عمود می‌باشند. جهت این بردارها در جهت افزایش مختصات می‌باشد. در دستگاه مختصات مستطیلی بردارهای واحد به صورت  $\hat{a}_x$ ،  $\hat{a}_y$  و  $\hat{a}_z$  نوشته می‌شوند. این بردارها، وقتی که از نقطه‌ای از فضا به نقطه دیگر برویم، هیچ‌گونه تغییری نمی‌کنند یا ساده‌تر بگوییم جهت آنها همیشه ثابت است. با توجه به اینکه سطوح تشکیل دهنده یک دستگاه مختصات دو به دو بر یکدیگر عمودند، بردارهای واحد در هر نقطه‌ای و در هر نوع دستگاه مختصاتی نیز دو به دو بر یکدیگر عمودند. شکل ۱-۸-الف بردارهای واحد را در دستگاه مختصات مستطیلی نشان می‌دهد. در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای واحد عبارت از  $\hat{a}_r$ ،  $\hat{a}_\theta$  و  $\hat{a}_\phi$  هستند و بالاخره در دستگاه مختصات کروی این بردارها به صورت  $\hat{a}_r$ ،  $\hat{a}_\theta$  و  $\hat{a}_\phi$  نوشته می‌شوند. شکل‌های ۱-۸-ب و ۱-۸-ج بردارهای واحد را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی نشان می‌دهند. باید دقت شود که بردارهای واحد  $\hat{a}_r$ ،  $\hat{a}_\theta$  و  $\hat{a}_\phi$  چه در دستگاه مختصات استوانه‌ای و چه در دستگاه مختصات کروی ثابت نبوده و وقتی از نقطه‌ای از فضا به نقطه دیگر برویم تغییر جهت می‌دهند. با استفاده از تعریف ضرب کمیت نرده‌ای در بردار و به کارگیری بردارهای واحد می‌توان هر بردار دلخواهی را برحسب بردارهای واحد بیان نمود. اگر برداری که مبدأ آن نقطه A در شکل ۱-۸ باشد را تصور کنیم، می‌توان آن را به سه مؤلفه در امتداد بردارهای واحد در نقطه A تجزیه کرد. بنابراین بردار A را می‌توان در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی به ترتیب به شرح زیر نوشت:

$$A = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z \quad (۲۴-۱)$$

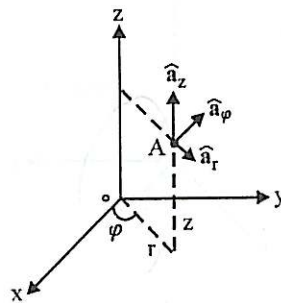
$$A = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi \quad (۲۵-۱)$$

$$A = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi \quad (۲۶-۱)$$

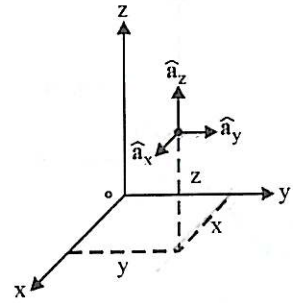
جمع چند بردار را می‌توان با جمع مؤلفه‌های متناظر آنها به دست آورد. به عنوان مثال جمع دو بردار A و B در دستگاه مختصات مستطیلی را می‌توان به صورت زیر نوشت:



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۱-۸: بردارهای واحد در دستگاههای مختصات (الف) مستطیلی (ب) استوانه‌ای (ج) کروی



$$A+B=(A_x+B_x)\hat{a}_x+(A_y+B_y)\hat{a}_y+(A_z+B_z)\hat{a}_z \quad (27-1)$$

ضرب خارجی و داخلی دو بردار را نیز می‌توان بر حسب مؤلفه‌های آنها انجام داد. برای این منظور با استفاده از تعریف ضرب داخلی و خارجی بردارها و توجه به این نکته که بردارهای واحد دو به دو بر یکدیگر عمودند، ابتدا نتیجه ضرب داخلی و خارجی بردارهای واحد را محاسبه می‌کنیم.<sup>۳</sup>

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \quad (28-1)$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = 0 \quad (29-1)$$

در نتیجه ضرب داخلی دو بردار  $A$  و  $B$  بر حسب مؤلفه‌های آنها به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z) \cdot (B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z) \quad (30-1) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

به همین ترتیب با استفاده از روابطی از قبیل  $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = 1$ ،  $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\phi = 1$  و  $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\theta = 0$  و ... در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی به ترتیب می‌توان به سهولت نتایج زیر را به دست آورد:

$$A \cdot B = A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z \quad (31-1)$$

$$A \cdot B = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi \quad (32-1)$$

اگر برداری را در خودش ضرب داخلی نماییم، طبق تعریف ضرب داخلی بردارها، مربع اندازه آن بردار حاصل می‌شود.

$$A \cdot A = |A|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2 = A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2 \quad (33-1)$$

کروی                      استوانه‌ای                      مستطیلی

برای آنکه نتیجه ضرب خارجی دو بردار را بر حسب مؤلفه‌هایشان بیان کنیم، ابتدا با استفاده از تعریف ضرب خارجی داریم:

$$\begin{aligned} \hat{a}_x \times \hat{a}_y &= \hat{a}_z & \hat{a}_x \times \hat{a}_x &= 0 \\ \hat{a}_y \times \hat{a}_z &= \hat{a}_x & \hat{a}_y \times \hat{a}_y &= 0 \\ \hat{a}_z \times \hat{a}_x &= \hat{a}_y & \hat{a}_z \times \hat{a}_z &= 0 \end{aligned} \quad (34-1)$$

آنگاه  $A \times B$  را بر حسب مؤلفه‌های  $A$  و  $B$  نوشته و آن را بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z) \times (B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z) \quad (35-1) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{a}_z \end{aligned}$$

جمع و ضرب بردارها در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی فقط وقتی که بردارها دارای مبدأ مشترک، یا دارای نقاط مبدأ متفاوت ولی با مختصات زاویه‌ای یکسان، باشند امکان‌پذیر است.

می‌توان نشان داد که  $A \times B$  از دترمینان زیر نیز قابل محاسبه است:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

در دستگاههای مختصات دیگر نیز می‌توان نتایج مشابهی به دست آورد که در زیر خلاصه می‌شوند:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ A_r & A_\varphi & A_z \\ B_r & B_\varphi & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix} \quad (37-1)$$

استوانه‌ای

کرده

با ترکیب ضرب داخلی و خارجی می‌توان ضرب سه‌گانه نرده‌ای  $A \cdot (B \times C)$  را به وجود آورد. مقدار این ضرب سه‌گانه برابر حجم متوازی‌السطوحی است که با سه بردار  $A$ ،  $B$  و  $C$  مطابق شکل ۹-۱ ساخته شود. در دستگاه مختصات مستطیلی، مقدار  $A \cdot (B \times C)$  از دترمینان زیر به دست می‌آید:

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (38-1)$$

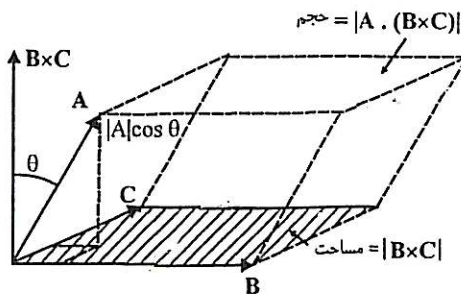
بردار مکان

در نقطه از فضا را می‌توان با برداری نشان داد که از اتصال مبدأ مختصات به نقطه مورد نظر به دست می‌آید. این بردار را بردار مکان نامیده و با  $r$  نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل ۱۰-۱ بردار مکان  $r$  را بر حسب مختصات نقطه می‌توان در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی به ترتیب به صورتهای زیر نوشت:

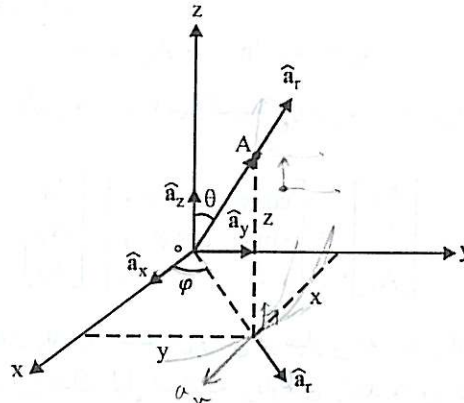
$$r = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \quad (39-1)$$

$$r = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z \quad (40-1)$$

$$r = r\hat{a}_r \quad (41-1)$$



شکل ۹-۱: متوازی‌السطوح با اضلاع  $A$ ،  $B$  و  $C$

شکل ۱-۱۰: بردار مکان  $\mathbf{r}$  بر حسب مختصات نقطه  $A$ 

مشاهده می‌شود که وقتی بردار  $\mathbf{r}$  را در دستگاههای استوانه‌ای یا کروی بیان می‌کنیم کلیه مختصات نقطه  $A$  ظاهر نمی‌شوند. مثلاً در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{a}}_r + z\hat{\mathbf{a}}_z$  است و  $\varphi$  در عبارت  $\mathbf{r}$  دیده نمی‌شود در حالی که بدون  $\varphi$  نمی‌توان نقطه  $A$  را مشخص کرد. در واقع بردار واحد  $\hat{\mathbf{a}}_r$  در خود  $\varphi$  را مستتر دارد، زیرا فقط به ازای مقدار معینی از  $\varphi$ ،  $\hat{\mathbf{a}}_r$  معنی خواهد داشت. به همین ترتیب بردار واحد  $\hat{\mathbf{a}}_r$  در دستگاه مختصات کروی تابعی از  $\theta$  و  $\varphi$  است و رابطه  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{a}}_r$  در خود  $\theta$  و  $\varphi$  را مستتر دارد.

### تبدیل بردارها در دستگاههای مختصات مختلف

گاهی اوقات برداری در یک دستگاه مختصات داده شده است و بیان آن در دستگاه مختصات دیگری ضرورت پیدا می‌کند. به عنوان مثال فرض کنید بردار  $A$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است، یعنی  $A = A_r\hat{\mathbf{a}}_r + A_\varphi\hat{\mathbf{a}}_\varphi + A_z\hat{\mathbf{a}}_z$  و می‌خواهیم آن را در دستگاه مختصات مستطیلی بنویسیم. به عبارت دیگر باید مؤلفه‌های  $A_x$ ،  $A_y$  و  $A_z$  را برحسب مؤلفه‌های  $A_r$ ،  $A_\varphi$  و  $A_z$  به دست آوریم. بدیهی است که مؤلفه  $A_z$  که بین دو دستگاه مختصات استوانه‌ای و مستطیلی مشترک است بدون تغییر باقی می‌ماند. برای به دست آوردن  $A_x$  و  $A_y$  به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. ابتدا دو طرف عبارت بردار  $A$  را در بردار واحد  $\hat{\mathbf{a}}_x$  ضرب داخلی می‌کنیم. از این رو با توجه به اینکه  $A \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = A_x$  است، داریم:

$$A_x = A_r\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_x + A_\varphi\hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_x + A_z\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_x \quad (42-1)$$

لیکن با توجه به صفر بودن عبارت سوم سمت راست رابطه مذکور و اینکه به سهولت می‌توان نشان داد که:

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \cos \varphi \quad (43-1)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = -\sin \varphi \quad (44-1)$$

خواهیم داشت:

$$A_x = A_r \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (45-1)$$

به نحو مشابهی می‌توان نشان داد که :

$$A_y = A_r \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (46-1)$$

روابط بین مؤلفه‌های مستطیلی و استوانه‌ای یک بردار را می‌توان به صورت یک رابطه ماتریسی نیز بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & \cdot \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (47-1)$$

تبدیل بردارهای واحد  $\hat{a}_r$  و  $\hat{a}_\varphi$ ، به خصوص وقتی در عبارتی که باید از آن انتگرال گرفته شود ظاهر شوند، ضرورت پیدا می‌کند. این بدان دلیل است که بردارهای واحد مزبور ثابت نیستند. با استفاده از رابطه ۴۷-۱ می‌توان نشان داد که :

$$\hat{a}_r = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y \quad (48-1)$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y \quad (49-1)$$

روش فوق را می‌توان برای تبدیل بردارها از دستگاه مختصات کروی به دستگاه مختصات مستطیلی و بالعکس نیز به کار برد. به طور خلاصه، آنچه که برای تبدیل یک بردار از دستگاهی به دستگاه دیگر مورد نیاز است، نتایج ضرب داخلی بردارهای واحد بین دو دستگاه می‌باشند. این نتایج برای دستگاههای استوانه‌ای - مستطیلی و کروی - مستطیلی به ترتیب در جدولهای ۱-۱ و ۲-۱ خلاصه شده‌اند.

جدول ۱-۱: ضرب داخلی بردارهای واحد در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و مستطیلی

ضرب داخلی « . »	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$
$\hat{a}_r$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\cdot$
$\hat{a}_\varphi$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\cdot$
$\hat{a}_z$	$\cdot$	$\cdot$	$1$

جدول ۲-۱: ضرب داخلی بردارهای واحد در دستگاههای مختصات کروی و مستطیلی

ضرب داخلی « . »	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$
$\hat{a}_r$	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$
$\hat{a}_\theta$	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$-\sin \theta$
$\hat{a}_\varphi$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\cdot$

با استفاده از جدول ۱-۲، می توان نوشت :

$$\hat{a}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z \quad (50-1)$$

$$\hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z \quad (51-1)$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y \quad (52-1)$$

تبدیل مختصات یک نقطه از دستگاهی به دستگاه دیگر نیز اغلب ضرورت پیدا می کند. با استفاده از شکل ۱۰-۱ روابط مورد نیاز به شرح زیر خلاصه می شوند :

الف) استوانه ای - مستطیلی

$$x = r \cos \varphi \quad (53-1)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (54-1)$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (55-1)$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad (56-1)$$

$$z = z \quad (57-1)$$

ب) کره - مستطیلی

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (58-1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (59-1)$$

$$z = r \cos \theta \quad (60-1)$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (61-1)$$

$$\theta = \cos^{-1} [z / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}] \quad (62-1)$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad (63-1)$$

مثال ۱-۱ بردار  $A = (5/r^2) \hat{a}_r$  در دستگاه مختصات کره داده شده است.

الف)  $|A|$  و  $A_x$  را در نقطه  $M(3, 4, 5)$  در دستگاه مختصات مستطیلی به دست آورید.

ب) نتیجه ضرب داخلی  $A \cdot B$  را در نقطه  $M$  محاسبه کنید وقتی که  $B = \hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$  باشد.

حل :

الف) با استفاده از رابطه ۱-۶۱، مقدار  $r$  در نقطه  $M$  عبارت است از :

$$r = (3^2 + 4^2 + 5^2)^{1/2} = 5\sqrt{2}$$

$$|A| = \frac{5}{r^2} = \frac{5}{50} = 0.1$$

برای به دست آوردن مؤلفه  $A_x$ ، با توجه به رابطه ۱-۵۰ داریم

$$A = 0.1 \hat{a}_r = (\sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z) 0.1$$

پس

$$A_x = 0.1 \sin \theta \cos \varphi$$

لیکن در نقطه M با استفاده از روابط ۶۲-۱ و ۶۳-۱ می توان نوشت :

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{z}{r} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{5}{5\sqrt{2}} \right) = 45^\circ \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{4}{3}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4/3)^2}} = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5}$$

$$A_x = 0.1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{100}$$

ب) عبارت کامل بردار A در نقطه M در دستگاه مختصات مستطیلی با داشتن نسبتهای مثلثاتی  $\theta$  و

$\varphi$  به شرح زیر نوشته می شود :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 0.1 \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{3}{5} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{4}{5} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{a}}_z \right] \\ &= 0.1 (3\sqrt{2} \hat{\mathbf{a}}_x + 4\sqrt{2} \hat{\mathbf{a}}_y + 5\sqrt{2} \hat{\mathbf{a}}_z) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$= 0.1 [(3\sqrt{2})(1) + (4\sqrt{2})(-2) + (5\sqrt{2})(3)] = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

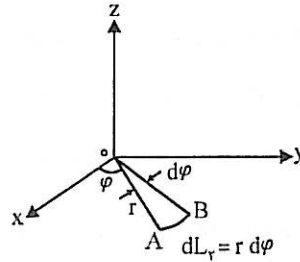
■

#### ۴-۱ انتگرالهای خط، سطح و حجم

برای مطالعه انتگرالهای خط، سطح و حجم که به دفعات زیاد در محاسبه میدانهای الکترومغناطیس مورد استفاده قرار می گیرند، ابتدا عناصر طول، سطح و حجم را در دستگاههای مختلف مختصات مورد بررسی قرار می دهیم. فرض می کنیم که نقطه A به مختصات  $(u_1, u_2, u_3)$  و نقطه B به مختصات  $(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$  در یک دستگاه مختصات متعامد قرار داشته باشند. اگر عنصر طولی باشد که از تغییر  $u_1$  به  $u_1 + du_1$  حاصل می شود وقتی که  $u_2$  و  $u_3$  ثابت نگه داشته شوند و همین طور  $du_2$  و  $du_3$  عناصر طول ناشی از تغییر  $u_2$  و  $u_3$  به  $u_2 + du_2$  و  $u_3 + du_3$  باشند،  $du_1$  و  $du_2$  به ازای  $i = 1, 2, 3$  الزاماً با یکدیگر برابر نخواهند بود و در حالت کلی توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند :

$$dL_i = h_i du_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (64-1)$$

که  $h_i$  خود تابعی از  $u_1, u_2$  و  $u_3$  است. به منظور روشن شدن مطلب فرض می کنیم که  $\varphi$  در دستگاه مختصات استوانه ای به  $d\varphi$  تغییر نماید، در این صورت با توجه به شکل ۱۱-۱ عنصر طول ناشی از این تغییر برابر  $dL_\varphi = r d\varphi$  می باشد و در نتیجه  $h_\varphi = r$  است. حال آنکه اگر در دستگاه مختصات مستطیلی x به  $x + dx$  تغییر کند، عنصر طول ناشی از این تغییر همان dx خواهد بود. یعنی  $dL_x = dx$  و در نتیجه  $h_x = 1$  است.

شکل ۱-۱۱: تغییر دیفرانسیلی  $\varphi$  و عنصر طول  $dL_r$  حاصل از آن

## عناصر طول، سطح و حجم

عناصر طول، سطح و حجم وقتی که هر سه مختصه تغییرات دیفرانسیلی نمایند در دستگاههای مختلف مختصات قابل بیان می باشند.  
دستگاه مختصات مستطیلی: با توجه به شکل ۱-۱۲ عناصر طول، سطح و حجم در این دستگاه مختصات عبارتند از:

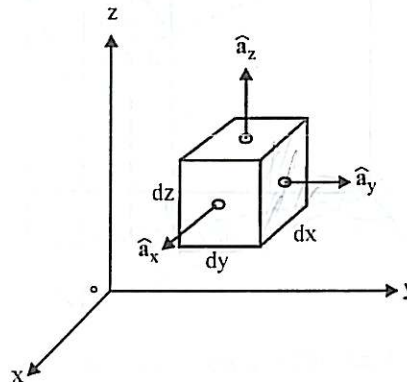
$$\text{عناصر طول : } dL_x = dx, dL_y = dy, dL_z = dz \quad (۱-۶۵)$$

$$\text{بردار عنصر طول : } dL = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z \quad (۱-۶۶)$$

$$\text{عناصر سطح : } dS_x = dy dz, dS_y = dx dz, dS_z = dx dy \quad (۱-۶۷)$$

$$\text{عناصر حجم : } dV = dx dy dz \quad (۱-۶۸)$$

در دستگاه مختصات مستطیلی  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$  است. عنصر سطح را می توان به صورت برداری نیز تعریف نمود. کافی است اندازه عنصر سطح را در بردار واحدی که بر آن عنصر عمود است ضرب کنیم. البته بردار واحد را می توان در دو جهت مخالف یکدیگر بر عنصر سطح عمود نمود. به عنوان مثال هر دو عبارت  $dS_x = \pm dy dz \hat{a}_x$  و  $dS_z = \pm dx dy \hat{a}_z$  را می توان در نظر گرفت.



شکل ۱-۱۲: عناصر طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات مستطیلی

دستگاه مختصات استوانه‌ای: در این دستگاه می‌توان نشان داد که  $h_z = 1$  و  $h_r = r$ ،  $h_\varphi = 1$  است. عناصر طول، سطح و حجم در این دستگاه مختصات با توجه به شکل ۱۳-۱ به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

$$\text{عناصر طول : } dL_r = dr, \quad dL_\varphi = r d\varphi, \quad dL_z = dz \quad (۶۹-۱)$$

$$\text{بردار عنصر طول : } dL = dr \hat{a}_r + r d\varphi \hat{a}_\varphi + dz \hat{a}_z \quad (۷۰-۱)$$

$$\text{عناصر سطح : } dS_r = r d\varphi dz, \quad dS_\varphi = dr dz, \quad dS_z = r dr d\varphi \quad (۷۱-۱)$$

$$\text{عناصر حجم : } dV = r dr d\varphi dz \quad (۷۲-۱)$$

دستگاه مختصات کروی: با در نظر گرفتن شکل ۱۴-۱، عناصر طول، سطح و حجم در این دستگاه به شرح زیر نوشته می‌شوند:

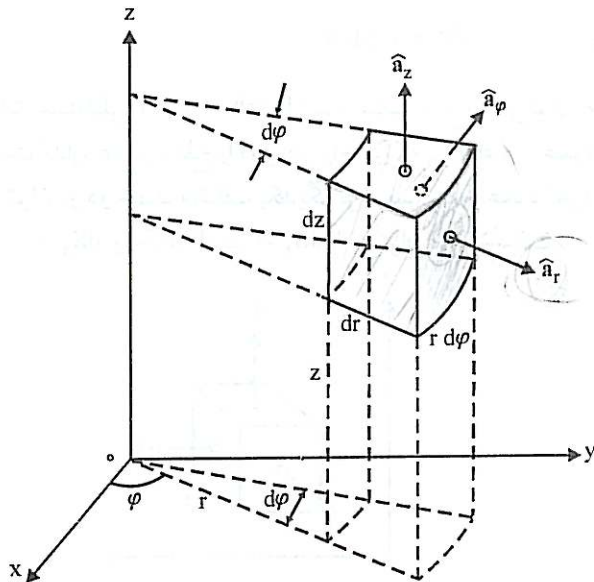
$$\text{عناصر طول : } dL_r = dr, \quad dL_\theta = r d\theta, \quad dL_\varphi = r \sin \theta d\varphi \quad (۷۳-۱)$$

$$\text{بردار عنصر طول : } dL = dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin \theta d\varphi \hat{a}_\varphi \quad (۷۴-۱)$$

$$\text{عناصر سطح : } dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi, \quad dS_\varphi = r dr d\theta \quad (۷۵-۱)$$

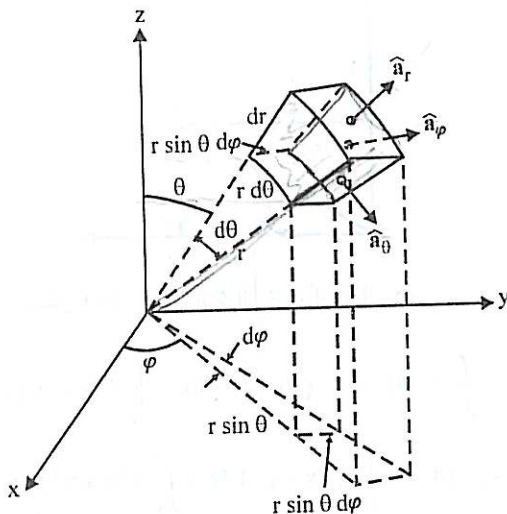
$$\text{عناصر حجم : } dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (۷۶-۱)$$

در دستگاه مختصات کروی  $h_r = r$ ،  $h_\theta = r$  و  $h_\varphi = r \sin \theta$  می‌باشد.



شکل ۱۳-۱: عناصر طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات استوانه‌ای





شکل ۱-۱۴: عناصر طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات کروی

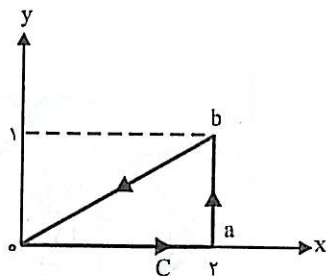
## انتگرال خط

انتگرال خط عموماً به صورت  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  ظاهر می‌شود که در آن  $d\mathbf{L}$  بردار عنصر طول در امتداد مسیر  $C$  بوده و  $\mathbf{A}$  برداری است که در حالت کلی تابع هر سه مختصه می‌باشد. انتگرال خط ممکن است به صورت‌های دیگری مانند  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{L}$ ،  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ ،  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  و  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  نیز ظاهر شود ولی در این میان اغلب انتگرال  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  در این درس مورد استفاده پیدا می‌کند. مسیر انتگرال‌گیری که با منحنی  $C$  نشان داده می‌شود در حالت کلی یک منحنی فضایی است. به منظور محاسبه  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  می‌توان نوشت:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int_C A_x(x,y,z) dx + \int_C A_y(x,y,z) dy + \int_C A_z(x,y,z) dz \quad (۷۷-۱)$$

هر کدام از انتگرال‌های سمت راست رابطه ۷۷-۱ را باید جداگانه محاسبه نمود. به عنوان مثال اگر بخواهیم  $\int_C A_x(x,y,z) dx$  را محاسبه کنیم باید به جای  $y$  و  $z$  در  $A_x(x,y,z)$  با استفاده از معادلات منحنی  $C$  بر حسب  $x$  مقدار گذاشته و سپس عمل انتگرال‌گیری را انجام دهیم. اگر انتگرال  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  بین دو نقطه  $a$  و  $b$  روی منحنی  $C$  مورد نظر باشد، در محاسبه  $\int_C A_x(x,y,z) dx$  از مختصه  $x$  نقطه  $a$  تا مختصه  $x$  نقطه  $b$  انتگرال‌گیری را انجام می‌دهیم. انتگرال  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  را ممکن است بر حسب  $\mathbf{A}$  و  $d\mathbf{L}$  در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی نیز بسط داد.

مثال ۲-۱ مطلوب است محاسبه  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  روی مسیر بسته شکل ۱-۱۵ وقتی که بردار  $\mathbf{A}$  به صورت  $\mathbf{A} = (2x+y^2)\hat{\mathbf{a}}_x + (3y-4x)\hat{\mathbf{a}}_y$  بیان شود (از علامت « $\phi$ » برای نمایش انتگرال دوی یک مسیر بسته استفاده می‌شود).



شکل ۱-۱۵: مسیر انتگرال خط برای مثال ۲-۱

حل:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C (\gamma x + y^2) dx + \oint_C (\gamma y - \gamma x) dy$$

$$K_\gamma = \oint_C (\gamma x + y^2) dx = \int_0^a (\gamma x + y^2) dx + \int_a^b (\gamma x + y^2) dx + \int_b^0 (\gamma x + y^2) dx$$

در فاصله ۰ تا  $a$ ،  $y=0$ ،  $x_0=0$ ،  $x_a=2$  است. به همین ترتیب در فاصله  $a$  تا  $b$ ،  $x=x_a=x_b=2$  و در فاصله  $b$  تا  $0$ ،  $x_0=0$  و  $x_b=2$ ،  $y=0$  تا  $y=1$  است. بنابراین:

$$K_\gamma = \int_0^2 (\gamma x + 0) dx + \int_2^1 (\gamma + y^2) dy + \int_1^0 \left( \gamma x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \gamma + 0 - \frac{1\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

به همین ترتیب:

$$K_\gamma = \oint_C (\gamma y - \gamma x) dy = \left[ \int_0^a + \int_a^b + \int_b^0 \right] (\gamma y - \gamma x) dy$$

$$= \int_0^1 (0 - \gamma x) dy + \int_1^1 (\gamma y - \gamma) dy + \int_1^0 (\gamma y - \gamma y) dy = 0 - \frac{1\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = -\gamma$$

و سرانجام:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = K_\gamma + K_\gamma = \frac{\gamma}{2} - \gamma = -\frac{\gamma}{2}$$

مثال ۳-۱ مطلوب است محاسبه  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  برای  $\mathbf{A} = (yz + \gamma x)\hat{a}_x + xz\hat{a}_y + (xy + \gamma z)\hat{a}_z$  وقتی که منحنی  $C$  با معادلات  $x^2 + y^2 = 1$  و  $z = 1$  مشخص شود. انتگرال را از نقطه  $(0, 1, 1)$  تا نقطه  $(1, 0, 1)$  محاسبه کنید.

حل:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int_C (yz + \gamma x) dx + \int_C xz dy + \int_C (xy + \gamma z) dz$$

$$K_\gamma = \int_C (yz + \gamma x) dx = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + \gamma x) dx ; z=1, y=\sqrt{1-x^2}$$

$$K_\gamma = \int_C xz dy = \int_1^0 \sqrt{1-y^2} dy = -\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy ; z=1, x=\sqrt{1-y^2}$$

$$K_z = \int_C (xy + yz) dz = \int_1^1 (xy + yz) dz = 0$$

$$\int_C A \cdot dL = K_1 + K_y + K_z = \int_0^1 yx dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

$$= \int_0^1 yx dx = 1$$

$$A = \epsilon v + \nu y + 0 z$$

برای محاسبه انتگرال خط از نوع  $\int_C A \cdot dL$  که در آن  $A=A(x,y,z)$  تابعی (نرده‌ای است)، ابتدا انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_C A \cdot dL = \int_C A(x,y,z) \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (۷۸-۱)$$

سپس به جای  $y$  و  $z$  و نیز  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{dz}{dx}$  با استفاده از معادلات منحنی  $C$  بر حسب  $x$  مقدار می‌گذاریم. از این رو اگر به عنوان مثال معادلات منحنی  $C$  به صورت  $y=y(x)$  و  $z=z(x)$  بیان شوند، رابطه ۷۸-۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_C A \cdot dL = \int_{x_a}^{x_b} A[x,y(x),z(x)] \left[ 1 + y'^2(x) + z'^2(x) \right]^{1/2} dx \quad (۷۹-۱)$$

انتگرال مزبور مشابه یک انتگرال معمولی یگانه است که با استفاده از روشهای معمول محاسبه می‌شود. اضافه می‌شود که در رابطه ۷۹-۱ محاسبه انتگرال از نقطه  $a$  تا نقطه  $b$  روی منحنی  $C$  مورد نظر می‌باشد.

### انتگرال سطح

بر حسب تعریف  $\int_S A \cdot dS$  روی سطح  $S$  برابر حاصل ضرب عناصری است که از ضرب داخلی بردار  $A$  در بردار  $dS$  به دست می‌آید. برداری به اندازه عنصر سطح  $dS$  و در جهت عمود بر آن است. لیکن در امتداد عمود بر  $dS$  همواره دو جهت مخالف یکدیگر وجود دارند. از این رو مقدار  $\int_S A \cdot dS$  که یک کمیت نرده‌ای است ممکن است مثبت یا منفی شود، به ویژه وقتی که  $S$  یک سطح غیربسته باشد مگر آنکه نسبت به چگونگی انتخاب بردار  $dS$  اطلاعات بیشتری در اختیار باشد. (یادآوری می‌شود که یک سطح بسته فضا را به دو بخش متمایز تقسیم می‌کند که یک بخش را درون و بخش دیگر را بیرون این سطح می‌نامیم.) اگر انتگرال روی سطح بسته‌ای انجام شود، معمول این است که بردار  $dS$  در تمام نقاط سطح به طرف بیرون آن در نظر گرفته شود.

سطح  $S$  در حالت کلی معادله‌ای به صورت  $f(x,y,z)=k$  دارد که در آن  $k$  مقداری ثابت است. اگر  $S$  یک سطح ساده مانند یک صفحه یا سطح استوانه‌ای قائم باشد، بردار  $dS$  را می‌توان به آسانی تعیین کرد. ولی در حالت کلی بردار  $dS$  را که در هر نقطه بر سطح  $S$  عمود باشد باید با استفاده از تعریف گرادینان که بعداً مطالعه خواهیم نمود به دست آورد. اگر  $dS$  را به صورت  $dS = dS \hat{a}_n$  بنویسیم که  $\hat{a}_n$  بردار واحد عمود بر سطح  $S$  باشد، می‌توان نشان داد که  $\hat{a}_n$  از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{a}_n = \frac{N}{|N|}$$

$$N = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z = f \quad (۸۰-۱)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\int_C A \cdot dS = \int_S A \cdot \hat{a}_n dS$$

حال اگر تصویر عنصر سطح  $dS$  را روی یکی از صفحات مختصات، مثلاً صفحه  $z=0$ ، به دست آوریم می توان انتگرالگیری را روی تصویر سطح  $S$  در آن صفحه مختصات انجام داد. با توجه به شکل ۱۶-۱ می توان نوشت:

$$dx dy = dS |\cos \alpha|, \quad |\cos \alpha| = |\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|$$

بنابراین:  $dx dy = dS |\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|$

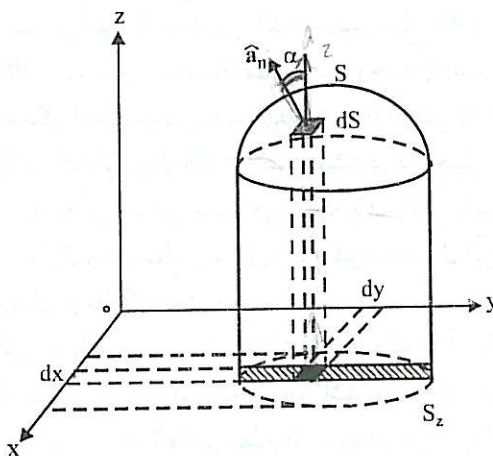
$$\int_S A \cdot dS = \int_{S_z} A \cdot \hat{a}_n \frac{dx dy}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|} \quad (۸۱-۱)$$

در رابطه ۸۱-۱،  $S_z$  تصویر  $S$  روی صفحه  $z=0$  است. به نحو مشابه می توان نشان داد که:

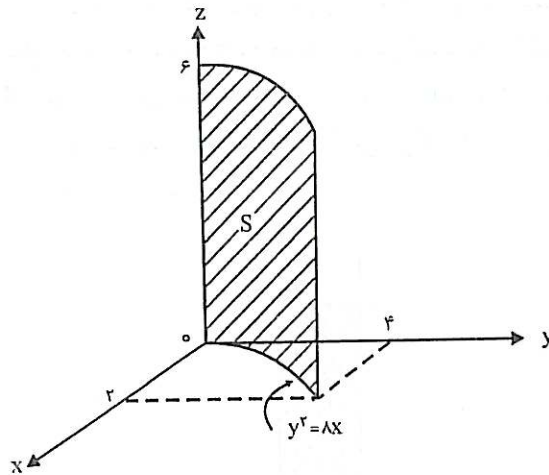
$$\int_S A \cdot dS = \int_{S_y} A \cdot \hat{a}_n \frac{dx dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_y|} = \int_{S_x} A \cdot \hat{a}_n \frac{dy dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_x|} \quad (۸۲-۱)$$

در رابطه ۸۲-۱،  $S_x$  و  $S_y$  به ترتیب تصویر سطح  $S$  روی صفحات  $x=0$  و  $y=0$  می باشند.

مثال ۳-۱ مطلوب است محاسبه  $\int_S A \cdot dS$ ، که در آن  $A = 2y\hat{a}_x - z\hat{a}_y + x^2\hat{a}_z$  و سطح  $S$  بخشی از یک استوانه سهمی شکل به معادله  $y^2 = 8x$  که در  $\frac{1}{8}$  اول فضا واقع است و به صفحات  $y=4$  و  $z=6$  محدود می گردد. شکل ۱۷-۱ سطح  $S$  مذکور را نمایش می دهد (در  $\frac{1}{8}$  اول فضا  $x > 0$ ،  $y > 0$  و  $z > 0$  است).



شکل ۱۶-۱: تصویر سطح  $S$  روی صفحه  $z=0$



شکل ۱-۱۷: سطح S برای انتگرال مثال ۴-۱

حل:

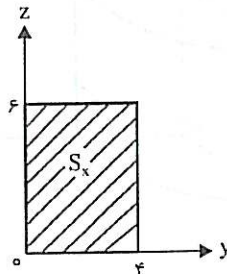
معادله سطح را به صورت  $f(x,y,z) = \lambda x - y^2 = 0$  می‌نویسیم و تصویر آن را روی صفحه  $x=0$  مطابق شکل ۱۸-۱ به دست می‌آوریم.

$$f(x,y,z) = \lambda x - y^2 = 0, \quad N = \nabla f = \lambda \hat{a}_x - 2y \hat{a}_y$$

$$\hat{a}_n = \frac{N}{|N|} = \frac{\lambda \hat{a}_x - 2y \hat{a}_y}{(\lambda^2 + 4y^2)^{1/2}}, \quad \hat{a}_n \cdot \hat{a}_x = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

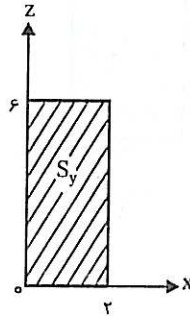
$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_x} (\lambda y \hat{a}_x - z \hat{a}_y + x \hat{a}_z) \cdot \frac{\lambda \hat{a}_x - 2y \hat{a}_y}{(\lambda^2 + 4y^2)^{1/2}} \frac{dy dz}{\lambda / (\lambda^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

$$= \int_{S_x} \frac{1}{\lambda} (\lambda y + yz) dy dz = \frac{1}{\lambda} \int_0^4 y dy \int_0^4 (\lambda + z) dz = 132$$



شکل ۱-۱۸: تصویر سطح S روی صفحه yz برای مثال ۴-۱

نتیجه انتگرال مزبور را می توان از طریق انتگرال گیری روی صفحه  $S_y$  نیز به دست آورد، ولی باید توجه نمود که چون تصویر سطح  $S$  روی صفحه  $z=0$  فقط یک منحنی است انتگرال گیری روی  $S_z$  امکان پذیر نخواهد بود. بالاخره اگر معادله سطح به صورت  $f(x,y,z) = -\lambda x + y^2 = 0$  در نظر گرفته می شود، مقدار انتگرال، قرینه مقدار به دست آمده یعنی برابر  $-132$  حاصل می گردید. محاسبه انتگرال با استفاده از تصویر  $S_y$  در شکل ۱۹-۱ عبارت است از:

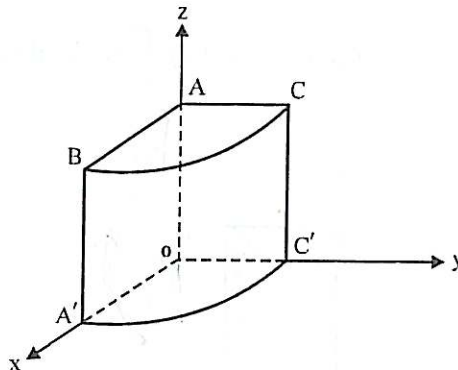


شکل ۱۹-۱: تصویر سطح  $S$  روی صفحه  $xz$  برای مثال ۴-۱

$$\begin{aligned} \int_{S_y} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n \frac{dx dz}{|\hat{\mathbf{a}}_n \cdot \hat{\mathbf{a}}_y|} &= \int_{S_y} (\lambda y + yz) \frac{dx dz}{y} \int_{S_y} (\lambda + z) dx dz \\ &= \int_0^2 dx \int_0^6 (\lambda + z) dz = 132 \end{aligned}$$

■

مثال ۵-۱ مطلوب است محاسبه  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  روی سطح بسته ای که محدود به صفحات مختصات  $(x=0, y=0, z=0)$ ، صفحه  $z=l$  و استوانه ای به شعاع  $r=a$  بوده و در  $\frac{1}{a}$  اول فضا قرار داشته باشد. بردار  $\mathbf{A}$  در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت  $\mathbf{A} = r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  بیان می شود. شکل ۲۰-۱ سطح بسته  $S$  را نشان می دهد.



شکل ۲۰-۱: سطح بسته  $S$ ، برای انتگرال سطح مثال ۵-۱

حل: 
$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[ \int_{BCC'A'} + \int_{ACC'O} + \int_{ABA'O} + \int_{A'OC'} + \int_{ABC} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

در محاسبه هر یک از انتگرالهای سمت راست عبارت مزبور، بردار  $d\mathbf{S}$  را در جهت عمود و به طرف خارج سطح بسته  $S$  در نظر می‌گیریم.

$$K_1 = \int_{BCC'A'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{BCC'A'} (r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \cdot (r d\varphi dz \hat{\mathbf{a}}_r), \quad r = a$$

$$= \int_{BCC'A'} r^2 \cos \varphi d\varphi dz = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^l dz = a^2 l$$

$$K_2 = \int_{ACC'O} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{ACC'O} (r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \cdot (dr dz \hat{\mathbf{a}}_\varphi), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_{ACC'O} -r \sin \varphi dr dz = - \int_0^a r dr \int_0^l dz = -\frac{1}{2} a^2 l$$

$$K_3 = \int_{ABA'O} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{ABA'O} (r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \cdot (-dr dz \hat{\mathbf{a}}_\varphi), \quad \varphi = 0$$

= 0

$$K_4 = \int_{A'OC'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{A'OC'} (r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \cdot (-r d\varphi dr \hat{\mathbf{a}}_z), \quad z = 0$$

= 0

$$K_5 = \int_{ABC} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{ABC} (r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \cdot (r dr d\varphi \hat{\mathbf{a}}_z), \quad z = l$$

= 0

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{a^2 l}{2}$$

پس

برای محاسبه انتگرال سطح از نوع  $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  که در آن  $\mathbf{A}$  و عنصر سطح  $d\mathbf{S}$  هر دو کمیت نرده‌ای هستند و  $A$  تابعی از هر سه مختصه است ( $A = A(x,y,z)$ ) می‌توان به روش زیر عمل نمود:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_z} A[x,y,z(x,y)] \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy \quad (۸۳-۱)$$

برای به دست آوردن عبارت سمت راست رابطه ۱-۸۳ از  $\cos \alpha = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right]^{-1/2}$  و  $dS = \frac{dx dy}{\cos \alpha}$  استفاده شده است. همچنین فرض شده است که سطح S با معادله  $z = z(x, y)$  مشخص شده باشد. انتگرال ۱-۸۳ را می توان با روشهای معمول برای محاسبه انتگرالهای دوگانه محاسبه کرد.

### انتگرال حجم

این انتگرال ساده ترین نوع انتگرال است و همواره با استفاده از روشهای محاسبه انتگرالهای سه گانه به سادگی به دست می آید. انتگرال حجم عموماً به صورت  $\int_V A dv$  که در آن A کمیتی نردهای است ظاهر می شود.

مثال ۱-۶ بار الکتریکی با چگالی حجمی  $\rho = \rho_0 r^2/a^2$  برای  $r \leq a$  در کره ای به شعاع a توزیع شده است. مقدار کل بار الکتریکی را محاسبه نمایید.

$$Q = \int_V \rho dV = \int_V \rho_0 \frac{r^2}{a^2} (r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi)$$

$$= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{5} \rho_0 \pi a^3$$

■

مطالعه انواع دیگر انتگرالهای خط، سطح و حجم که به جزئیات آنها پرداخته نشده به تمرینات آخر فصل موکول گردیده است.

### ۵-۱ مشتقات میدانهای نردهای و برداری

میدان را می توان تابعی ریاضی دانست که بیانگر تغییرات یک کمیت فیزیکی در ناحیه ای از فضا باشد. بر حسب اینکه کمیت مورد نظر نردهای یا برداری باشد، میدان نیز نردهای یا برداری خواهد بود. به منظور روشن تر شدن مفهوم میدان به طور مثال می توان اطاقی را در نظر گرفت که در گوشه ای از آن یک منبع حرارتی وجود داشته باشد. منبع در اطراف خود یک میدان حرارتی به وجود می آورد و بر دمای هر نقطه اطاق تأثیر می گذارد. اگر دمای نقطه ای به مختصات  $(x, y, z)$  در لحظه t از رابطه  $T = T(x, y, z, t)$  به دست آید، تابع T بیان کننده میدان نردهای دما می باشد. به عنوان مثالی از میدان برداری می توان نیروی جاذبه زمین را نام برد. بر هر جسمی که در میدان جاذبه زمین قرار بگیرد نیرویی اعمال می شود که تابعی از مختصات نقطه ای است که جسم در آن واقع می باشد. اگر میدانی اعم از نردهای یا برداری نسبت به زمان تغییراتی نداشته باشد، آن را میدان ساکن گویند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن و میدانهای الکترومغناطیسی متغیر با زمان مبحث اصلی مطالعات ما را تشکیل می دهند.

تغییرات میدانهای نردهای و برداری نسبت به مکان و زمان و به خصوص مشتقات این میدانها نسبت به مکان، که تحت عنوان گرادیان، دیورژانس و کرل بیان می شوند، دارای اهمیت فراوانی در مطالعه میدانهای الکترومغناطیسی هستند و ادامه مطالب این فصل را به بحث و بررسی آنها اختصاص می دهیم.



## گرادیان

در ریاضیات عمومی آموخته‌ایم که مشتق تابع نرده‌ای  $f(x)$  نسبت به متغیر  $x$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (۸۴-۱)$$

وقتی که  $f$  تابعی از هر سه مختصه باشد ( $f = f(x, y, z)$ ) مبادرت به تعریف مشتقات پاره‌ای می‌کنیم. به عنوان مثال مشتق پاره‌ای  $f$  نسبت به  $x$ ، وقتی که  $y$  و  $z$  ثابت نگه داشته شوند، عبارت است از:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (۸۵-۱)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  را باید به عنوان مشتق یک بعدی تلقی نمود، زیرا فقط  $x$  تغییر کرده است و  $y$  و  $z$  ثابت فرض شده‌اند. در مشتق سه بعدی، که می‌توان آن را تعمیمی از مشتق یک بعدی دانست، تغییرات  $x$ ،  $y$  و  $z$  هر سه دخالت می‌کنند. افزایش دیفرانسیلی تابع تک مقداری و نرده‌ای  $f(x, y, z)$  از نقطه  $A(x, y, z)$  به نقطه  $B(x + dx, y + dy, z + dz)$  برابر است با:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (۸۶-۱)$$

عبارت سمت راست رابطه ۸۶-۱ را می‌توان نتیجه ضرب داخلی دو بردار زیر دانست:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) \quad (۸۷-۱)$$

بردار  $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$  را با علامت « $\nabla f$ » نشان داده و آن را گرادیان تابع نرده‌ای  $f$  می‌نامیم.

بردار دیگر همان عنصر طول  $dL$  می‌باشد. با استفاده از تعریف ضرب داخلی دو بردار می‌توان نوشت:

$$df = (\nabla f) \cdot (dL) = |\nabla f| |dL| \cos \alpha \quad (۸۸-۱)$$

در رابطه ۸۸-۱،  $\alpha$  زاویه بین بردارهای  $dL$  و  $\nabla f$  می‌باشد. یادآوری می‌شود که  $dL$  را می‌توان عنصر دیفرانسیلی بردار مکان  $\mathbf{r}$  دانست، زیرا  $dL = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$  است. حال به همان ترتیب که  $\frac{\partial f}{\partial x}$  را مشتق یک بعدی تابع  $f$  نسبت به مکان تعریف می‌کنیم، می‌توان  $\frac{df}{dL}$  را مشتق سه بعدی تابع  $f$  نسبت به مکان دانست. پس از تقسیم طرفین رابطه ۸۸-۱ به  $dL = |dL|$  داریم:

$$\frac{df}{dL} = |\nabla f| \cos \alpha \quad (۸۹-۱)$$

ولی برخلاف  $\frac{\partial f}{\partial x}$  که مقدار یکتایی دارد،  $\frac{df}{dL}$  دارای مقدار واحدی نیست. در حقیقت بینهایت نقطه با فاصله  $dL$  در همسایگی  $A$  یافت می‌شوند که برای هر کدام زاویه  $\alpha$  دارای مقدار خاصی است. از این رو  $\frac{df}{dL}$  فقط وقتی معنی خواهد داشت که در رابطه با جهت معینی باشد. بنابراین الزاماً اقدام به تعریف مشتق جهت‌دار می‌کنیم: «مشتق تابع نرده‌ای و تک مقداری  $f$  نسبت به مکان در جهت مشخصی برابر حد نسبت تغییرات جزئی تابع  $f$  ( $df$ ) به اندازه تغییرات جزئی بردار مکان ( $dL$ ) در آن جهت می‌باشد، وقتی

که  $dL$  به سمت صفر میل نماید.» قبلاً اشاره کرده‌ایم ولی هنوز ثابت ننموده‌ایم که بردار  $\nabla f$  و در نتیجه  $\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$  بر سطح  $f(x,y,z) = k$  عمود می‌باشد. بنابراین مشتق تابع  $f$  در جهت معینی که با بردار واحد  $\hat{a}_L$  مشخص شود برابر است با:

$$\frac{df}{dL} = |\nabla f| \cos \alpha = |\nabla f| \hat{a}_n \cdot \hat{a}_L \quad (۹۰-۱)$$

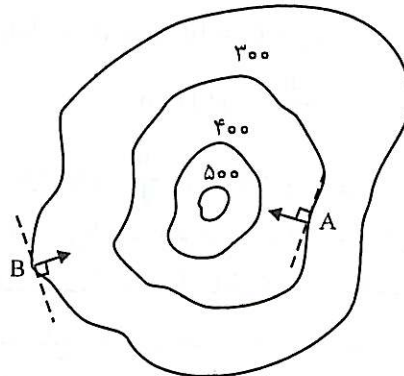
از رابطه ۹۰-۱ استنباط می‌شود که حداکثر  $\frac{df}{dL}$  برابر  $|\nabla f|$  است که به ازای  $\hat{a}_n = \hat{a}_L$  حاصل می‌شود. بنابراین می‌توان بیان نمود که: «گرادیان تابع نرده‌ای و تک‌مقداری  $f$  در یک نقطه، برداری است که اندازه آن برابر حداکثر نمو تابع در آن نقطه بوده و در جهت عمود بر سطح  $f(x,y,z) = k$  (یک مقدار ثابت است) باشد.» به طور خلاصه در دستگاه مختصات مستطیلی گرادیان تابع نرده‌ای  $f$  عبارت است از:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \quad (۹۱-۱)$$

علامت « $\nabla$ » را «del» تلفظ نموده و می‌توان آن را به صورت عملگری تلقی کرد که روی تابع  $f$  عمل می‌کند (  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z$  ). عملگر  $\nabla$  به طوری که بعداً خواهیم دید روی توابع برداری نیز عمل می‌کند و به طور کلی می‌توان با آن به مثابه یک بردار رفتار کرد.

گرادیان کاربردها و نمودهای متعددی در مسائل فیزیکی دارد. به عنوان مثال تپه‌ای را در نظر گرفته که نقاط هم سطح آن را به یکدیگر وصل نموده باشیم تا یک دسته منحنی‌های بسته مطابق شکل ۲۱-۱ حاصل شود. این منحنی‌ها با معادله  $E(x,y) = z$  مشخص می‌شوند که  $z$  ارتفاع نقاط هم سطح می‌باشد. گرادیان  $E$  در هر نقطه برداری است که بر منحنی بسته‌ای که از آن نقطه می‌گذرد عمود بوده و در جهت افزایش  $E$  باشد. در شکل ۲۱-۱ گرادیان  $E$  در نقاط  $A$  و  $B$  نشان داده شده است. حال تصور کنید که باران بر این تپه ببارد و جریانی از آب از بالای تپه به پایین به وجود آید. بدیهی است که آب باران در امتداد حداکثر شیب تپه جاری خواهد شد. به زبان آنالیز برداری آب در جهت  $-\nabla E$  جاری می‌شود. در فصل بعد خواهیم دید که شدت میدان الکتریکی برابر منهای گرادیان پتانسیل است.

متر  $z_0 = 200$



شکل ۲۱-۱: منحنی‌های بسته معرف نقاط هم سطح روی یک تپه

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$$

خواص گرادیان: با بیان دو قضیه با ویژگیهای گرادیان بیشتر آشنا می‌شویم.

قضیه ۱-۱: اگر  $A = \nabla f$  باشد که  $f = f(x,y,z)$  تابعی نرده‌ای و تک مقداری است، در آن صورت حاصل  $\int_{P_1}^{P_2} A \cdot dL$  مستقل از مسیری است که نقاط  $P_1$  و  $P_2$  را به یکدیگر وصل می‌کند.

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} A \cdot dL &= \int_{P_1}^{P_2} (\nabla f) \cdot dL = \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \int_{P_1}^{P_2} df = f \Big|_{P_1}^{P_2} \\ &= f(P_2) - f(P_1) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

نتیجه‌ای که فوراً از قضیه مزبور گرفته می‌شود این است که انتگرال گرادیان تابع نرده‌ای  $f$  حول هر مسیر بسته‌ای همواره صفر است:

$$\oint_C (\nabla f) \cdot dL = 0 \quad (92-1)$$

عکس قضیه فوق نیز درست است، یعنی اگر انتگرال  $\int_C A \cdot dL$  به مسیر  $C$  بستگی نداشته، بلکه فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی  $P_1$  و  $P_2$  روی مسیر بستگی داشته باشد، در آن صورت تابعی نرده‌ای مانند  $f$  وجود خواهد داشت به طوری که  $A = \nabla f$  باشد.

قضیه ۲-۱: گرادیان تابع نرده‌ای  $f(x,y,z)$  (یعنی  $\nabla f$ ) برداری است که بر سطح  $f(x,y,z) = k$  (مقداری ثابت است) عمود می‌باشد.

فرض می‌کنیم که  $A$  و  $B$  دو نقطه روی سطح  $f(x,y,z) = k$  بوده به طوری که  $A$  به مختصات  $(x,y,z)$  و  $B$  به مختصات  $(x+dx, y+dy, z+dz)$  باشد. به این ترتیب بردار عنصر طول  $dL$  روی سطح واقع است. حال  $\nabla f \cdot dL$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla f \cdot dL = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df = 0, \quad f = k = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین دو بردار  $dL$  و  $\nabla f$  بر یکدیگر عمودند، زیرا حاصل ضرب داخلی آنها برابر صفر است. حال چون  $dL$  ممکن است هر بردار عنصر طول دلخواهی روی سطح  $f(x,y,z) = k$  باشد، می‌توان نتیجه گرفت که بردار  $\nabla f$  بر سطح  $f = k$  عمود است.

گرادیان در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی: به طور کلی در یک دستگاه مختصات متعامد، گرادیان تابع نرده‌ای  $f(u_1, u_2, u_3)$  به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 = \frac{\partial f}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2} dL_2 + \frac{\partial f}{\partial L_3} dL_3$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial L_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \hat{a}_{u_3} \right) \cdot (dL_1 \hat{a}_{u_1} + dL_2 \hat{a}_{u_2} + dL_3 \hat{a}_{u_3})$$

بنابراین گرادیان  $f(u_1, u_2, u_3)$  عبارت است از :

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial L_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \hat{a}_{u_3} \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{a}_{u_3} \end{aligned} \quad (93-1)$$

با استفاده از رابطه ۱-۹۳ و جدول ۱-۳، عبارات گرادیان را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی به ترتیب به شرح زیر می‌نویسیم :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \quad (94-1)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \quad (95-1)$$

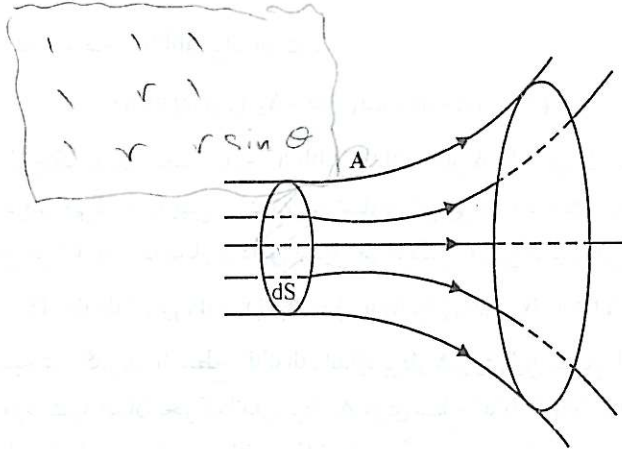
### دیورژانس

یک میدان برداری را می‌توان به طور ترسیمی با خطوط میدان یا خطوط شار نمایش داد. خطوط میدان منحنی‌هایی هستند که در هر نقطه بر بردار میدان مماس بوده و تراکم یا پراکندگی آنها در هر ناحیه از فضا بستگی به بزرگی یا کوچکی بردار (شدت یا ضعف میدان) در آن ناحیه دارد. هر چه اندازه بردار بزرگ‌تر باشد خطوط میدان تراکم‌تر بوده و در جاهایی که اندازه بردار کوچک‌تر است خطوط میدان نیز پراکنده‌تر هستند. جهت خطوط میدان همان جهت بردار می‌باشد. شکل ۱-۲۲ خطوط میدان را نشان می‌دهد.

شار بردار  $A$  که از عنصر سطح  $dS$  می‌گذرد، بر حسب تعریف از رابطه  $d\phi = A \cdot dS$  به دست می‌آید. حال عنصر حجم  $\Delta V$ ، که به سطح بسته  $\Delta S$  محدود می‌شود، را در نظر می‌گیریم. شار خالصی که از سطح بسته  $\Delta S$  خارج می‌شود برابر  $\oint_{\Delta S} A \cdot dS$  است. بر حسب تعریف، دیورژانس بردار  $A$  برابر حد نسبت شار خارج شده از سطح بسته  $\Delta S$  به عنصر حجم  $\Delta V$  است وقتی که  $\Delta V$  به سمت صفر میل کند.

جدول ۱-۳: مختصات، بردارهای واحد و ضرایب  $h$  برای محاسبه گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسیان در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی

سیستم مختصات	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\hat{a}_{u_1}$	$\hat{a}_{u_2}$	$\hat{a}_{u_3}$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
مستطیلی	$x$	$y$	$z$	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$	۱	۱	۱
استوانه‌ای	$r$	$\varphi$	$z$	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_\varphi$	$\hat{a}_z$	۱	$r$	۱
کروی	$r$	$\theta$	$\varphi$	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_\theta$	$\hat{a}_\varphi$	۱	$r$	$r \sin \theta$

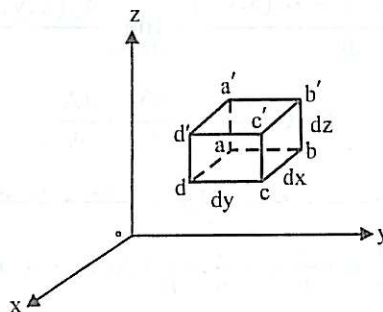


شکل ۱-۲۲: خطوط میدان معرف میدان برداری A

$$\text{Div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} A \cdot dS}{\Delta V} \quad (۹۶-۱)$$

دیورژانس بردار A به صورت « $\nabla \cdot A$ » نمایش داده می‌شود. به منظور استخراج رابطه دیورژانس یک بردار، ابتدا شار خالص خروجی از عنصر حجم  $\Delta V$ ، یعنی  $\oint_{\Delta S} A \cdot dS$  را محاسبه می‌کنیم. برای سهولت، محاسبات را در دستگاه مختصات مستطیلی انجام می‌دهیم. عنصر حجمی را به ابعاد  $dx$ ،  $dy$  و  $dz$  مطابق شکل ۱-۲۳ در نظر می‌گیریم. این عنصر حجم دارای سطح بسته‌ای است که از شش وجه مکعب مستطیل  $abcd a'b'c'd'$  تشکیل می‌شود. شار خالصی که از عنصر حجم خارج می‌شود برابر مجموع جبری شارهایی است که از شش وجه آن عبور می‌نمایند. مختصات نقطه  $a$  را  $(x,y,z)$  فرض می‌کنیم. در این صورت مختصات هفت رأس دیگر عنصر حجم، مشخص خواهند بود. بردار A در نقطه  $a$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A(x,y,z) = A_x(x,y,z)\hat{a}_x + A_y(x,y,z)\hat{a}_y + A_z(x,y,z)\hat{a}_z \quad (۹۷-۱)$$



شکل ۱-۲۳: عنصر حجم در دستگاه مختصات مستطیلی برای محاسبه دیورژانس

شار گذرنده از سطح  $abb'a'$  برابر است با :

$$(\Delta\phi)_{abb'a'} = A(x,y,z) \cdot (-dy dz \hat{a}_x) = -A_x(x,y,z) dy dz$$

به دلیل کوچک بودن عنصر سطح  $abb'a'$ ، اندازه بردار  $A$  را روی آن تقریباً ثابت و برابر مقدارش در نقطه  $a$  فرض می‌کنیم. بدیهی است که این تساوی تقریبی در حد وقتی که عنصر سطح مذکور به سمت صفر میل می‌کند به یک تساوی دقیق تبدیل می‌گردد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که :

$$(\Delta\phi)_{dcc'd'} = A(x+dx, y, z) \cdot (dy dz \hat{a}_x) = A_x(x+dx, y, z) dy dz \quad (۹۸-۱)$$

در محاسبه شار گذرنده از سطح  $dcc'd'$ ، اندازه بردار  $A$  روی این سطح را با مقدارش در نقطه  $d$  تقریب زده‌ایم، درست به همان نحو که اندازه بردار  $A$  روی سطح  $abb'a'$  را با مقدار این بردار در نقطه  $a$  تقریب زدیم. شاری که از دو سطح  $abb'a'$  و  $dcc'd'$  می‌گذرد عبارت است از :

$$(\Delta\phi)_{abb'a'} + (\Delta\phi)_{dcc'd'} = [A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z)] dy dz \quad (۹۹-۱)$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که :

$$(\Delta\phi)_{abcd} + (\Delta\phi)_{a'b'c'd'} = [A_z(x, y, z+dz) - A_z(x, y, z)] dx dy \quad (۱۰۰-۱)$$

$$(\Delta\phi)_{aa'd'd} + (\Delta\phi)_{bb'c'c} = [A_y(x, y+dy, z) - A_y(x, y, z)] dx dz \quad (۱۰۱-۱)$$

شار کل گذرنده از سطح بسته  $\Delta S$  را می‌توان از حاصل جمع عبارات سمت راست روابط ۹۹-۱ تا ۱۰۱-۱ به دست آورد:

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta S} A \cdot dS = (۱۰۲-۱) \text{ مجموع عبارات سمت راست روابط (۹۹-۱) تا (۱۰۱-۱)}$$

و سرانجام :

$$\nabla \cdot A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} A \cdot dS}{\Delta V} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z)}{dx}$$

$$+ \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A_y(x, y+dy, z) - A_y(x, y, z)}{dy} + \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{A_z(x, y, z+dz) - A_z(x, y, z)}{dz}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۱۰۳-۱)$$

دیورژانس بردار  $A$  در دستگاه مختصات مستطیلی را می‌توان نتیجه ضرب داخلی عملگر  $\nabla$  در بردار  $A$  دانست

$$\nabla \cdot A = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \\ = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۱۰۴-۱)$$

قضیه گوس: بردار  $A$  و سطح بسته  $S$ ، که دارای حجمی برابر  $V$  باشد، را در نظر می‌گیریم. حجم  $V$  را به تعداد زیادی عنصر مکعبی شکل تقسیم می‌کنیم. اگر عنصر  $i$ ام دارای حجمی برابر  $\Delta V_i$  و سطح کلی برابر  $\Delta S_i$  باشد، در آن صورت شار بردار  $A$  که از عنصر سطح  $\Delta S_i$  خارج می‌شود برابر است با:

$$\Delta \phi_i = \oint_{\Delta S_i} A \cdot dS = (\nabla \cdot A) \Delta V_i \quad (1-105)$$

حال اگر شارهای کلیه عناصر را با یکدیگر جمع کنیم، برای هر عنصری که کاملاً در درون حجم  $V$  واقع است شار خالص خارج شده از آن برابر مجموع شارهایی است که از شش عنصر مجاور به آن وارد می‌شوند. در نتیجه شارهای عناصری که کاملاً در داخل سطح بسته  $S$  قرار دارند یکدیگر را خنثی می‌کنند، لیکن عناصری که حداقل یک وجه آنها به سطح  $S$  محدود شود دارای شار خالص غیر صفر می‌باشند. بنابراین شار بردار  $A$  که از سطح بسته  $S$  می‌گذرد از طرفی برابر  $\phi = \oint_S A \cdot dS$  و از طرف دیگر، چون  $d\phi = A \cdot dS = (\nabla \cdot A) dV$  است، برابر با  $\phi = \int_V (\nabla \cdot A) dV$  است. در نتیجه رابطه زیر که بیان قضیه گوس یا قضیه دیورژانس است به دست می‌آید:

$$\oint_S A \cdot dS = \int_V (\nabla \cdot A) dV \quad (1-106)$$

$\frac{1}{V} \int_V (\nabla \cdot A) dV$   
 $\frac{1}{V} \int_V (\nabla \cdot A) dV$

توجه شود که رابطه ۱-۱۰۶ صرفاً بر اساس تعریف دیورژانس یک بردار که در رابطه ۱-۹۶ آمده است استخراج گردید و از این رو مستقل از نوع دستگاه مختصات به کار رفته می‌باشد. با استفاده از قضیه گوس می‌توان یک انتگرال سطح را به یک انتگرال حجم تبدیل نمود.

$$\nabla \cdot A = \cos \varphi + \cos \varphi + \cos \varphi = 3 \cos \varphi$$

دیورژانس در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی: محاسبه دیورژانس در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را می‌توان با دنبال نمودن همان روشی که در دستگاههای مختصات مستطیلی به کار رفت انجام داد. جزئیات محاسبات به عنوان تمرین به عهده دانشجویان واگذار می‌شود. می‌توان نشان داد که در یک دستگاه مختصات متعامد، دیورژانس بردار  $A$  از رابطه کلی زیر به دست می‌آید:

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (1-107)$$

$$A = A_1 \hat{a}_{u_1} + A_2 \hat{a}_{u_2} + A_3 \hat{a}_{u_3} \quad \text{که در آن:}$$

با استفاده از جدول ۱-۳ در رابطه ۱-۱۰۷، عبارت دیورژانس در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی به ترتیب برابر است با:

$\frac{1}{V}$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-108)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right] \quad (1-109)$$

$$\int_V 3 \cos \varphi r^2 dr d\varphi dz \quad \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L r^2 dr d\varphi dz = 3 \cos \varphi \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 dr d\varphi dz$$

برای روشن شدن مفهوم فیزیکی دیورژانس می‌توان مثال یک سیال غیر قابل تراکم را در نظر گرفت که چگالی حجمی آن  $\rho$  و سرعت آن در هر نقطه برابر  $\nabla$  است. برای چنین سیالی  $\nabla \cdot (\rho \nabla) = 0$  است، زیرا شار جرم وارد شده به یک سطح بسته همواره برابر شار خارج شده از آن است. به عبارت دیگر یک سیال غیر قابل تراکم نه در اطراف نقطه‌ای منبسط و نه به سمت نقطه‌ای متراکم می‌شود. ولی اگر یک ماده قابل انفجار را در نظر بگیریم که دارای حجم معینی باشد، پس از انفجار، حجم ماده افزایش یافته و مقداری جرم از مرزهای حجم قبل از انفجار ماده عبور می‌کند. در این حالت  $\nabla \cdot (\rho \nabla) > 0$  خواهد بود. در مبحث میدان الکتریکی اگر در بخشی از فضا که محدود به سطح بسته  $S$  است بار الکتریکی موجود باشد دیورژانس شدت میدان الکتریکی مقداری غیر صفر خواهد داشت. به طور خلاصه دیورژانس یک کمیت برداری را می‌توان به مولد (یا یکی از مولدهای) آن کمیت منسوب نمود و مقدار غیر صفر دیورژانس را در نقطه‌ای به منزله حضور مولد در آن نقطه تعبیر کرد.

مثال ۷-۱ با استفاده از قضیه گوس، حاصل  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  را برای  $\mathbf{A} = r \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - r \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  و سطح بسته  $S$  نشان داده شده در شکل ۲۰-۱ محاسبه نمایید.

حل:

این مسئله را قبلاً در مثال ۵-۱ با روش انتگرال‌گیری مستقیم روی سطح، مورد بررسی قرار داده و مقدار  $a^2/2$  را برای انتگرال مذکور محاسبه نموده‌ایم. اکنون با استفاده از قضیه گوس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-r \sin \varphi) = \cos \varphi \\ \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV &= \int_V \cos \varphi dV = \int_V r \cos \varphi dr d\varphi dz = \int_0^a r dr \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^l dz \\ &= \left( \frac{1}{2} a^2 \right) (1) (l) = \frac{1}{2} a^2 l \end{aligned}$$

■

کول

در مبحث گرادیان نشان داده شد که اگر میدان برداری  $\mathbf{A}$  بر حسب گرادیان تابع نرده‌ای  $f$  قابل بیان باشد، انتگرال  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  حول هر مسیر بسته‌ای همواره برابر صفر است. چنین میدانهایی را پایستار<sup>۱</sup> نامند. میدان الکتریکی ساکن به طوری که بعداً خواهیم دید یک میدان پایستار است. دسته دیگری از میدانها که دارای انتگرال غیر صفر حول یک مسیر بسته هستند غیر پایستار نامیده می‌شوند. میدان مغناطیسی یک میدان غیر پایستار می‌باشد. مقدار انتگرال یک میدان برداری غیر پایستار را حول یک



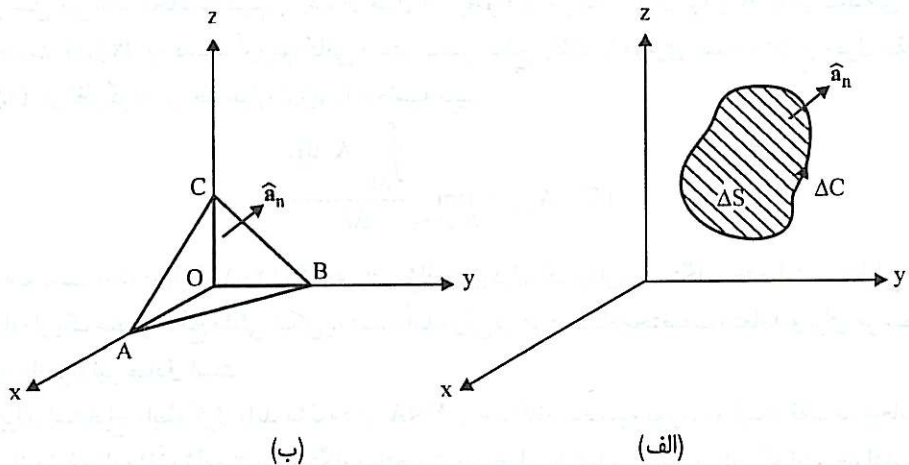
مسیر بسته به عنوان سیرکولاسیون<sup>۱</sup> آن میدان تعریف می‌کنیم. عنصر سطح  $\Delta S$  را که دارای محیط  $\Delta C$  باشد در میدان بردار  $A$  مطابق شکل ۱-۲۴-الف در نظر می‌گیریم. سیرکولاسیون بردار  $A$  حول مسیر بسته  $\Delta C$  را با  $\oint_{\Delta C} A \cdot dL$  بیان نموده و فرض می‌کنیم که  $\Delta S$  طوری قرار گرفته باشد که  $\oint_{\Delta C} A \cdot dL$  حداکثر مقدار ممکن را دارا باشد. همچنین بردار واحد  $\hat{a}_n$  را عمود بر سطح  $\Delta S$  طوری در نظر می‌گیریم که در جهت پیشروی پیچ راستگردی باشد که در جهت انتخاب شده روی  $\Delta C$  بچرخد. آنگاه کرل بردار  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Curl } A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} A \cdot dL}{\Delta S} \hat{a}_n \quad (110-1)$$

کرل بردار  $A$  به صورت  $\nabla \times A$  نشان داده می‌شود. همان‌طور که از رابطه ۱-۱۱۰ بر می‌آید، کرل یک بردار نیز خود یک بردار است. اندازه کرل یک بردار برابر سیرکولاسیون بردار بر واحد سطح است وقتی که سطح به سمت صفر میل نماید و در شرایط میل کردن سطح به سمت صفر  $\oint_{\Delta C} A \cdot dL$  همواره حداکثر باقی بماند.

قبل از اینکه رابطه کرل را به دست آوریم، مؤلفه‌های کرل یک بردار را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور عنصر سطحی را مطابق شکل ۱-۲۴-ب در نظر گرفته و  $\oint_{\Delta C} A \cdot dL$  را به سه انتگرال به شرح زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\oint_{ABCA} A \cdot dL = \oint_{BCOB} A \cdot dL + \oint_{AOCA} A \cdot dL + \oint_{ABOA} A \cdot dL \quad (111-1)$$



شکل ۱-۲۴: عناصر سطح مورد نیاز برای تعریف کرل و مؤلفه‌های آن (الف) عنصر سطح برای تعریف کرل (ب) عنصر مثلی شکل سطح برای محاسبه مؤلفه‌های کرل

عناصر سطح ABC، BCO، AOC و ABO را به ترتیب با  $\Delta S_x$ ،  $\Delta S_y$ ،  $\Delta S_z$  و محیطهای آنها را به ترتیب با  $\Delta C_x$ ،  $\Delta C_y$ ،  $\Delta C_z$  نشان می‌دهیم. پس از تقسیم طرفین رابطه ۱-۱۱۱ بر  $\Delta S$  می‌توان نوشت:

$$\frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} = \frac{\oint_{\Delta C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} + \frac{\oint_{\Delta C_y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} + \frac{\oint_{\Delta C_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} \quad (1-112)$$

اما از طرفی:

$$\Delta S = \frac{\Delta S_x}{\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_n} = \frac{\Delta S_y}{\hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_n} = \frac{\Delta S_z}{\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_n} \quad (1-113)$$

پس از استفاده از رابطه ۱-۱۱۳ در رابطه ۱-۱۱۲ و احتساب حد طرفین وقتی که  $\Delta S \rightarrow 0$  است، داریم:

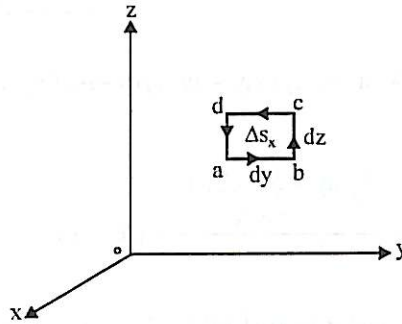
$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} = \hat{\mathbf{a}}_n \cdot \left[ \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_x} \hat{\mathbf{a}}_x + \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C_y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_y} \hat{\mathbf{a}}_y + \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_z} \hat{\mathbf{a}}_z \right] \quad (1-114)$$

اندازه کرل  $\mathbf{A}$  ( $|\nabla \times \mathbf{A}|$ ) طبق تعریف کرل برابر حداکثر عبارت سمت چپ رابطه ۱-۱۱۴ می‌باشد. واضح است که این مقدار حداکثر وقتی حاصل می‌شود که در سمت راست رابطه ۱-۱۱۴ بردار واحد  $\hat{\mathbf{a}}_n$  و برداری که در داخل پراتنز می‌باشد هم‌جهت باشند (زاویه بین آنها صفر باشد). از این رو بردار داخل پراتنز در واقع  $\nabla \times \mathbf{A}$  می‌باشد و برای به دست آوردن هر کدام از مؤلفه‌های آن کافی است که سیرکولاسیون بردار  $\mathbf{A}$ ، بر واحد سطحی عمود بر امتداد مؤلفه مورد نظر را، وقتی آن سطح به سمت صفر میل می‌کند، محاسبه کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم مؤلفه  $x$  کرل بردار  $\mathbf{A}$  را در نقطه‌ای به مختصات  $(x, y, z)$  به دست آوریم، کافی است عنصر سطح  $\Delta S_x$  را موازی صفحه  $yz$  و حول نقطه  $(x, y, z)$  در نظر گرفته و حد عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_x}$$

نتیجه به دست آمده در رابطه ۱-۱۱۴ اگرچه برای مؤلفه‌های کرل یک بردار در دستگاه مختصات مستطیلی و با استفاده از یک عنصر سطح مثلثی شکل به دست آمد، ولی در هر دستگاه مختصات متعامد و برای هر عنصر سطح دلخواه نیز صادق است.

برای استخراج رابطه کرل باید مؤلفه‌های  $\nabla \times \mathbf{A}$  را جداگانه محاسبه نمود. در اینجا فقط به محاسبه یکی از مؤلفه‌ها، مثلاً مؤلفه  $x$  در دستگاه مختصات مستطیلی، اکتفا می‌کنیم. روشی که ارائه خواهد شد را می‌توان برای محاسبه مؤلفه‌های کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی نیز به کار برد. برای سادگی، عنصر سطح  $\Delta S_x$  را به شکل مربع مستطیلی با ابعاد  $dy$  و  $dz$ ، مطابق شکل ۱-۲۵، در نظر می‌گیریم. مختصات نقطه  $\mathbf{a}$  را برابر  $(x, y, z)$  فرض می‌کنیم و در این صورت مختصات سه رأس دیگر



شکل ۱-۲۵: عنصر سطح مستطیلی شکل  $\Delta S_x$  با محیط  $\Delta C_x$  برای محاسبه مؤلفه  $x$  کرل یک بردار

عنصر سطح مشخص خواهند بود. بردار  $A$  در نقطه  $a$  عبارت است از:

$$A(x,y,z) = A_x(x,y,z) \hat{a}_x + A_y(x,y,z) \hat{a}_y + A_z(x,y,z) \hat{a}_z$$

حال  $\oint_{\Delta C_x} A \cdot dL$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta C_x} A \cdot dL &= \oint_{\Delta C_x} (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \cdot (dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) \\ &= \oint_{\Delta C_x} A_y dy + \oint_{\Delta C_x} A_z dz \end{aligned} \quad (1-115)$$

$$\oint_{\Delta C_x} A_y dy = \left[ \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] A_y dy$$

چون در فواصل  $b$  تا  $c$  و  $d$  تا  $a$  تغییرات  $y$  صفر است:

$$\int_b^c A_y dy = \int_d^a A_y dy = 0 \quad (1-116)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta C_x} A_y dy &= \int_a^b A_y dy + \int_c^d A_y dy \\ &= A_y(x,y,z) dy - A_y(x,y,z+dz) dy \end{aligned} \quad (1-117)$$

در محاسبه  $\int_a^b A_y dy$  مقدار  $A_y$  در فاصله  $a$  تا  $b$  تقریباً ثابت و برابر  $A_y$  در نقطه  $a$  فرض شده است. بدیهی است که این تقریب وقتی که  $dy$  به سمت صفر میل کند به یک تساوی دقیق تبدیل خواهد شد. به همین ترتیب مقدار  $A_y$  در فاصله  $c$  تا  $d$  تقریباً ثابت و برابر مقدارش در نقطه  $d$ ، که به مختصات  $(x,y,z+dz)$  است، فرض شده است.

به نحو مشابه می‌توان نشان داد که :

$$\oint_{\Delta C_x} A_z dz = A_z(x, y + dy, z) dz - A_z(x, y, z) dz \quad (118-1)$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_x} &= \lim_{\substack{dy \rightarrow 0 \\ dz \rightarrow 0}} \frac{\oint_{\Delta C_x} A_y dy + \oint_{\Delta C_x} A_z dz}{dy dz} = (\nabla \times \mathbf{A})_x \\ &= \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{A_y(x, y, z) - A_y(x, y, z + dz)}{dz} + \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A_z(x, y + dy, z) - A_z(x, y, z)}{dy} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_x &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (119-1)$$

سایر مؤلفه‌های  $\nabla \times \mathbf{A}$  را می‌توان مطابق روش فوق محاسبه نمود. سرانجام به طور خلاصه می‌توان نوشت :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (120-1)$$

در دستگاه مختصات مستطیلی، کرل بردار  $\mathbf{A}$  را می‌توان نتیجه ضرب خارجی عملگر  $\nabla$  در بردار  $\mathbf{A}$  دانست :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \times (A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z) \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned} \quad (121-1)$$

و با توجه به اینکه ضرب خارجی را می‌توان به صورت دترمینان نیز نوشت ، داریم :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (122-1)$$

کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی : محاسبه کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را می‌توان با به کار بستن همان روشی که در دستگاه مختصات مستطیلی استفاده شد، انجام داد. در اینجا فقط به ذکر نتیجه کلی برای یک دستگاه مختصات متعامد اکتفا می‌کنیم.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{a}}_{u_1} & h_2 \hat{\mathbf{a}}_{u_2} & h_3 \hat{\mathbf{a}}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (123-1)$$

با استفاده از جدول ۱-۳ در رابطه ۱-۱۲۳ و بسط دترمینان، عبارت کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی به ترتیب به شرح زیر خلاصه می‌گردند:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (1-124)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (1-125)$$

قضیه استوکس: سطح  $S$  را که به منحنی بسته  $C$  محدود می‌شود، مطابق شکل ۱-۲۶، در نظر می‌گیریم. اگر این سطح را به عناصر کوچک تقسیم نماییم در این صورت برای هر عنصر سطح با توجه به تعریف کرل می‌توان نوشت:

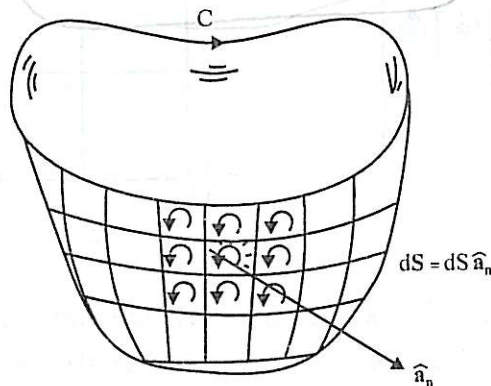
$$\oint_{\Delta C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}_i = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_i \quad (1-126)$$

لیکن:

$$\sum_{\text{تمام عناصر سطح}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_i = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\Delta C_i} \oint_{\Delta C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}_i$$

کلیه اضلاع عناصر سطح به جز آنهایی که محدود به منحنی بسته  $C$  می‌شوند دوبار در مجموع  $\sum \oint_{\Delta C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}_i$  ظاهر می‌شوند و بنابراین سهم هر ضلع در مجموع صفر می‌باشد (زیرا در امتداد هر ضلع دوبار ولی در دو جهت مخالف انتگرال گرفته می‌شود). بدین ترتیب نتیجه زیر را که همان بیان قضیه استوکس است به دست می‌آوریم:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \quad (1-127)$$

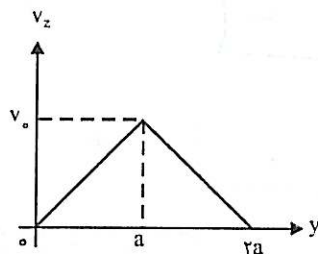


شکل ۱-۲۶: سطح  $S$  محدود به منحنی بسته  $C$  برای اثبات قضیه استوکس

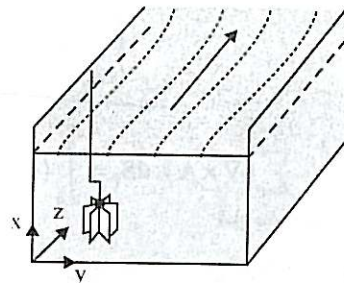
اگر منحنی بسته  $C$  را به تدریج کوچک نماییم به طوری که نهایتاً محیط آن صفر شود، در این صورت انتگرال  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  به سمت صفر میل خواهد کرد و سطح  $S$  نیز به صورت یک سطح بسته درخواهد آمد. از این رو، نتیجه زیر، که بیان می‌کند انتگرال کرل هر بردار روی هر سطح بسته‌ای همواره صفر است، را می‌توان به دست آورد:

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-28)$$

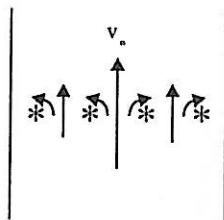
به منظور روشن شدن مفهوم فیزیکی کرل، چرخ پره‌داری را مطابق شکل ۱-۲۷-الف مطالعه می‌کنیم. جریانی از آب در امتداد محور  $z$  که دارای سرعت  $\mathbf{v}$  باشد را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که سرعت  $\mathbf{v}$  مستقل از ارتفاع آب باشد و به طور یکنواخت از مقدار صفر در جدار ظرف تا مقدار حداکثری مانند  $v_0$  در وسط ظرف افزایش یابد. بدین ترتیب بردار سرعت فقط دارای مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_z$  بوده و تابعی خطی از  $y$  می‌باشد، به طوری که می‌توان نوشت:



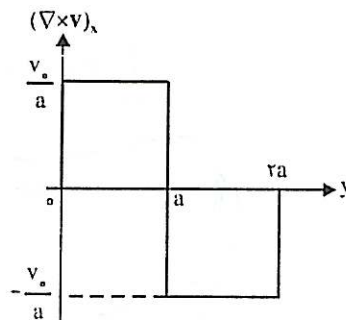
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۱-۲۷: چرخ پره‌دار به منظور تشریح مفهوم فیزیکی کرل یک بردار (الف) چرخ پره‌دار در آب (ب) تغییرات سرعت آب (ج) مؤلفه  $x$  کرل بردار سرعت (د) جهت چرخش پرها

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v \cdot \frac{y}{a} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < y < a \\ v \cdot \frac{2a-y}{a} \hat{\mathbf{a}}_z & a < y < 2a \end{cases} \quad (129-1)$$

کرل بردار سرعت برابر است با :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_x = \begin{cases} \frac{v}{a} \hat{\mathbf{a}}_x & 0 < y < a \\ -\frac{v}{a} \hat{\mathbf{a}}_x & a < y < 2a \end{cases} \quad (130-1)$$

تغییرات  $v_z$  و  $(\nabla \times \mathbf{v})_x$  بر حسب  $y$  در شکل ۱-۲۷ نشان داده شده‌اند. حال چرخ پره‌داری را در نظر می‌گیریم که به طور قائم در آب فرو رفته باشد و فرض می‌کنیم که اصطکاک چرخ با آب قابل اغماض بوده و حضور آن در آب تأثیری بر سرعت آب نداشته باشد. ملاحظه می‌کنیم که وقتی چرخ در ناحیه‌ای قرار بگیرد که  $0 < y < a$  است، در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و وقتی که در ناحیه  $a < y < 2a$  واقع شود، در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. به علاوه وقتی چرخ را در امتداد عرض یا عمق جریان آب حرکت دهیم (در امتداد  $y$  یا  $x$ ) سرعت چرخش تغییری نمی‌کند. در مرکز جریان آب ( $y=a$ ) سرعت چرخش صفر است، زیرا جریان آب نیروهای مساوی به پره‌های دو طرف محور وارد می‌آورد. حال اگر رفتار چرخ پره‌دار را با منحنی تغییرات  $(\nabla \times \mathbf{v})_x$  مقایسه کنیم، مفهوم فیزیکی کرل روشن می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که سرعت چرخش در هر نقطه متناسب با اندازه  $\nabla \times \mathbf{v}$  است. اگر چرخ را به طور افقی (محور آن در امتداد محور  $z$ ) یا عرضی (محور آن در امتداد محور  $y$ ) در آب قرار دهیم، هیچ‌گونه چرخشی مشاهده نخواهد شد. به بیان دیگر بردار سرعت در جهات افقی و عرضی دارای کرل صفر می‌باشد.

مثال ۱-۸ با استفاده از قضیه استوکس، حاصل  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$  را روی مسیر شکل ۱-۱۵ برای بردار

$$\mathbf{A} = (2x + y^2)\hat{\mathbf{a}}_x + (2y - 4x)\hat{\mathbf{a}}_y$$

حل :

این مسئله را قبلاً در مثال ۱-۲ به روش انتگرال‌گیری مستقیم روی مسیر بسته مورد بررسی قرار داده و مقدار  $-\frac{14}{3}$  را برای انتگرال مذکور محاسبه نموده‌ایم. اکنون با استفاده از قضیه استوکس می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z = (-4 - 2y)\hat{\mathbf{a}}_z, \quad d\mathbf{S} = dx dy \hat{\mathbf{a}}_z \\ \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} &= - \int_S (4 + 2y) dx dy = - \int_0^2 dx \int_0^2 (4 + 2y) dy \\ &= - \int_0^2 \left( 2x + \frac{x^2}{2} \right) dx = -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

لاپلاسیان<sup>۱</sup>

لاپلاسیان یک تابع نردهای به صورت دیورژانس گرادیان آن تابع تعریف می شود. در دستگاه مختصات مستطیلی لاپلاسیان تابع نردهای  $f$  را می توان به سادگی محاسبه نمود. لاپلاسیان با علامت « $\nabla^2$ » نمایش داده می شود.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1-131)$$

به طور کلی در یک دستگاه مختصات متعامد، لاپلاسیان تابع نردهای  $f$  عبارت است از:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1-132)$$

با استفاده از جدول ۱-۳ در رابطه ۱-۱۳۲، عبارت لاپلاسیان در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی به ترتیب برابر است با:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1-133)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1-134)$$

لاپلاسیان یک تابع برداری به صورت گرادیان دیورژانس، منهای کرل کرل آن بردار تعریف می شود:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-135)$$

می توان نشان داد که در دستگاه مختصات مستطیلی لاپلاسیان یک بردار مساوی مجموع لاپلاسیان مؤلفه‌های آن می باشد:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{a}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{a}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z \quad (1-136)$$

در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی لاپلاسیان بردار  $\mathbf{A}$  را باید از بسط عبارت سمت راست رابطه ۱-۱۳۵ به دست آورد، زیرا در دستگاههای مختصات مذکور، مؤلفه‌های لاپلاسیان یک بردار مساوی لاپلاسیان مؤلفه‌های متناظر آن نیستند.

قضیه هلمولتز<sup>۲</sup>

در قسمتهای قبلی با مفاهیم گرادیان، دیورژانس و کرل آشنا شدیم. اگر برداری دارای دیورژانس صفر باشد شار خالص گذرنده از هر سطح بسته دلخواه برای چنین برداری همواره صفر است. یک بردار با دیورژانس صفر را بردار یا میدان برداری سیمپلوه‌ای<sup>۳</sup> نامند. به علاوه اگر برداری دارای کرل صفر باشد سیرکولاسیون چنین برداری روی هر مسیر بسته دلخواه همواره صفر است. چنین برداری معرف یک میدان

1 - Laplacian

2 - Helmholtz's Theorem

3 - Solenoidal



پایستار است و از آن به عنوان بردار یا میدان برداری غیرچرخشی<sup>۱</sup> یاد می‌شود. بردارها را بر حسب اینکه سیملوله‌ای یا غیر چرخشی باشند یا نه به چهار دسته تقسیم می‌کنند. میدان برداری  $A$  از نوع:

- سیملوله‌ای و غیرچرخشی است اگر  $\nabla \cdot A = 0$  و  $\nabla \times A = 0$  باشد،

- سیملوله‌ای و چرخشی است اگر  $\nabla \cdot A = 0$  و  $\nabla \times A \neq 0$  باشد،

- غیر سیملوله‌ای و غیر چرخشی است اگر  $\nabla \cdot A \neq 0$  و  $\nabla \times A = 0$  باشد،

- غیر سیملوله‌ای و چرخشی است اگر  $\nabla \cdot A \neq 0$  و  $\nabla \times A \neq 0$  باشد.

دیورژانس یک بردار را می‌توان به عنوان منبع فورانی<sup>۲</sup> و کرل آن را به عنوان منبع گردابی<sup>۳</sup> آن میدان برداری تلقی کرد. به عنوان مثال بار الکتریکی به منزله یک منبع فورانی برای میدان الکتریکی ساکن و جریان الکتریکی به عنوان یک منبع گردابی برای میدان مغناطیسی ساکن محسوب می‌شوند.

قضیه هلمولتز بیان می‌دارد که اگر دیورژانس و کرل یک بردار در کلیه نقاط فضا معلوم باشند، آن بردار را می‌توان (تا حد یک مقدار ثابت برداری) به طور کامل تعیین کرد. به عبارت دیگر، اگر منابع به وجود آورنده یک میدان معلوم باشند آن میدان به طور کامل قابل محاسبه است. اثبات این قضیه در اینجا آورده نمی‌شود ولی بر اهمیت آن در فهم میدانهای برداری تأکید می‌گردد.

یک میدان برداری، که در حالت کلی از نوع غیر سیملوله‌ای و چرخشی است، را می‌توان به دو میدان که یکی غیرسیملوله‌ای و غیر چرخشی و دیگری سیملوله‌ای و چرخشی باشد تجزیه کرد. مثلاً برای میدان برداری  $A$  می‌توان نوشت:

$$A = A_1 + A_2 \quad (1-137)$$

به طوری که:

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_1 = p \\ \nabla \times A_1 = 0 \end{cases} \quad (1-138)$$

(1-139)

و:

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_2 = 0 \\ \nabla \times A_2 = P \end{cases} \quad (1-140)$$

(1-141)

$P$  و  $p$  که به ترتیب معرف منابع گردابی و فورانی هستند معلوم فرض می‌شوند. بدیهی است که:

$$\nabla \cdot A = \nabla \cdot A_1 = p \quad (1-142)$$

$$\nabla \times A = \nabla \times A_2 = P \quad (1-143)$$

بر اساس قضیه هلمولتز اگر  $P$  و  $p$  در کلیه نقاط فضا معلوم باشند، آنگاه  $A$  به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$A = A(p, P) + A_s \quad (1-144)$$

که  $A_1$  یک مقدار ثابت برداری است و با استفاده از شرایط مرزی مسئله تعیین می شود. با توجه به اینکه  $\nabla \times A_1 = 0$  و از طرف دیگر  $(\nabla \cdot \nabla V) = 0$  که  $V$  یک میدان نرده‌ای دلخواه می باشد (برای اثبات این رابطه به مسئله ۱-۳۱ مراجعه کنید) می توان نوشت:

$$A_1 = -\nabla V \quad (1-145)$$

بالاخره با مقایسه  $\nabla \cdot A_2 = 0$  و اتحاد برداری  $(\nabla \times \nabla \times U) = \nabla(\nabla \cdot U) - \nabla^2 U$  (برای اثبات این رابطه به مسئله ۱-۳۱ مراجعه کنید) می توان نتیجه گرفت که:

$$A_2 = \nabla \times U \quad (1-146)$$

با جایگزین نمودن روابط ۱-۱۴۵ و ۱-۱۴۶ در رابطه ۱-۱۳۷ داریم:

$$A = -\nabla V + \nabla \times U \quad (1-147)$$

رابطه ۱-۱۴۷ این نتیجه مهم را بیان می کند که هر بردار دلخواهی را می توان به صورت حاصل جمع گرادیان یک تابع نرده‌ای و کرل یک تابع برداری نوشت. از این نتیجه به عنوان یک رابطه زیربنایی در تجزیه و تحلیل مسائل الکترومغناطیس استفاده می شود.

### ۶-۱ خلاصه فصل

- قواعد ساده برداری از جمله جمع، تفریق، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها را مطالعه نمودیم.
- دستگاههای مختصات متعامد و از جمله دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی را تعریف نموده و بردارهای واحد در این دستگاهها و خواص آنها را مطالعه کردیم. همچنین جمع و ضرب بردارها را بر حسب مؤلفه‌هایشان در دستگاههای مختصات مزبور بیان داشتیم.
- بردار مکان را به منظور مشخص نمودن نقاط فضا تعریف کرده و بیان آن را در دستگاههای مختلف آموختیم.
- انتگرالهای خط، سطح و حجم و نحوه محاسبه آنها را مطالعه نمودیم.
- مشتقات توابع نرده‌ای و برداری، به ویژه گرادیان، دیورژانس و کرل را تعریف کرده و نتایج را در حالت کلی در یک دستگاه مختصات متعامد بیان داشتیم.
- قضیه گوس (یا قضیه دیورژانس) که انتگرال حجم را به انتگرال سطح یا بالعکس و قضیه استوکس که انتگرال سطح را به انتگرال خط یا بالعکس تبدیل می کند را نتیجه گیری کردیم:

$$\int_V \nabla \cdot A \, dV = \oint_S A \cdot dS \quad \text{قضیه گوس}$$

$$\int_S (\nabla \times A) \cdot dS = \oint_C A \cdot dL \quad \text{قضیه استوکس}$$

- نشان دادیم که گرادیان یک تابع نرده‌ای همواره یک میدان برداری پایستار است:

$$\oint_C (\nabla V) \cdot d\mathbf{L} = 0$$

• قضیه هلمولتز را که بیان می‌دارد یک بردار را با در دست داشتن دیورژانس و کرل آن می‌توان به طور کامل (تا حد یک بردار ثابت) تعیین نمود، به اختصار بررسی کردیم.

### ۷-۱ مسائل خودآزمایی

این مسائل را می‌توان عمدتاً به دو گروه دسته‌بندی نمود:

الف) مسائلی که مستقیماً در برگیرنده عملیات ساده برداری از قبیل جمع، تفریق، ضرب داخلی، ضرب خارجی، محاسبه اندازه بردار و مشتق‌گیری بوده یا بررسی آنها مستلزم استفاده از مفاهیم مذکور می‌باشد. مسائل ۱ تا ۱۰ را می‌توان در زمره این گروه به شمار آورد. در این‌گونه مسائل بیان همه بردارهای به کار رفته در یک رابطه برحسب مؤلفه‌هایشان در یک دستگاه مختصات واحد بسیار مفید خواهد بود. همچنین، بیان بردارهای واحد استوانه‌ای و کروی برحسب بردارهای واحد مستطیلی با استفاده از روابط ۱-۴۸ تا ۱-۵۲ به سادگی زیادی در حل برخی مسائل مانند ۲، ۳، و ۹ منجر می‌شود.

ب) گروه دیگر این مسائل شامل انتگرالهای خط، سطح و حجم می‌باشند. مسائل ۱۱ تا ۲۲ از این‌گونه‌اند. در این مسائل، انتگرال‌گیری ممکن است با تجزیه انتگرال مورد نظر روی بخشهای مختلف مسیر یا سطح مورد نظر انجام گیرد. لیکن اگر مسیر انتگرال یک منحنی بسته باشد استفاده از قضیه استوکس (رابطه ۱-۱۲۷)، و در صورتی که سطح انتگرال یک سطح بسته باشد استفاده از قضیه دیورژانس (رابطه ۱-۱۰۶) غالباً به آسان‌تر شدن محاسبه انتگرال مورد نظر می‌انجامد. به عنوان مثال، حل مسئله ۱۲-ب با استفاده از قضیه استوکس به مراتب ساده‌تر از انتگرال‌گیری مستقیم می‌باشد.

بالاخره، اگر کمیت برداری مورد انتگرال‌گیری شامل بردارهای واحد استوانه‌ای یا کروی باشد (به عبارت

دیگر انتگرال از نوع  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ ،  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{L}$ ،  $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ ،  $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ ،  $\int_V \mathbf{A} \cdot dV$  یا  $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ ، که در آنها بردارهای  $\mathbf{A}$ ،  $d\mathbf{L}$  و  $d\mathbf{S}$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای یا کروی بیان شده‌اند، باشد) چون  $\hat{\mathbf{a}}_r$ ،  $\hat{\mathbf{a}}_\theta$  و  $\hat{\mathbf{a}}_\phi$  در نقاط مختلف فضا جهت ثابتی نداشته و متغیر محسوب می‌شوند، نمی‌توان آنها را به بیرون انتگرال انتقال داد. از این رو بیان این بردارهای واحد برحسب بردارهای واحد مستطیلی  $\hat{\mathbf{a}}_x$ ،  $\hat{\mathbf{a}}_y$  و  $\hat{\mathbf{a}}_z$  که همواره ثابت هستند ضروری است. این‌گونه انتگرالها در محاسبه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به ترتیبی که در فصول ۲ و ۵ ملاحظه خواهد شد کاربرد پیدا می‌کنند. نمونه‌هایی از این‌گونه انتگرالها را در مسائل ۲۰ تا ۲۲ بررسی می‌کنیم.