

میدان مغناطیسی ساکن در اجسام، نیرو و انرژی مغناطیسی

۲. یک دیسک نازک آهنی به شعاع a و ضخامت t در امتداد موازی محورش مغناطیس شده است. در صورتی که چگالی گشتاور مغناطیسی برابر مقدار ثابت M_0 باشد، میدانهای B و H را روی محور دیسک، هم در داخل و هم در خارج آن، به دست آورید.

۲. دیسک مغناطیس شده را می توان با جریانهای J_m و J_{ms} جایگزین نمود.

$$J_m = \nabla \times M = \nabla \times (M_0 \hat{a}_z) = 0$$

$$J_{ms} = M \times \hat{a}_n = M_0 \hat{a}_z \times \hat{a}_r = M_0 \hat{a}_\phi, \quad r=a, \quad -\frac{t}{2} < z < \frac{t}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_{ms} \times (r-r')}{|r-r'|^3} dS'$$

$$r = z \hat{a}_z, \quad r' = a \hat{a}_r + z' \hat{a}_z, \quad r-r' = -a \hat{a}_r + (z-z') \hat{a}_z$$

$$|r-r'|^3 = [a^2 + (z-z')^2]^{3/2}, \quad dS' = a d\phi' dz'$$

$$J_{ms} \times (r-r') = M_0 \hat{a}_\phi \times [-a \hat{a}_r + (z-z') \hat{a}_z] = a M_0 \hat{a}_z + M_0 (z-z') \hat{a}_r$$

$$\begin{aligned} B(\cdot, \cdot, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ a^2 M_0 \hat{a}_z \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-t/2}^{t/2} \frac{dz'}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. M_0 a \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \hat{a}_x + \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' \hat{a}_y \right] \int_{-t/2}^{t/2} \frac{(z-z') dz'}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 M_0 a^2 \hat{a}_z \left[\frac{-(z-z')}{a^2 \sqrt{a^2 + (z-z')^2}} \right]_{-t/2}^{t/2} \end{aligned}$$

$$B(\cdot, \cdot, z) = \frac{1}{2} \mu_0 M_0 \left[\frac{-z + \frac{t}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(z - \frac{t}{2}\right)^2}} + \frac{z + \frac{t}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(z + \frac{t}{2}\right)^2}} \right] \hat{a}_z$$

$$H = B / \mu_0 \quad (\text{در بیرون دیسک}), \quad |z| > \frac{t}{2}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{B}{\mu_0} - M_0 \hat{a}_z, \quad |z| < \frac{t}{2}$$

۳. یک کره آهنی به شعاع a به طور یکنواخت مغناطیس شده است، به طوری که چگالی گشتاور مغناطیسی ایجاد شده در آن برابر $M = M_0 \hat{a}_z$ می باشد. میدانهای B و H را در مرکز کره آهنی محاسبه نمایید.

۳. کره آهنی مغناطیس شده را می توان با جریانهای مغناطیسی جایگزین نمود. چگالیهای این جریانها عبارتند از:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (M_s \hat{\mathbf{a}}_z) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_n = (M_s \hat{\mathbf{a}}_z) \times \hat{\mathbf{a}}_r = M_s \sin \theta' \hat{\mathbf{a}}_\varphi, \quad r=a$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_{ms} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}' = a \hat{\mathbf{a}}_r, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a \hat{\mathbf{a}}_r, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a, \quad dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

$$\mathbf{J}_{ms} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = M_s \sin \theta' \hat{\mathbf{a}}_\varphi \times (-a \hat{\mathbf{a}}_r) = -a M_s \sin \theta' \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

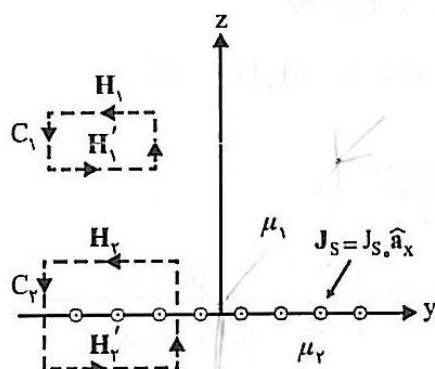
$$= -a M_s \sin \theta' (\cos \theta' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \theta' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y - \sin \theta' \hat{\mathbf{a}}_z)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = -\frac{\mu_0 M_s a^2}{4\pi a^3} \left[\hat{\mathbf{a}}_x \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' \int_0^\pi \sin^3 \theta' \cos \theta' d\theta' + \hat{\mathbf{a}}_y \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' \int_0^\pi \sin^3 \theta' \cos \theta' d\theta' + \hat{\mathbf{a}}_z \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi -\sin^3 \theta' d\theta' \right] = \frac{2}{3} \mu_0 M_s \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{0}) = \mathbf{B}(\mathbf{0}) / \mu_0 - \mathbf{M}(\mathbf{0}) = \frac{2}{3} M_s \hat{\mathbf{a}}_z - M_s \hat{\mathbf{a}}_z = -\frac{1}{3} M_s \hat{\mathbf{a}}_z$$

۴. دو ماده مغناطیسی با قابلیتهای نفوذ μ_1 و μ_2 به ترتیب نواحی $z > 0$ و $z < 0$ از فضا را اشغال نموده اند. یک صفحه بینهایت جریان با چگالی $\mathbf{J}_s = J_s \hat{\mathbf{a}}_x$ در $z=0$ ، یعنی مرز بین دو ناحیه، قرار دارد. میدانهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ را در تمام نقاط فضا تعیین کنید.

■



شکل پ-۶۱

۴. از آنجا که توزیع جریان و نواحی $z > 0$ و $z < 0$ در امتدادهای x و y تا بینهایت ادامه داشته و در این امتدادها کاملاً یکنواخت هستند، میدان مغناطیسی حاصل تابعی از x و y نخواهد بود. همچنین به دلیل خطی و همسانگرد بودن دو محیط، میدان مغناطیسی در این دو محیط همان مؤلفه‌ای را خواهد داشت که صفحه بینهایت جریان در خلأ تولید می‌کند، یعنی مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_y$. حال دو مسیر بسته مستطیلی شکل C_1 و C_2 را مطابق شکل پ-۶۱ در نظر گرفته و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

$$\mathbf{H} = H_y(z) \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = (H_1 - H'_1)l = 0 \Rightarrow H_1 = H'_1$$

نتیجه مزبور بیان می‌کند که میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ در ناحیه ۱ یکنواخت است. عیناً همین نتیجه برای ناحیه ۲ نیز صادق است. از طرفی،

$$\oint_{C_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = (H_2 + H'_2)l = J_S l \Rightarrow H_2 + H'_2 = J_S. \quad (1)$$

حال از خاصیت سیملوله‌ای بودن میدان $\mathbf{B}$ استفاده می‌کنیم.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad S = y \text{ صفحه بینهایت عمود بر محور } S = y$$

$$\int_{S_1} B_y dS - \int_{S_2} B'_y dS = 0.$$

که S_1 نیمی از صفحه S با $z > 0$ و S_2 نیم دیگر آن با $z < 0$ است. رابطه بالا وقتی برقرار است که $B_y = B'_y$ یا

$$\mu_1 H_2 - \mu_2 H'_2 = 0. \quad (2)$$

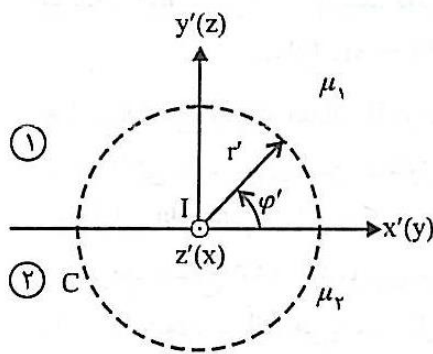
با حل همزمان معادلات (۱) و (۲)، داریم:

$$H_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J_S, \quad H'_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} J_S.$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J_S \hat{\mathbf{a}}_y & z > 0 \\ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} J_S \hat{\mathbf{a}}_y & z < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J_S \frac{z}{|z|} \hat{\mathbf{a}}_y$$

۵. مسئله ۴ را وقتی که به جای صفحه بینهایت جریان، جریان خطی I در امتداد محور x و در جهت مثبت این محور قرار داشته باشد تکرار نمایید.



شکل پ-۶۲

۵. مسئله را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r', φ', z') که مترادف با دستگاه مختصات مستطیلی (x', y', z') در شکل پ-۶۲ است بررسی نموده و سرانجام پاسخها را برحسب x, y و z بیان می‌کنیم. میدانهای B و H در نواحی ۱ و ۲ فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_{\varphi'}$ بوده (چون خط جریان، میدان اولیه‌ای با این مؤلفه، تولید می‌کند) و به علاوه این مؤلفه‌ها $(B_{\varphi'}, H_{\varphi'})$ فقط تابعی از r' هستند. شرط مرزی $B_{n1} = B_{n2}$ در مرز دو ناحیه ایجاب می‌کند که $B'_{\varphi'} = B''_{\varphi'}$ به ازای هر مقدار r' باشد. بنابراین، B و H به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$B = B_{\varphi'}(r') \hat{a}_{\varphi'}$$

$$H = \begin{cases} (B_{\varphi'}/\mu_1) \hat{a}_{\varphi'} & 0 < \varphi' < \pi \\ (B_{\varphi'}/\mu_2) \hat{a}_{\varphi'} & \pi < \varphi' < 2\pi \end{cases}$$

برای تعیین $B_{\varphi'}$ ، قانون مداری آمپر را برای مسیر دایره‌ای C که شعاعش برابر r' و مرکزش بر خط جریان منطبق است به کار می‌بریم.

$$\oint_C H \cdot dL = I$$

$$\left(\frac{B_{\varphi'}}{\mu_1} \right) (\pi r') + \left(\frac{B_{\varphi'}}{\mu_2} \right) (\pi r') = I$$

$$B_{\varphi'} = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi (\mu_1 + \mu_2) r'} \Rightarrow B = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi (\mu_1 + \mu_2) r'} \hat{a}_{\varphi'}$$

لیکن:

$$\frac{\hat{a}_{\varphi'}}{r'} = \frac{-\sin \varphi' \hat{a}_{x'} + \cos \varphi' \hat{a}_{y'}}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}, \quad \sin \varphi' = \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}, \quad \cos \varphi' = \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\hat{a}_{\varphi'}}{r'} = \frac{-y' \hat{a}_{x'} + x' \hat{a}_{y'}}{x'^2 + y'^2}$$

با تبدیل به مختصات بدون پیریم؛ $z' \rightarrow x, y' \rightarrow z, x' \rightarrow y$ داریم:

$$\frac{\hat{a}_{\varphi'}}{r'} = \frac{-z \hat{a}_y + y \hat{a}_z}{y^2 + z^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_1 \mu_2 I (-z \hat{a}_y + y \hat{a}_z)}{\pi (\mu_1 + \mu_2) (y^2 + z^2)}, \quad H = \begin{cases} B/\mu_1 & z > 0 \\ B/\mu_2 & z < 0 \end{cases}$$

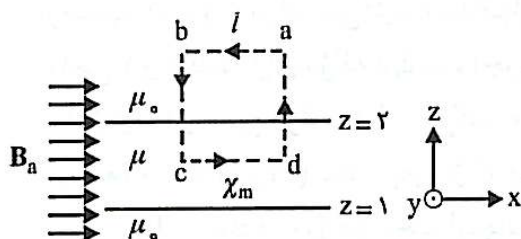
۶. ناحیه $1 < z < 2$ از فضا را یک ماده مغناطیسی با ضریب حساسیت غیریکنواخت $\chi_m(z) = \frac{z}{4}$ اشغال نموده است. میدان مغناطیسی یکنواخت $B_a = B_0 \hat{a}_x$ به ماده اعمال می‌شود. الف) نشان دهید که چگالیهای جریانهای مغناطیسی سطحی و حجمی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$J_m = \frac{B_0}{4\mu_0} \hat{a}_y \quad 1 < z < 2, \quad J_{ms} = \begin{cases} \frac{B_0}{4\mu_0} \hat{a}_y & z=1 \\ -\frac{B_0}{4\mu_0} \hat{a}_y & z=2 \end{cases}$$

ب) میدان مغناطیسی ثانویه و میدان مغناطیسی کل را در درون و بیرون ماده مغناطیسی به دست آورید.

۶. الف) با توجه به اینکه ناحیه اشغال شده توسط ماده مغناطیسی، $1 < z < 2$ ، در امتدادهای x و y تا بینهایت ادامه دارد و ضریب χ_m تابعی از x و y نمی‌باشد و به علاوه میدان اولیه فقط مؤلفه $\hat{a}_x$ دارد، می‌توان نتیجه گرفت که میدانهای B ، H و M همگی فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_x$ هستند، ممکن است مؤلفه‌ها فقط تابعی از z باشند. یعنی،

$$B = B_x(z) \hat{a}_x, \quad H = H_x(z) \hat{a}_x, \quad M = M_x(z) \hat{a}_x$$



شکل پ-۶۳

حال نشان می‌دهیم که میدان H در تمام نقاط فضا مقدار ثابتی دارد. برای این منظور مسیر بسته مستطیلی $abcd$ را مطابق شکل پ-۶۳ در نظر می‌گیریم. اضلاع ab و cd موازی مرزها و اضلاع bc و da عمود بر آنها می‌باشند. (این مسیر بسته می‌تواند در هر مکان دلخواهی از فضا باشد و

نباید لزوماً بخشی از ماده مغناطیسی را در برگیرد). با به کار بردن قانون مداری آمپر، داریم:

$$\oint_{abcd a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = 0, \quad \text{جریان آزاد در برگرفته شده توسط مسیر بسته}$$

$$\oint_{abcd a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = (-H_{x1} + H_{x2})l = 0$$

در نتیجه $H_{x1} = H_{x2}$ که H_{x1} اندازه $\mathbf{H}$ روی ضلع ab و H_{x2} اندازه $\mathbf{H}$ روی ضلع cd است. این نتیجه بیان می‌کند که میدان $\mathbf{H}$ تابعی از z نیست و در تمام نقاط فضا مقدار ثابتی دارد. بنابراین، $\mathbf{H} = H_x \hat{\mathbf{a}}_x$ میدان ثانویه برابر است با:

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{B} - \mathbf{B}_a = \begin{cases} (\mu_0 H_x - B_0) \hat{\mathbf{a}}_x & z > 2, z < 1 \\ (\mu_0 H_x - B_0) \hat{\mathbf{a}}_x & 1 < z < 2 \end{cases}$$

چون میدان ثانویه یک میدان سیملوله‌ای است باید $\oint_S \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} = 0$ باشد. در اینجا S را صفحه $x=0$ در نظر می‌گیریم (کره‌ای به شعاع بینهایت)، آنگاه:

$$\oint_S \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S}$$

که $S_1: \begin{cases} x=0 \\ z < 1 \end{cases}$, $S_2: \begin{cases} x=0 \\ z > 2 \end{cases}$ و $S_3: \begin{cases} x=0 \\ 1 < z < 2 \end{cases}$ است. لیکن انتگرال روی سطوح S_1 و S_2 برابر است با:

$$\int_{S_1 + S_2} = (\mu_0 H_x - B_0) \left(\int_{S_1} dS + \int_{S_2} dS \right)$$

اگر $\mu_0 H_x - B_0 \neq 0$ باشد، $\int_{S_1 + S_2} \neq 0$ می‌شود، از این رو $\mu_0 H_x - B_0 = 0$ و

$$\mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{\mathbf{a}}_x, \quad \text{در تمام فضا}$$

توجه شود که این نتیجه مستقل از این است که χ_m به چه نحوی نسبت به z تغییر می‌کند. حال، داریم:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu_0} z \hat{\mathbf{a}}_x, \quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_n$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \begin{cases} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right) (1) (\hat{\mathbf{a}}_x) \times (-\hat{\mathbf{a}}_z) = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{\mathbf{a}}_y & z=1 \\ \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right) (2) (\hat{\mathbf{a}}_x) \times (\hat{\mathbf{a}}_z) = -\frac{B_0}{\mu_0} \hat{\mathbf{a}}_y & z=2 \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{dM_x}{dz} \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{\mathbf{a}}_y, \quad 1 < z < 2$$

$$\mathbf{B}_s = (\mu_0 \mathbf{H}_s - \mathbf{B}_s) \hat{\mathbf{a}}_x = \mathbf{0} \quad , \quad z < 1, z > 2 \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{B}_s = (\mu \mathbf{H}_s - \mathbf{B}_s) \hat{\mathbf{a}}_x = \left[\mu_0 (1 + \chi_m) (\mathbf{B}_s / \mu_0) - \mathbf{B}_s \right] \hat{\mathbf{a}}_x = \chi_m \mathbf{B}_s \hat{\mathbf{a}}_x \quad , \quad 1 < z < 2$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{cases} \mathbf{0} & z < 1, z > 2 \\ \frac{\mathbf{B}_s}{\chi_m} \hat{\mathbf{a}}_x & 1 < z < 2 \end{cases}$$

و برای میدان کل :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}_s \hat{\mathbf{a}}_x & z < 1, z > 2 \\ \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mathbf{B}_s \left(1 + \frac{z}{\chi_m} \right) \hat{\mathbf{a}}_x & 1 < z < 2 \end{cases}$$

۷! ناحیه $a < r < b$ در مختصات استوانه‌ای را یک ماده مغناطیسی اشغال می‌کند. یک رشته سیم نازک،

که حامل جریان I در جهت مثبت z و در امتداد محور z است، میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi a) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ را در ماده ایجاد می‌کند.

الف) قابلیت نفوذ ماده را محاسبه کنید.

ب) $\mathbf{J}_{ms}$ را روی سطوح $r=a$ و $r=b$ تعیین نمایید.

ج) $\mathbf{J}_m$ را در ماده مغناطیسی به دست آورید.

۷. الف) به دلیل تقارن استوانه‌ای ناحیه اشغال شده توسط ماده مغناطیسی و بینهایت بودن این ناحیه و

خط جریان در امتداد محور z ، نتیجه گرفته می‌شود که میدانها فقط مؤلفه φ داشته و مؤلفه‌ها فقط

تابعی از r هستند. یعنی $\mathbf{H} = H_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ ، $\mathbf{M} = M_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ و $\mathbf{B} = B_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$. با به کار بردن قانون

مداری آمپر داریم:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\varphi(2\pi r) = I \quad ; \quad C: \text{ دایره‌ای به شعاع } r, \text{ مرکزی منطبق بر محور } z \text{ و } C: \text{ واقع در صفحه‌ای عمود بر محور } z$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad , \quad \text{در تمام فضا}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad , \quad a < r < b$$

$$\mu = \mu_0 \frac{r}{a} \quad , \quad a < r < b$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1) \mathbf{H} = \left(\frac{r}{a} - 1\right) \left(\frac{I}{\sqrt{\pi} r}\right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi, \quad a < r < b \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{a} - 1\right) \left(\frac{I}{\sqrt{\pi} a}\right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi \times (-\hat{\mathbf{a}}_r) = \mathbf{0} & r=a \\ \left(\frac{b}{a} - 1\right) \left(\frac{I}{\sqrt{\pi} b}\right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi \times (\hat{\mathbf{a}}_r) = -\frac{(b-a)I}{\sqrt{\pi} ab} \hat{\mathbf{a}}_z & r=b \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{r}{a} - 1\right) \frac{I}{\sqrt{\pi}} \right] \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{I}{\sqrt{\pi} ar} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad a < r < b \quad (\text{ج})$$

۸. یک سیملوله بینهایت طویل به شعاع a و با دور سیم پیچ در واحد طول حامل جریان I می باشد. ناحیه $0 \leq r \leq b$ از فضای درون سیملوله با یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی μ_r اشغال شده است. بقیه فضای درون سیملوله، یعنی $b < r < a$ ، هوا با قابلیت نفوذ μ می باشد. میدانهای $\mathbf{H}$ و $\mathbf{B}$ را در کلیه نقاط فضا تعیین نمایید. (رسانایی ماده مغناطیسی برابر صفر فرض می شود).

۸. در مثال ۵-۶ میدان یک سیملوله بینهایت طویل در خلأ را مطالعه نموده ایم. میدان در بیرون چنین سیملوله ای صفر و در درون آن برابر با $\mathbf{B} = \mu_r n I \hat{\mathbf{a}}_z$ است (رابطه ۵-۴۱). وقتی ناحیه $0 < r < b$ از درون سیملوله با یک ماده مغناطیسی اشغال شود، همچنان میدان در بیرون سیملوله صفر و در درون آن فقط مؤلفه z خواهد داشت. زیرا جریان سطحی القایی ناشی از قطبی شدن ماده مغناطیسی همانند

جریان اصلی فقط دارای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_\varphi$ است ($\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\varphi$). شرط مرزی $H_{t1} = H_{t2}$ که به صورت $H_{z1} = H_{z2}$ بیان می شود، ایجاب می کند که میدان $\mathbf{H}$ در تمام فضای درون سیملوله یکسان باشد. بنابراین:

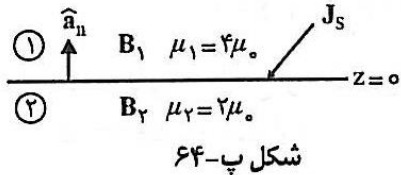
$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{0} & r > a \\ n I \hat{\mathbf{a}}_z & r < a \end{cases}$$

برای میدان $\mathbf{B}$ ، داریم:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{0} & r > a \\ \mu_r n I \hat{\mathbf{a}}_z & b < r < a \\ \mu_r \mu_r n I \hat{\mathbf{a}}_z & r < b \end{cases}$$

۹. دو ناحیه ۱ و ۲ با مرز مشترکی در $z=0$ مفروضند. در ناحیه ۱ ($z > 0$) $\mu_1 = 4\mu_0$ و در ناحیه ۲ ($z < 0$) $\mu_2 = 2\mu_0$ است. همه میدانها در دو ناحیه یکنواخت فرض می شوند. میدان مغناطیسی در ناحیه ۱ به صورت $\mathbf{B}_1 = B_0 (\sqrt{2} \hat{\mathbf{a}}_x + \sqrt{2} \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z)$ می باشد که B_0 مقدار ثابتی است. در مرز $z=0$ جریان $\mathbf{J}_s = B_0 (\hat{\mathbf{a}}_x - \sqrt{2} \hat{\mathbf{a}}_y) / \mu_0$ می گذرد. میدان مغناطیسی را در ناحیه ۲ محاسبه کنید.

۹. با توجه به شکل پ-۶۴ داریم:



شکل پ-۶۴

$$B_2 = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$$

$$B_1 = B_2 (\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z)$$

برای شرایط مرزی داریم:

$$B_{n1} = B_{n2} \Rightarrow B_z = 5B_2$$

$$\hat{a}_n \times (H_1 - H_2) = J_s ; \hat{a}_n = \hat{a}_z$$

$$\hat{a}_z \times \left[\left(\frac{2B_2}{\mu_1} - \frac{B_x}{\mu_2} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{4B_2}{\mu_1} - \frac{B_y}{\mu_2} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{5B_2}{\mu_1} - \frac{B_z}{\mu_2} \right) \hat{a}_z \right] = \frac{B_2}{\mu_0} (\hat{a}_x - 2\hat{a}_y)$$

$$\left(\frac{2B_2}{\mu_0} - \frac{B_x}{2\mu_0} \right) \hat{a}_y - \left(\frac{4B_2}{\mu_0} - \frac{B_y}{2\mu_0} \right) \hat{a}_x = \frac{B_2}{\mu_0} (\hat{a}_x - 2\hat{a}_y)$$

$$\frac{B_2}{2} - \frac{B_x}{2} = -2B_2 \Rightarrow B_x = 5B_2, \quad -\left(B_2 - \frac{B_y}{2} \right) = B_2 \Rightarrow B_y = 4B_2$$

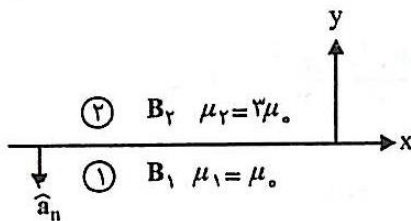
سرانجام:

$$B_2 = B_2 (5\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 5\hat{a}_z)$$

۱۰. دو ناحیه ۱ و ۲ با مرز مشترک $y=0$ مفروضند. در ناحیه ۱ ($y < 0$) $\mu_1 = \mu_0$ و در ناحیه ۲ ($y > 0$) $\mu_2 = 3\mu_0$ می باشد. میدانهای مغناطیسی یکنواخت B_1 و B_2 به ترتیب در نواحی ۱ و ۲ موجودند. این میدانها از میدان اولیه B_0 که قبل از حضور ماده مغناطیسی در ناحیه ۲ وجود داشته است پدید آمده اند. در صورتی که $B_1 = B_0 (\frac{1}{5}\hat{a}_x + \hat{a}_y)$ و هیچ جریان آزادی در مرز $y=0$ وجود نداشته باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) میدان B_2 ، ب) میدان اولیه B_0

۱۰ الف) با توجه به شکل پ-۶۵ داریم:



شکل پ-۶۵

$$B_1 = B_0 \left(\frac{1}{5} \hat{a}_x + \hat{a}_y \right)$$

$$B_2 = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$$

برای شرایط مرزی داریم:

$$B_{n1} = B_{n2} \Rightarrow B_0 = B_y$$

$$\hat{a}_n \times (H_1 - H_2) = 0 \Rightarrow -\hat{a}_y \times \left(\frac{B_1}{\mu_1} - \frac{B_2}{\mu_2} \right) = 0$$

$$-\hat{a}_y \times \left[\left(\frac{B_z}{\mu_0} - \frac{B_x}{\mu_0} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{B_z}{\mu_0} - \frac{B_y}{\mu_0} \right) \hat{a}_y + \left(-\frac{B_z}{\mu_0} \right) \hat{a}_z \right] = 0$$

$$\left(\frac{B_z}{\mu_0} - \frac{B_x}{\mu_0} \right) \hat{a}_z - \frac{B_z}{\mu_0} \hat{a}_x = 0 \Rightarrow B_z = 0, B_x = \frac{\mu_0}{2} B.$$

$$B_y = B \cdot \left(\frac{\mu_0}{2} \hat{a}_x + \hat{a}_y \right)$$

ب) در ناحیه $y > 0$ داریم:

$$M_y = \frac{B_y}{\mu_0} - H_y = \frac{\mu_0}{2} B_y = \frac{B_z}{\mu_0} \left(\hat{a}_x + \frac{\mu_0}{2} \hat{a}_y \right)$$

$$J_m = \nabla \times M_y = 0, J_{ms} = M_y \times \hat{a}_n = -\frac{B_z}{\mu_0} \hat{a}_z, y = 0.$$

میدان ثانویه حاصل از صفحه بینهایت جریان واقع در $y = 0$ و با چگالی J_{ms} با توجه به رابطه ۲۴-۵ عبارت است از:

$$B_s = \begin{cases} \frac{B_z}{\mu_0} \hat{a}_x & y > 0 \\ -\frac{B_z}{\mu_0} \hat{a}_x & y < 0 \end{cases}$$

حال می توان نوشت:

$$B_a = B_y - B_s \Big|_{y < 0} = B \cdot \left(\frac{\mu_0}{2} \hat{a}_x + \hat{a}_y \right) + \frac{B_z}{\mu_0} \hat{a}_x \Rightarrow B_a = B \cdot (\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

توجه کنید که $B_a = B_y - B_s \Big|_{y > 0}$ نیز نتیجه بالا را می دهد.

۱۱. جریان I با چگالی غیریکنواخت $J = J_z(r/a) \hat{a}_z$ از یک هادی استوانه ای شکل طویل به شعاع a که محور آن در امتداد محور z قرار دارد می گذرد. مطلوب است محاسبه ضریب خودالقایی داخلی هادی با استفاده از:

الف) روش پیوند شار مغناطیسی، ب) روش انرژی.

۱۱. الف) میدان مغناطیسی حاصل از این توزیع جریان فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ داشته و این مؤلفه نیز فقط تابعی از r است. میدان تنها در ناحیه $r < a$ مورد نیاز است و با استفاده از قانون مداری آمپر به دست می آید.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I ; C : \text{مركزی منطق بر محور } z \text{ و واقع روی صفحه‌ای عمود بر محور } z$$

$$\mathbf{B} = B_\varphi(r) \hat{a}_\varphi$$

$$B_\varphi(r) = \mu_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} J_z \left(\frac{r'}{a} \right) (r' dr' d\varphi') = \frac{\mu_0 J_z}{a} \frac{2\pi r^2}{2} , \quad r < a$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 J_z}{2a} r^2 , \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_z}{2a} r^2 \hat{a}_\varphi , \quad r < a$$

شار مغناطیسی گذرنده از عنصر سطحی به طول واحد و عرض dr (واقع در صفحه، ثابت φ) برابر است با:

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_z (dr \hat{a}_\varphi) = \frac{\mu_0 J_z}{2a} r^2 dr$$

شاری که با تمامی جریان I پیوند دارد برابر $d\Psi = Nd\phi$ است. که در آن،

$$N = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^r (J_z/a) r' dr' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^a (J_z/a) r' dr' d\varphi'} = \frac{\int_0^r r' dr'}{\int_0^a r' dr'} = \frac{r^2}{a^2}$$

آنگاه:

$$d\Psi = (\mu_0 J_z / 2a^2) r^2 dr$$

مقدار کل شار که با جریان I پیوند دارد، عبارت است از:

$$\Psi = \int d\Psi = \int_0^a \frac{\mu_0 J_z}{2a^2} r^2 dr = \frac{\mu_0 J_z}{6a^2} a^3$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{J_z}{a} r' dr' d\varphi' = \frac{2\pi}{3} J_z a^2$$

سرانجام ضریب خود القایی برابر است با:

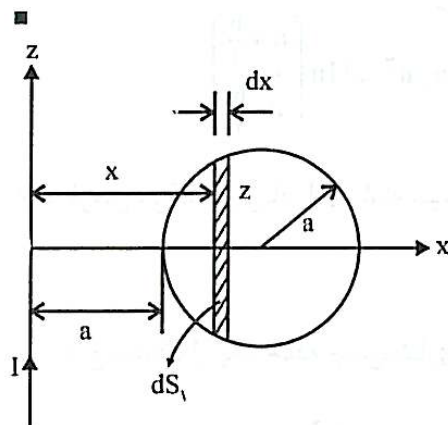
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{ در واحد طول}$$

$$L = \frac{2 W_m}{I^2} \quad \text{ب) روش انرژی:}$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \left(\frac{\mu_0 J_0}{4a} \right)^2 r'^2 dr' = \frac{1}{54} \pi \mu_0 J_0^2 a^3$$

$$L = \frac{(2) \left(\frac{1}{54} \right) (\pi \mu_0 J_0^2 a^3)}{\left(\frac{2}{3} \pi J_0 a^2 \right)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{ در واحد طول}$$

(۱۲) یک قطعه سیم به شکل دایره‌ای به شعاع a خمیده شده و طوری در مجاورت یک سیم طویل قرار داده می‌شود که هر دو در یک صفحه واقع شوند. در صورتی که فاصله مرکز دایره از سیم برابر $2a$ باشد، نشان دهید که ضریب القای متقابل بین سیم طویل و سیم دایره‌ای شکل برابر $M = 0.268 \mu_0 a$ است.



شکل پ-۶۶

۱۲. با توجه به شکل پ-۶۶ برای معادله دایره داریم:

$$(x - 2a)^2 + z^2 = a^2$$

$$z = \pm \sqrt{a^2 - (x - 2a)^2}$$

$$dS_1 = 2 |z| dx = 2 \sqrt{a^2 - (x - 2a)^2} dx$$

$$d\phi_{12} = B_2 \cdot dS_1$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{a}_y \text{ (در صفحه xy)}, \quad dS_1 = dS_1 \hat{a}_y$$

$$d\phi_{12} = \frac{\mu \cdot I}{\pi x} \sqrt{a^2 - (x - \sqrt{3}a)^2} dx$$

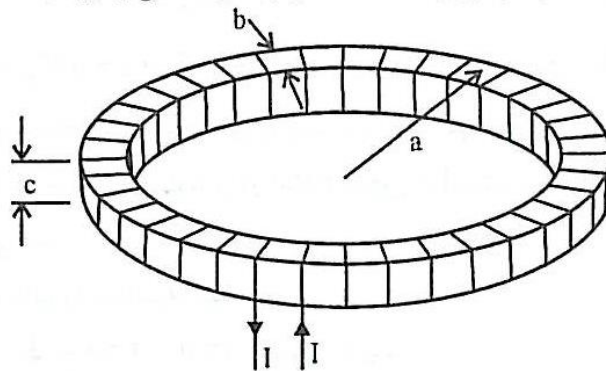
$$\phi_{12} = \int d\phi_{12} = \frac{\mu \cdot I}{\pi} \int_a^{\sqrt{3}a} \frac{\sqrt{a^2 - (x - \sqrt{3}a)^2}}{x} dx$$

$$= \frac{\mu \cdot I}{\pi} \left[\sqrt{-x^2 + 2ax - 3a^2} - \sqrt{3}a \sin^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}x + \sqrt{3}a}{\sqrt{3}a} \right) - \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}x - \sqrt{3}a}{|x|} \right) \right]_a^{\sqrt{3}a}$$

$$= \frac{\mu \cdot I}{\pi} \left(0 + \sqrt{3}\pi a - \frac{\sqrt{3}\pi a}{\sqrt{3}} \right) = \mu \cdot a (\sqrt{3} - 1) I$$

$$M = \frac{\phi_{12}}{I} = \mu \cdot a (\sqrt{3} - 1) \Rightarrow M = 0.768 \mu \cdot a$$

۱۳. یک رشته سیم نازک حامل جریان I به طور پیوسته به دور یک هسته چنبره‌ای با سطح مقطع مستطیلی شکل، مطابق شکل ۶-۲۲، سیم‌پیچی شده است. شعاع متوسط چنبره برابر a و تعداد دورهای سیم‌پیچ به ازای واحد طول در امتداد محیط متوسط چنبره برابر n است. ضریب خودالقایی چنبره را محاسبه کنید.



شکل ۶-۲۲

۱۳. در مسئله ۱۵ خودآزمایی فصل پنجم میدان مغناطیسی B را برای یک چنبره با سطح مقطع دایره‌ای به دست آوردیم. نتیجه به دست آمده در این مسئله در حقیقت بستگی به شکل سطح مقطع چنبره ندارد و برای هر سطح مقطع دلخواه صادق است. بنابراین، برای چنبره با سطح مقطع مستطیلی در این مسئله و البته با توجه به جهت سیم پیچ آن می‌توان نوشت:

$$B = \begin{cases} 0 & \text{بیرون چنبره} \\ -\mu \cdot n I \left(\frac{a}{r} \right) \hat{a}_\phi & \text{درون چنبره} \end{cases}$$

شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه برابر است با:

$$\phi = \int_S B \cdot dS = \int_{-c}^c dz' \int_{a-\frac{b}{\gamma}}^{a+\frac{b}{\gamma}} \mu \cdot n I \left(\frac{a}{r'} \right) dr' \quad ; \quad S: \text{سطح مقطع چنبره}$$

$$\phi = \mu \cdot n I a c \ln \left(\frac{a + \frac{b}{\gamma}}{a - \frac{b}{\gamma}} \right)$$

$$\Psi = N\phi = (\gamma \pi a n) \phi \Rightarrow L = \frac{\Psi}{I} = \gamma \pi \mu \cdot n \gamma c a \gamma \ln \left(\frac{a + \frac{b}{\gamma}}{a - \frac{b}{\gamma}} \right)$$

۱۴. فرض کنید یک رشته سیم نازک طویل در امتداد محور تقارن چنبره مسئله ۱۳ قرار بگیرد. ضریب القای متقابل بین چنبره و سیم نازک طویل را محاسبه کنید.

۱۴. فرض می‌کنیم جریان I از رشته سیم نازک بگذرد، آنگاه میدان حاصل از آن برابر است با:

$$B_\gamma = \frac{\mu \cdot I}{\gamma \pi r} \hat{a}_\phi$$

این میدان، از یک حلقه چنبره شاری به میزان ϕ_{12} عبور می‌دهد.

$$\phi_{12} = \int_{S_1} B_\gamma \cdot dS_1 = \frac{\mu \cdot I}{\gamma \pi} \int_{-c}^c dz' \int_{a-\frac{b}{\gamma}}^{a+\frac{b}{\gamma}} \frac{1}{r'} dr' = \frac{\mu \cdot I c}{\gamma \pi} \ln \left(\frac{\gamma a + b}{\gamma a - b} \right) \quad ; \quad S_1: \text{سطح مقطع چنبره}$$

$$\Psi_{12} = N\phi_{12} = (\gamma\pi an)\phi_{12} = \mu_0 I a n \ln \left(\frac{\gamma a + b}{\gamma a - b} \right)$$

$$M = M_{12} = \Psi_{12}/I = \mu_0 n a \ln \left(\frac{\gamma a + b}{\gamma a - b} \right)$$

۱۵. یک کابل هم‌محور که شعاعهای هادیهای درونی و بیرونی آن به ترتیب a و b هستند مفروض است. نیمی از فضای محصور بین هادیها با ماده‌ای مغناطیسی که قابلیت نفوذ آن μ می‌باشد اشغال می‌شود. توزیع ماده مغناطیسی را در فضای بین هادیها به گونه‌ای تعیین کنید که ضریب خودالقایی کابل در واحد طول حداکثر باشد. این مقدار حداکثر را محاسبه کنید ($\mu > \mu_0$).

$$L = \frac{\gamma W_m}{I^2} = \frac{\int_V BH dV}{I^2} \quad 15$$

که V حجم بین دو هادی به ازای واحد طول است. بدیهی است وقتی L حداکثر است که $\int_V BH dV$ حداکثر باشد. در یک کابل هم محور B و H تغییراتی به صورت $\frac{1}{r}$ با مختصه شعاعی r دارند. بنابراین، با توجه به اینکه $\mu > \mu_0$ است، ماده مغناطیسی باید آن بخش از فضای بین دو هادی را پر کند که r کوچک ترین مقادیر ممکن را داشته باشد، $a < r < x$. برای تعیین x داریم:

$$\pi(x^2 - a^2) = \frac{1}{\gamma} \pi(b^2 - a^2) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\gamma}}$$

به عبارت دیگر ناحیه $a < r < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\gamma}}$ بین دو هادی را ماده مغناطیسی اشغال نماید. برای تعیین حداکثر ضریب خودالقایی، میدان و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول را ابتدا محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قانون مداری آمپر به سادگی می‌توان نشان داد:

$$H = \begin{cases} \frac{I}{\gamma \pi r} \hat{a}_\varphi & a < r < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}, \quad B = \begin{cases} \frac{\mu \cdot I}{\gamma \pi r} \hat{a}_\varphi & x < r < b \\ \frac{\mu I}{\gamma \pi r} \hat{a}_\varphi & a < r < x \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$W_m = \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^1 dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(\int_a^x \frac{\mu I^2}{\gamma \pi^2} \frac{dr}{r} + \int_x^b \frac{\mu \cdot I^2}{\gamma \pi^2} \frac{dr}{r} \right) \right]$$

$$= \frac{I^2}{\gamma \pi} \left[\mu \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{\gamma a^2} \right) - \mu_0 \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{\gamma b^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow L_{\max} = \frac{\gamma W_m}{I^2} = \frac{1}{\gamma \pi} \left[\mu \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{\gamma a^2} \right) - \mu_0 \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{\gamma b^2} \right) \right]$$

۱۶. برای سیملوله مسئله ۸، ضریب خودالقایی را به ازای واحد طول محاسبه کنید.

۱۶. میدان مغناطیسی H را برای این سیملوله به شرح زیر محاسبه نمودیم:

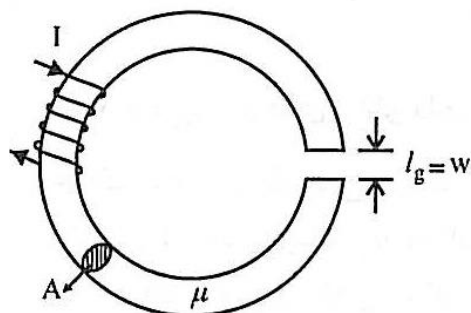
$$H = \begin{cases} n I \hat{a}_z & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \left[\int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\mu \int_0^b (nI)^2 r dr + \mu_0 \int_b^a (nI)^2 r dr \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \pi n^2 I^2 (\mu b^2 - \mu_0 b^2 + \mu_0 a^2)$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \pi n^2 [\mu_0 a^2 + (\mu - \mu_0) b^2] \quad \text{در واحد طول}$$

۱۷. یک هسته آهنی چنبره‌ای دارای محیط متوسط 20 cm و سطح مقطع دایره‌ای شکل به مساحت 2 cm^2 می‌باشد. یک شکاف کوچک هوا به عرض 0.1 cm در هسته ایجاد می‌شود. آمپر دور لازم را برای برقرار نمودن شار مغناطیسی 3×10^{-4} وبر در شکاف هوا تعیین نمایید. سطح مؤثر شکاف هوا را با سطحی دایره‌ای شکل به قطر $d+w$ تقریب بزنید که d قطر دایره مقطع چنبره و w عرض شکاف هوا است. قابلیت نفوذ هسته را $1000 \mu_0$ فرض کنید.



۱۷. با توجه به شکل پ-۶۷ داریم:

$$A = 2 \text{ cm}^2, \quad l = 20 \text{ cm}, \quad l_g = 0.1 \text{ cm}$$

$$A = \pi d^2/4 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{8/\pi} \cong 1.6 \text{ cm}$$

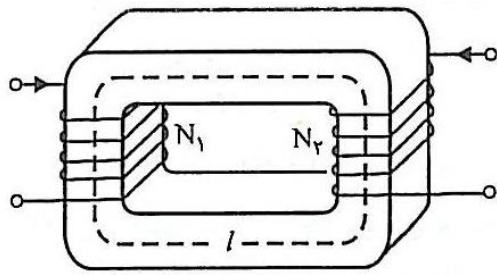
شکل پ-۶۷

$$A_g = \pi [(d+w)/2]^2 = \pi [(1.6 + 0.1)/2]^2 = 2.27 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{20 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4\pi} \times 10^7$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} = \frac{0.1 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 2.27 \times 10^{-4}} = \frac{10^8}{9.08\pi}$$

$$NI = \phi (\mathcal{R} + \mathcal{R}_g) = 3 \times 10^{-4} \left(\frac{10^7}{4\pi} + \frac{10^8}{9.08\pi} \right) \cong 1290 \text{ آمپر دور}$$



شکل ۶-۲۳

۱۸) مطلوب است محاسبه ضرایب خودالقایی و القای

مستقابل (L_{11} ، L_{22} و $M_{21}=M_{12}$) برای یک

ترانسفورماتور ایده آل که سیم پیچ اولیه آن دارای N_1

دور و سیم پیچ ثانویه آن دارای N_2 دور باشد. چه

رابطه ای بین ضرایب L_{11} و L_{22} و ضریب M_{12}

وجود دارد؟ سطح مقطع هسته ترانسفورماتور را

برابر S ، طول متوسط آن را برابر l و قابلیت نفوذ آن

را برابر μ فرض کنید. شکل ۶-۲۳ ترانسفورماتور و

سیم پیچهای آن را نشان می دهد.

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R} \phi \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \quad .18$$

$$\phi = \frac{(N_1 I_1 + N_2 I_2) \mu S}{l} \quad , \quad \phi_1 = \phi \Big|_{I_2=0} \quad , \quad \phi_2 = \phi \Big|_{I_1=0}$$

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{N_1 (N_1 I_1 + 0) \mu S}{I_1 l} = \frac{N_1^2 \mu S}{l}$$

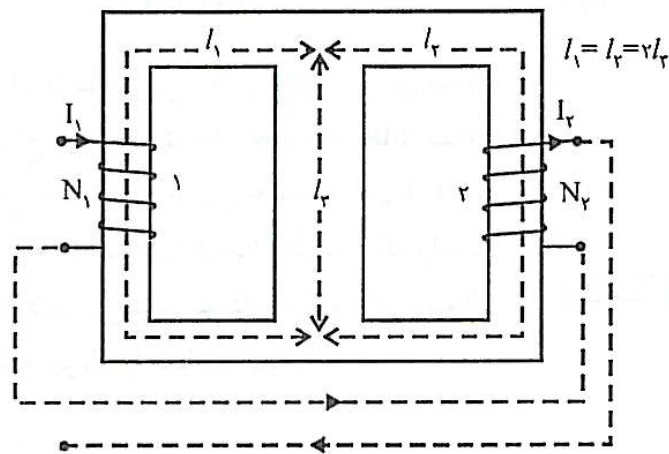
$$L_{22} = \frac{N_2 \phi_2}{I_2} = \frac{N_2 (0 + N_2 I_2) \mu S}{I_2 l} = \frac{N_2^2 \mu S}{l}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 \phi_2}{I_2} = \frac{N_1 (N_2 I_2 \mu S)}{I_2 l} = \frac{N_1 N_2 \mu S}{l} = M_{21}$$

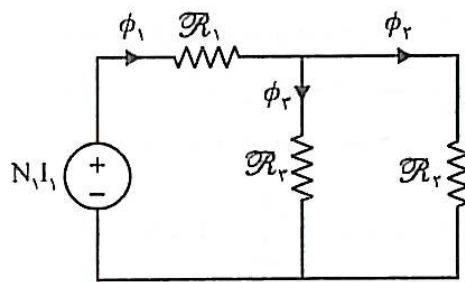
ملاحظه می شود که $M_{12} = \sqrt{L_{11} L_{22}}$ است.

۱۹ شکل ۶-۲۴ یک مدار مغناطیسی را با سه شاخه و دو سیم پیچ جریان نشان می دهد. هسته این مدار دارای سطح مقطع یکنواخت به مساحت S و قابلیت نفوذ μ می باشد. سایر مشخصات مدار در شکل نشان داده شده اند. فرض می شود که میدان مغناطیسی حاصل از سیم پیچهای جریان همگی در هسته متمرکز باشد.

الف) ضریب خودالقایی سیم پیچ ۱ و ضریب القای متقابل بین دو سیم پیچ را محاسبه کنید.
 ب) اگر سیم پیچهای ۱ و ۲ مطابق اتصالات خط چین به یکدیگر وصل شوند، ضریب خودالقایی ترکیب حاصل چه خواهد بود؟



شکل ۶-۲۴



شکل پ-۶۸

۱۹. الف) مدار معادل الکتریکی این مدار مغناطیسی را وقتی

که از سیم پیچ ۱ جریان I_1 عبور داده شود و $I_2 = 0$ باشد مطابق شکل پ-۶۸ رسم نموده و شارهای مغناطیسی شاخه‌های مختلف را محاسبه می‌کنیم.

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu S}, \quad R_2 = \frac{l_2}{\mu S} = R_1, \quad R_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

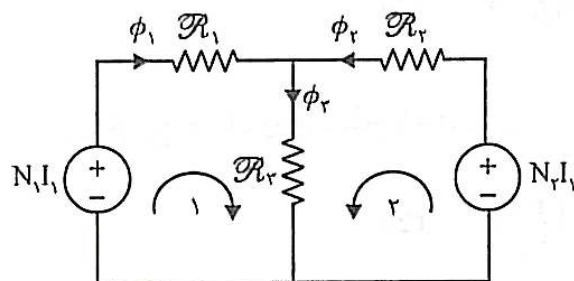
$$R_1 = R_2 = 2R_3, \quad l_1 = l_2 = 2l_3$$

$$\phi_1 = N_1 I_1 / (R_1 + R_2 \parallel R_3)$$

$$R_1 + R_2 \parallel R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2R_3 + \frac{2R_3^2}{3R_3} = \frac{8}{3}R_3 \Rightarrow \phi_1 = \frac{3}{8} \frac{N_1 I_1}{R_3}$$

$$\phi_2 = \phi_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \phi_1 \frac{R_3}{3R_3} = \frac{1}{3} \phi_1 = \frac{1}{8} \frac{N_1 I_1}{R_3}$$

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{3}{8} \frac{N_1^2}{R_3} = \frac{3}{8} \frac{\mu S N_1^2}{l_3}, \quad M_{21} = \frac{N_2 \phi_2}{I_1} = \frac{1}{8} \frac{N_1 N_2}{R_3} = \frac{1}{8} \frac{\mu S N_1 N_2}{l_3}$$



$$R_1 = R_2 = 2R_3$$

شکل پ-۶۹ در حلقه ۱ (KVL)_m: $-N_1 I_1 + R_1 \phi_1 + R_3 (\phi_1 + \phi_2) = 0$

در حلقه ۲ (KVL)_m: $-N_2 I_1 + R_2 \phi_2 + R_3 (\phi_2 + \phi_1) = 0$

پس از حل دو رابطه فوق برای ϕ_1 و ϕ_2 داریم:

$$\phi_1 = \frac{(3N_1 - N_2) I_1}{8 R_3}, \quad \phi_2 = \frac{(3N_2 - N_1) I_1}{8 R_3}$$

$$L = \frac{N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2}{I_1} = \frac{N_1 (3N_1 - N_2) + N_2 (3N_2 - N_1)}{8 R_3} = \frac{\mu S}{8 l_3} [3(N_1^2 + N_2^2) - 2N_1 N_2]$$

ب) وقتی که سیم پیچهای ۱ و ۲ مطابق اتصالات خط چین در شکل مسئله به یکدیگر وصل شوند، مدار معادل الکتریکی به صورت شکل پ-۶۹ خواهد بود.

۲۰. نشان دهید که انرژی ذخیره شده در یک مدار مغناطیسی برابر $W_m = \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi^2$ می باشد که ϕ شار مغناطیسی گذرنده از مدار و $\mathcal{R}$ رلوکتانس آن می باشد.

۲۰. برحسب تعاریف رلوکتانس و شار مغناطیسی، داریم:

$$\mathcal{R} = \frac{\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}, \quad \phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

که S سطح مقطع مدار مغناطیسی و C یک مسیر در امتداد طول متوسط مدار است. این یادآوری لازم است که در بررسی مدارهای مغناطیسی معمولاً فرض بر این است که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ در درون هسته مدار یکنواخت بوده و عمود بر سطح مقطع می باشند. بنابراین $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS$ و $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H dL$ ، پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi^2 &= \frac{1}{2} \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_C \int_S \underbrace{HB dS dL}_{=dV} = \frac{1}{2} \int_V HB dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV = W_m \end{aligned}$$

۲۱. توزیع جریان سطحی زیر در دستگاه مختصات استوانه‌ای مفروض است:

$$\mathbf{J}_S = \begin{cases} \frac{I_1}{a} \hat{\mathbf{a}}_z & r=a \\ \frac{I_2}{b} \hat{\mathbf{a}}_z & r=b \\ -\frac{I_1 + I_2}{c} \hat{\mathbf{a}}_z & r=c \end{cases}$$

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از توزیع جریان مزبور را در واحد طول به دو روش زیر محاسبه کنید:

الف) با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{J}_S \cdot \mathbf{A} dS$ ،

ب) با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$.

۲۱. الف) پتانسیل مغناطیسی برداری (A) ناشی از یک جریان سطحی استوانه‌ای با چگالی $r=r_0$ و $J_S \hat{a}_z$ را طی مسئله ۲۲ خودآزمایی فصل پنجم محاسبه نمودیم. نتیجه را بار دیگر در اینجا می‌نویسیم.

$$A_0(r) = \begin{cases} -\mu_0 J_S r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \hat{a}_z & r \geq r_0 \\ 0 & r \leq r_0 \end{cases}$$

برای توزیع جریان روی سطح $r=a$ داریم:

$$A_1(r) = \begin{cases} -\mu_0 I_1 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \hat{a}_z & r \geq a \\ 0 & r \leq a \end{cases}$$

برای توزیع جریان روی سطح $r=b$ داریم:

$$A_2(r) = \begin{cases} -\mu_0 I_2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) \hat{a}_z & r \geq b \\ 0 & r \leq b \end{cases}$$

بالاخره برای توزیع جریان روی سطح $r=c$ داریم:

$$A_3(r) = \begin{cases} \mu_0 (I_1 + I_2) \ln\left(\frac{r}{c}\right) \hat{a}_z & r \geq c \\ 0 & r \leq c \end{cases}$$

پتانسیل کل برابر است با:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ -\mu_0 I_1 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \hat{a}_z & a \leq r \leq b \\ -\mu_0 \left[I_1 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + I_2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right] \hat{a}_z & b \leq r \leq c \\ \mu_0 \left[I_1 \ln\left(\frac{a}{c}\right) + I_2 \ln\left(\frac{b}{c}\right) \right] \hat{a}_z & r \geq c \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{\gamma} \int_S \mathbf{J}_S \cdot \mathbf{A} dS \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_{S_a} \left(\frac{I_1}{a} \right) (\cdot) dS + \frac{1}{\gamma} \int_{S_b} \left(\frac{I_2}{b} \right) \left(-\mu_0 I_1 \ln \frac{b}{a} \right) dS \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} \int_{S_c} - \left(\frac{I_1 + I_2}{c} \right) \mu_0 \left(I_1 \ln \frac{a}{c} + I_2 \ln \frac{b}{c} \right) dS \\
&= \frac{\mu_0}{\gamma} \left[- \left(I_1 I_2 \ln \frac{b}{a} \right) \left(\frac{\gamma \pi b}{b} \right) - (I_1 + I_2) \left(I_1 \ln \frac{a}{c} + I_2 \ln \frac{b}{c} \right) \left(\frac{\gamma \pi c}{c} \right) \right] \\
&= \mu_0 \pi \left(I_1^2 \ln \frac{c}{a} + I_2^2 \ln \frac{c}{b} + \gamma I_1 I_2 \ln \frac{c}{b} \right)
\end{aligned}$$

ب) ابتدا میدان مغناطیسی را در کلیه نقاط فضا، با استفاده از قانون مداری آمپر، به دست می آوریم.

$$\mathbf{B} = B_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I = \mu_0 \begin{cases} \cdot & r < a, r > c \\ \gamma \pi I_1 & a < r < b \\ \gamma \pi (I_1 + I_2) & b < r < c \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{0} & r < a, r > c \\ (\mu_0 I_1 / r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi & a < r < b \\ [\mu_0 (I_1 + I_2) / r] \hat{\mathbf{a}}_\varphi & b < r < c \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{\gamma \mu_0} \int \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{\gamma \mu_0} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_a^b \left(\frac{\mu_0 I_1}{r} \right)^2 r dr + \int_b^c \left(\frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{r} \right)^2 r dr \right] \\
&= \mu_0 \pi \left[I_1^2 \ln \frac{b}{a} + (I_1 + I_2)^2 \ln \frac{c}{b} \right] \\
&= \mu_0 \pi \left(I_1^2 \ln \frac{c}{a} + I_2^2 \ln \frac{c}{b} + \gamma I_1 I_2 \ln \frac{c}{b} \right)
\end{aligned}$$

۲۲. منحنی B-H برای یک ماده مغناطیسی توسط رابطه $B = \mu_0 H^2$ بیان می شود. M و μ چه مقادیری دارند؟

$$B = \mu_0 H^2 \quad ۲۲$$

$$B = \mu H = \mu_0 H^2 \Rightarrow \mu = \mu_0 H$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = H H - H = (H - 1) H$$

۲۳. استوانه‌ای از جنس یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی μ_r دارای طول بینهایت و شعاع a است. این استوانه در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{a}}_x$ قرار می‌گیرد، به طوری که میدان عمود بر محور استوانه باشد (محور استوانه بر محور z منطبق است). نشان دهید که میدان مغناطیسی $\mathbf{H}^i$ در درون استوانه و $\mathbf{H}^o$ در بیرون آن از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{H}^i(r, \varphi) = \frac{\gamma H_0}{\mu_r + 1} (\cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \quad r < a$$

$$\mathbf{H}^o(r, \varphi) = H_0 \left[\left(1 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - \left(1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \right] \quad r > a$$

۲۳. چون در هیچ نقطه از فضا جریان الکتریکی آزاد وجود ندارد، معادله لاپلاس $\nabla^2 V_m = 0$ و رابطه $\mathbf{H} = -\nabla V_m$ برای پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی صادقند و حل مسئله به یافتن جواب معادله لاپلاس بالا تحت شرایط مرزی حاکم خلاصه می‌شود. اما شکل ریاضی این مسئله با مسئله ۱۱ خودآزمایی فصل چهارم یکسان است. از این رو کافی است که در پاسخهای مسئله مزبور تبدیلات زیر را انجام دهیم تا پاسخهای مسئله حاضر به دست آیند:

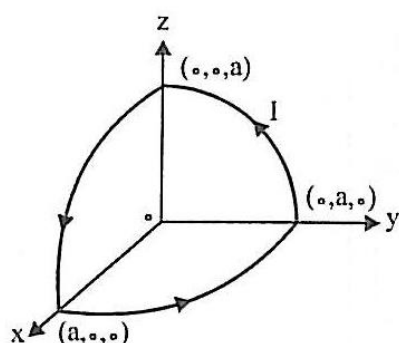
$$V \rightarrow V_m, \quad E \rightarrow H, \quad \epsilon_r \rightarrow \mu_r$$

پاسخهای مسئله ۱۱ خودآزمایی فصل چهارم عبارتند از:

$$\mathbf{E}^i(r, \varphi) = \frac{\gamma E_0}{\epsilon_r + 1} (\cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi), \quad r < a$$

$$\mathbf{E}^o(r, \varphi) = E_0 \left[\left(1 + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_r - \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \right], \quad r > a$$

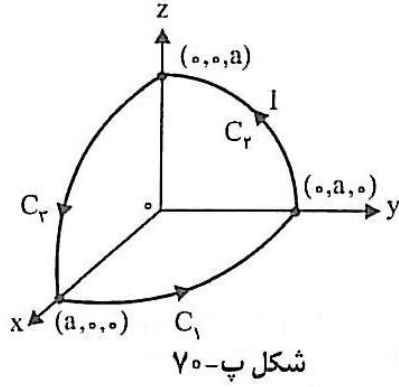
به خوبی روشن است که با انجام تبدیلات فوق پاسخهای مورد نظر برای مسئله حاضر به دست می‌آیند.



شکل ۶-۲۵

۲۴. یک حلقه جریان از سه قوس ۹۰ درجه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع a و واقع در صفحات xy ، yz ، و zx مطابق شکل ۶-۲۵، تشکیل شده است. از این حلقه، جریان I عبور داده شده و در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{a}}_x$ قرار داده می‌شود. گشتاور مکانیکی اعمال شده بر این حلقه جریان را محاسبه نمایید.

۲۴. با توجه به شکل پ-۷ داریم:



$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \frac{I}{\gamma} \oint_C (\mathbf{r} \times d\mathbf{L}) \times \mathbf{B} = \frac{I}{\gamma} \left(\int_{C_1} + \int_{C_r} + \int_{C_2} \right)$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (\mathbf{r} \times d\mathbf{L}) \times \mathbf{B} &= B \cdot \int_{C_1} [(x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y) \times (dx \hat{\mathbf{a}}_x + dy \hat{\mathbf{a}}_y)] \times \hat{\mathbf{a}}_x \\ &= B \cdot \int_{C_1} (x dy \hat{\mathbf{a}}_z - y dx \hat{\mathbf{a}}_z) \times \hat{\mathbf{a}}_x = B \cdot \int_{C_1} (x dy - y dx) \hat{\mathbf{a}}_y \\ &= B \cdot \left(\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \int_a^0 \sqrt{a^2 - x^2} dx \right) \hat{\mathbf{a}}_y \\ &= B \cdot \left\{ \left[\frac{1}{\gamma} y \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{\gamma} a^2 \sin^{-1} \frac{y}{a} \right]_0^a - \left[\frac{1}{\gamma} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{\gamma} a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_a^0 \right\} \hat{\mathbf{a}}_y \\ &= \frac{1}{\gamma} B \cdot \pi a^2 \hat{\mathbf{a}}_y \end{aligned}$$

$$\int_{C_r} (\mathbf{r} \times d\mathbf{L}) \times \mathbf{B} = B \cdot \int_{C_r} [(y \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z) \times (dy \hat{\mathbf{a}}_y + dz \hat{\mathbf{a}}_z)] \times \hat{\mathbf{a}}_x = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{C_r} (\mathbf{r} \times d\mathbf{L}) \times \mathbf{B} &= B \cdot \int_{C_r} [(x \hat{\mathbf{a}}_x + z \hat{\mathbf{a}}_z) \times (dx \hat{\mathbf{a}}_x + dz \hat{\mathbf{a}}_z)] \times \hat{\mathbf{a}}_x \\ &= B \cdot \int_{C_r} (-x dz \hat{\mathbf{a}}_y + z dx \hat{\mathbf{a}}_y) \times \hat{\mathbf{a}}_x = B \cdot \int_{C_r} (x dz - z dx) \hat{\mathbf{a}}_z \\ &= -\frac{1}{\gamma} B \cdot \pi a^2 \hat{\mathbf{a}}_z \\ \mathbf{T} &= \frac{1}{\gamma} B \cdot I \pi a^2 (\hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z) \end{aligned}$$

۲۵. کابل هم‌محوری از دو استوانه هادی به شعاعهای a و b ($b > a$) تشکیل شده و حامل جریان I در امتداد محور کابل می‌باشد. فشار مغناطیسی وارد آمده بر هادی بیرونی را به دست آورید. فضای بین دو استوانه را هوا اشغال می‌کند.

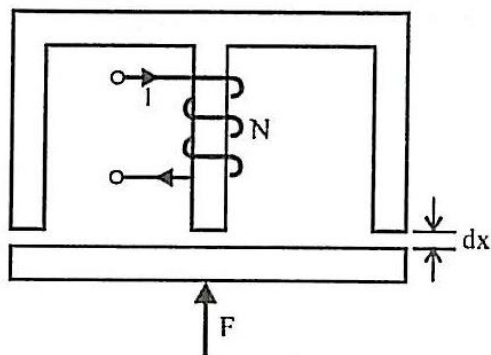
۲۵. انرژی ذخیره شده در واحد طول کابل هم‌محور را طی مثال ۶-۱۰ محاسبه کرده‌ایم. نتیجه در رابطه ۶-۸۰ آمده است.

$$W_m = \frac{\mu \cdot I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \ln \frac{r}{a} \right) \Big|_{r=b}$$

$$F = \nabla W_m = \frac{\partial W_m}{\partial r} \hat{a}_r = \frac{\mu \cdot I^2}{4\pi r} \hat{a}_r \Big|_{r=b} = \frac{\mu \cdot I^2}{4\pi b} \hat{a}_r$$

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\mu \cdot I^2 / 4\pi b}{2\pi b (1)} = \frac{\mu \cdot I^2}{8\pi^2 b^2}$$

■



شکل ۶-۲۶

۲۶. شکل ۶-۲۶ مدار یک جراثقال مغناطیسی را نشان می‌دهد. سطح مقطع مدار همه جا یکسان و برابر S می‌باشد. سیم‌پیچ جریان، میدان مغناطیسی B را در مدار به وجود می‌آورد. نیروی اعمال شده را بر وزنه محاسبه نمایید.

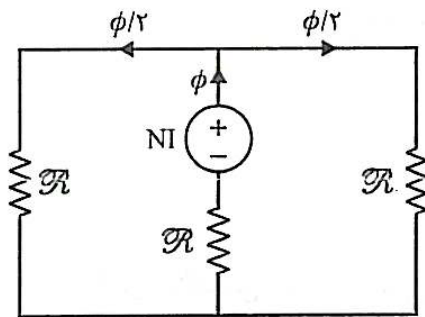
۲۶. چگالی شار مغناطیسی در شاخه میانی B و در شاخه‌های کناری برابر $\frac{1}{\mu} B$ است. اگر وزنه به اندازه dx از هسته دور شود تغییر به وجود آمده در انرژی مغناطیسی ذخیره شده، عبارت است از:

$$dW_m = \frac{1}{2\mu} \left[B^2 S dx + 2 \left(\frac{B}{\mu} \right)^2 S dx \right] = \frac{3}{4\mu} B^2 S dx$$

$$F = \frac{dW_m}{dx} = \frac{3}{4\mu} B^2 S$$

■

۲۶. در مسئله ۲۶ فرض کنید یک فاصله هوایی به اندازه یک میلیمتر بین وزنه و هسته وجود دارد. این فاصله هوایی به دلیل کاملاً مسطح نبودن وزنه و قطبهای هسته در نظر گرفته می شود. در صورتی که $I = 5 \text{ A}$ ، $N = 1000$ و $S = 200 \text{ cm}^2$ باشد و از رلوکتانس هسته در مقابل رلوکتانس فواصل هوایی صرف نظر شود، حداکثر جرمی را که جراثقال می تواند بلند کند به دست آورید.



شکل پ-۷۱

۲۷. ابتدا B را به دست می آوریم. برای این منظور مدار معادل الکتریکی سیستم جراثقال را به صورت شکل پ-۷۱ در نظر می گیریم.

$$\phi = \frac{NI}{R + R \parallel R} = \frac{2NI}{3R}$$

$$R = \frac{l}{\mu_0 S}, \quad B = \frac{\phi}{S} = \frac{2NI\mu_0}{3l}$$

از مسئله ۲۶، داریم:

$$F = \frac{3}{4\mu_0} B^2 S = \frac{3}{4\mu_0} \left(\frac{2NI\mu_0}{3l} \right)^2 S = \frac{1}{3} \mu_0 \left(\frac{NI}{l} \right)^2 S$$

به ازای $l = 10^{-3} \text{ m}$ ، $N = 1000$ ، $I = 5 \text{ A}$ و $S = 0.02 \text{ m}^2$ ، داریم:

$$F = \frac{1}{3} (4\pi \times 10^{-7}) \left(\frac{1000 \times 5}{0.001} \right)^2 (0.02) = \frac{2\pi}{3} \times 10^5 \text{ N}$$

$$F = mg \Rightarrow m = \frac{F}{g} = \frac{2\pi \times 10^5}{3 \times 9.8} = 21371 \text{ Kg}$$

۳-۸ در محیطی که $\hat{x} = 0.1 \text{ B}$ ، ناحیه $|x| > 2$ فضای آزادست. اگر در ناحیه $|x| < 2$ داشته باشیم (الف) $\mu_R = 5$ ؛ (ب) $\mu_R = 5 / (1 + x^2)$ بردار مغناطش M را بیابید.

۳-۸ در هر دو حالت در $|x| > 2$ مغناطش صفرست. در حالت الف

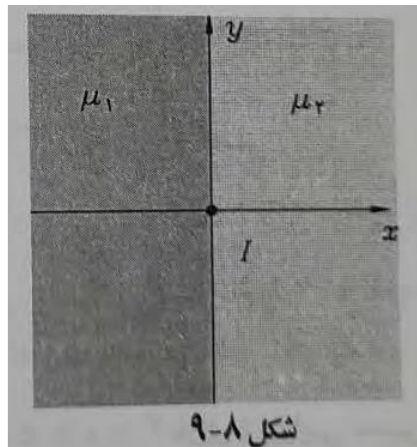
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{0.1 \hat{x}}{5\mu_0} = 15920 \hat{x}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = 79600 \hat{x} - 15920 \hat{x} = 63680 \hat{x}$$

در حالت ب

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\mathbf{H}(1 + x^2)}{5\mu_0} = 15920(4 - x^2) \hat{x}$$

۹-۸ صفحه ۵ $x = 0$ مرز دو ناحیه با تراواییهای μ_1 و μ_2 است. جریان I روی محور z ها قرار دارد. میدان مغناطیسی را در دو ناحیه بیابید.



شکل ۹-۸

۹-۸ چون I تنها در جهت z وجود دارد، $A_x = A_y = 0$. معادله لاپلاس در همه جا بجز محور z صادق است. به علت پیوستگی A در مرز می توان فرض کرد A مستقل از ϕ است (در حل معادلات دیفرانسیل هر فرضی که منجر به جوابی قابل قبول شود جایز است، زیرا یکتایی جواب می گوید با هر فرضی به جواب رسیدیم، آن تنها جواب مسئله است).

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) = 0$$

$$A_z = C_1 \ln \rho + C_2$$

ثابت C_2 را صفر فرض می کنیم. پس در ناحیه ۱ داریم $A_1 = C_{11} \ln \rho$ و در ناحیه ۲ داریم $A_2 = C_{12} \ln \rho$. پیوستگی A در مرز نتیجه می دهد $C_{11} = C_{12}$ و بنابراین در تمام محیط

$$A_1 = A_2 = C \ln \rho \hat{z}$$

$$B_1 = \nabla \times A_1 = -\frac{C}{\rho} \hat{\phi}$$

$$B_2 = \nabla \times A_2 = -\frac{C}{\rho} \hat{\phi}$$

برای یافتن C یک مسیر دایروی در صفحه $z = 0$ و به مرکز محور z در نظر می‌گیریم

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\frac{B_1}{\mu_1} (\pi \rho) + \frac{B_2}{\mu_2} (\pi \rho) = I$$

$$\frac{C}{\mu_1} + \frac{C}{\mu_2} = -\frac{I}{\pi}$$

$$C = -\frac{I}{\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

که نتیجه می‌دهد

۲۲-۸ کره‌ای به شعاع R دارای مغناطش یکنواخت $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$ است. میدان مغناطیسی داخل و خارج کره را بیابید.

۲۲-۸ از روش پتانسیل اسکالر و بارهای مغناطیسی استفاده می‌کنیم

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad \sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{n} = M_0 \cos \theta$$

پتانسیل داخل و خارج کره را بر حسب توابع لژاندر می‌نویسیم. چون بار روی کره تنها تابع $\cos \theta$ است انتظار داریم تنها جملات شامل $\cos \theta$ در حل باقی بمانند

$$V_{m1} = A_1 r \cos \theta + \frac{B_1 \cos \theta}{r^2} \quad r < R$$

$$V_{m2} = A_2 r \cos \theta + \frac{B_2 \cos \theta}{r^2} \quad r > R$$

چون در بی‌نهایت باید پتانسیل محدود باشد، $A_2 = 0$. همچنین برای محدود بودن پتانسیل در مرکز کره $B_1 = 0$. در سطح کره پتانسیل باید پیوسته باشد

$$A_1 R \cos \theta = \frac{B_2 \cos \theta}{R^2} \Rightarrow B_2 = A_1 R^3$$

پیوستگی B_n در سطح کره آخرین شرط مرزی است

$$-\mu_0 \frac{\partial V_{m1}}{\partial r} + \mu_0 M_0 \cos \theta = -\mu_0 \frac{\partial V_{m2}}{\partial r}$$

که نتیجه می‌دهد $-A_1 + M_0 = 2B_2 / R^3$. حل همزمان این دو معادله به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{1}{3} M_0 \quad B_2 = \frac{1}{3} M_0 R^3$$

$$V_{m1} = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta \quad V_{m2} = \frac{1}{3} M_0 R^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

چون $r \cos \theta = z$ داریم

$$H_1 = -\nabla V_{m1} = -\frac{1}{3} M_0 \hat{z}$$

$$H_2 = -\nabla V_{m2} = \frac{1}{3} M_0 \left(\frac{R^3}{r^3} \right) (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

به عنوان راه حلی دیگر روش به کار رفته در مثال ۲ را دنبال می‌کنیم. در آنجا دیدیم که $A = \mu_0 \epsilon_0 M \times E$ که در آن E میدان الکتریکی کره‌ای با بار حجمی 1 C/m^3 است. میدان داخل چنین کره‌ای عبارت است از $E = (r/3\epsilon_0) \hat{r}$ پس

$$A = \mu_0 M_0 \hat{z} \times \frac{r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \mu_0 \frac{M_0 r}{3} \sin \theta \hat{\phi}$$

حال میدان را به دست می‌آوریم

$$B = \nabla \times A = \frac{\mu_0 M_0}{3} (2 \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

با کمی عملیات جبری می‌توان نشان داد که $\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} = \hat{z}$ و همان جواب بالا را به دست آورد.

۲۵-۸ صفحه ۰ $z=0$ مرز دو محیط است: محیط اول ($z > 0$) با تراوایی $\mu_1 = 4\mu_0$ و محیط دوم با تراوایی $\mu_2 = 2\mu_0$. روی صفحه $z=0$ جریان سطحی $K = 2\hat{x} - 3\hat{y}$ برقرار است و در محیط اول $H_1 = 5\hat{x} - 6\hat{y} + \hat{z}$. چگالی شار مغناطیسی در محیط دوم، B_2 ، را بیابید.

۲۵-۸ بردار عمود بر مرز $\hat{z}$ است. داریم $\hat{n} \times (H_1 - H_2) = K$ پس

$$\hat{z} \times H_1 - \hat{z} \times H_2 = 2\hat{x} - 3\hat{y}$$

$$\begin{aligned} \hat{z} \times H_2 &= \hat{z} \times (H_{2x}\hat{x} + H_{2y}\hat{y} + H_{2z}\hat{z}) = \hat{z} \times H_1 - 2\hat{x} + 3\hat{y} \\ &= (6\hat{x} + 5\hat{y}) - 2\hat{x} + 3\hat{y} = H_{2x}\hat{y} - H_{2y}\hat{x} \end{aligned}$$

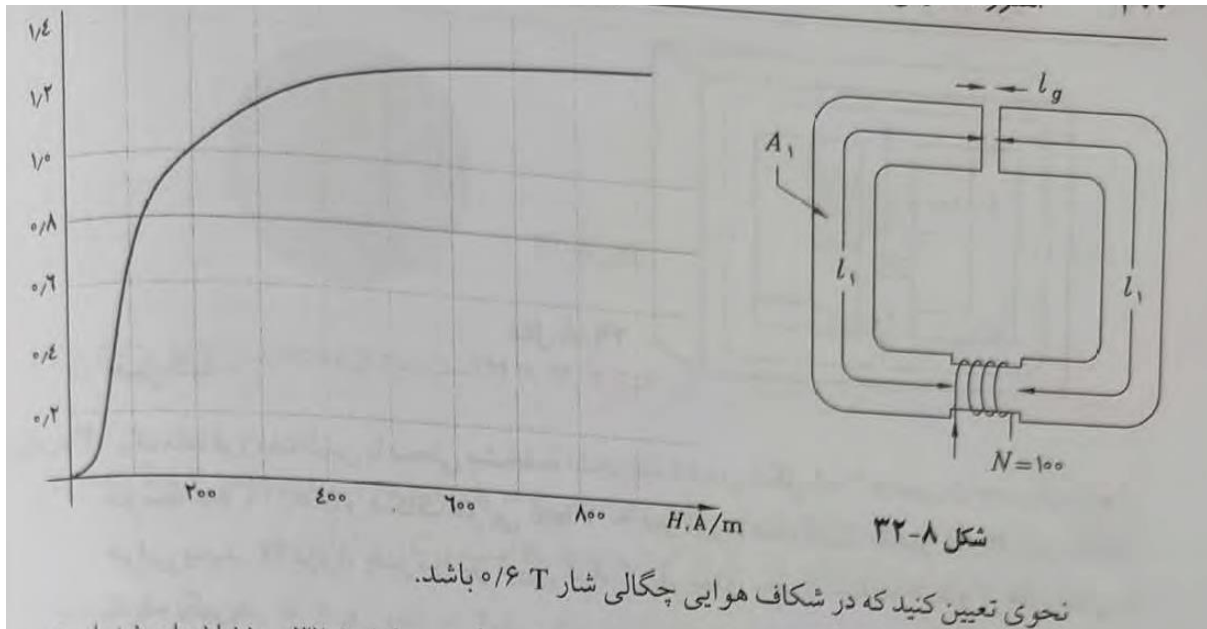
پس $H_{2x} = 4$ و $H_{2y} = -8$. همچنین مولفه عمودی B باید پیوسته باشد. یعنی $B_{1z} = B_{2z}$ یا

$$B_{2z} = B_{1z} = \mu_1 H_{1z} = 4\mu_0$$

سرانجام

$$B_2 = \mu_2 H_2 = 2\mu_0 H_2 = \mu_0 (8\hat{x} - 16\hat{y} + 4\hat{z})$$

۳۲-۸ هسته شکل ۳۲-۸ الف از ماده‌ای با منحنی مغناطیس نشان داده شده در شکل ۳۲-۸ ب ساخته شده است، $A = 10 \text{ cm}^2$ و $l_g = 2 \text{ mm}$ ، $l_1 = 40 \text{ cm}$ ، بخشی که سیم پیچ روی آن پیچیده شده دارای طول $l_2 = 10 \text{ cm}$ و سطح مقطع 5 cm^2 است. شار ناشی از سیم پیچ 0.01 mWb است. جریان I را به



۳۲-۸ در شکاف هوایی $H_g = (0.6 \text{ T}) / \mu_0 = 477 \times 10^5$ پس آمپر دور لازم برای آن عبارت است از

$$F_1 = H_g l_g = 477 \times 10^5 \times 0.002 = 955 \text{ At}$$

در بازوهای به طول l_1 برای $B = 0.6 \text{ T}$ باید با توجه به منحنی شکل ۳۲-۸ داشته باشیم $H_1 = 100 \text{ A/m}$ پس آمپر دور لازم برای دو بازو برابر است با

$$F_2 = 2 l_1 H_1 = 80 \text{ At}$$

شار شکاف هوایی و بازوها عبارت است از

$$\phi = B A = 0.6 \times 10 \times 10^{-2} = 0.6 \text{ mWb}$$

شاری که سیم پیچ باید ایجاد کند جمع این شار و شار ناشی است، یعنی $\phi_c = 0.6 + 0.01 = 0.61 \text{ mWb}$

پس میدان سیم پیچ عبارت است از

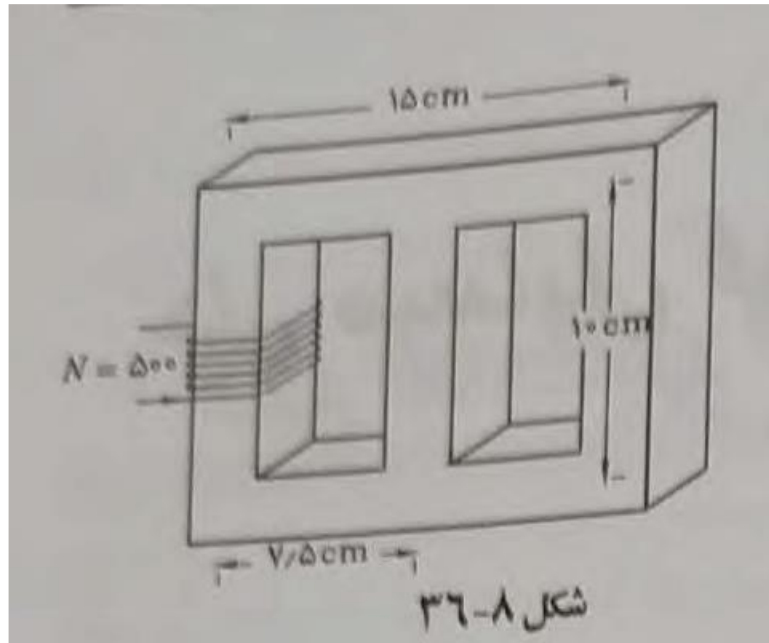
$$B_2 = \frac{\phi_c}{A_2} = \frac{0.61 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}} = 1.22 \text{ T}$$

منحنی مغناطیسی نشان می‌دهد که برای این میدان باید داشته باشیم $H_2 = 410 \text{ A/m}$ ، یعنی mmf روی میله‌ای که سیم پیچ روی آن بسته شده باید $H_2 l_2 = 41 \text{ At}$ باشد. پس کل mmf عبارت است از

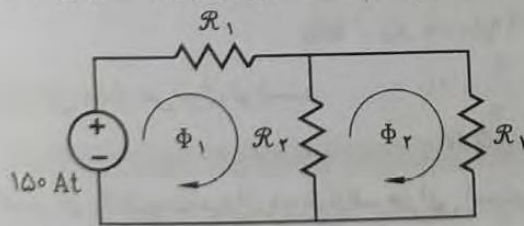
$$F_3 = 956 + 80 + 41 = 1076 \text{ At}$$

چون $N = 100$ جریان لازم برای ایجاد این mmf برابر 10.76 A است.

۳۶-۸ برای آهن تشکیل دهنده قاب شکل ۳۶-۸، $\mu = 2500 \mu$. جریان سیم پیچ $A \ 0.3$ و سطح مقطع تمام بخشهای قاب 4 cm^2 است. شار ساق سمت راست را بیابید.



۳۶-۸ بخش سیم پیچ یک mmf با مقدار $150 \text{ At} = 500 \times 0.3$ ایجاد می کند. رلوکتانس ساق وسطی R_1 است، طرف راست ساق وسطی از سه بخش تشکیل شده است، هر یک از این بخشها رلوکتانسی دارد ولی چون تمام این بخشها سری هستند، رلوکتانس کل را با R_1 مدل می کنیم. به همین ترتیب بخشهای سمت چپ ساق وسطی نیز با R_1 مدل می شود. داریم



$$R_1 = \frac{(7.5 + 10 + 7.5) \text{ cm}}{2500 \mu_r \times 4 \times 10^{-4}} = 198.94 \times 10^3$$

$$R_2 = \frac{10 \text{ cm}}{2500 \mu_r \times 4 \times 10^{-4}} = 79.58 \times 10^3$$

شکل ح ۳۶-۸

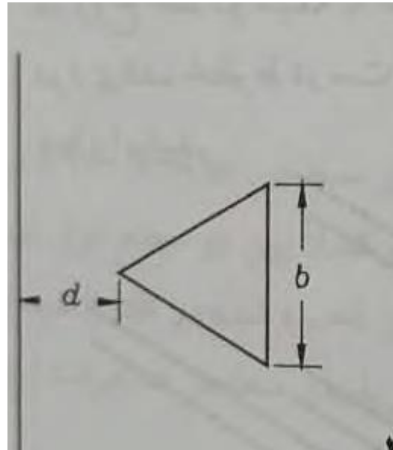
پس مدار مغناطیسی شکل ح ۳۶-۸ به دست می آید و برای آن

$$\Phi_2 R_1 + R_2 (\Phi_2 - \Phi_1) = 0$$

$$\Phi_1 R_1 + R_2 (\Phi_1 - \Phi_2) = 150$$

حل این دو معادله به دست می دهد $\Phi_1 = 0.168 \text{ Wb}$ ، پس $B_2 = \Phi_2 / S = 419 \text{ T}$

۲-۹ القاکنایی متقابل سیم بی نهایت و مثلث متساوی الاضلاع شکل ۲-۹ را ببینید.



۲-۹ میدان ناشی از سیم راست در دستگاه مختصات نشان داده شده، عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} (-\hat{x})$$

(مثلث در صفحه $x = 0$ قرار دارد). سطح مثلث را به نوارهایی با عرض dy تقسیم می‌کنیم. طول هر نوار واقع

در فاصله y عبارت است از $(2/\sqrt{3})(y-d)$. پس

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi y} (-\hat{x}) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} (y-d) dy (-\hat{x})$$

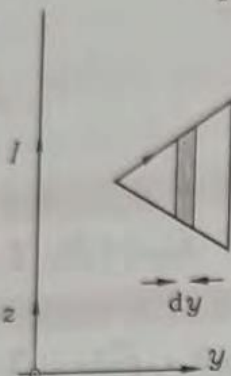
انتگرال در فاصله d تا $d + \frac{\sqrt{3}}{2}b$ محاسبه می‌شود:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{3}} \int \frac{y-d}{y} dy = \frac{\mu_0 I \sqrt{3}}{2\pi} [y - d \ln y]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} b - d \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3} b}{2d} \right) \right]$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\frac{b}{2} - \frac{d}{\sqrt{3}} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3} b}{2d} \right) \right]$$

و سرانجام

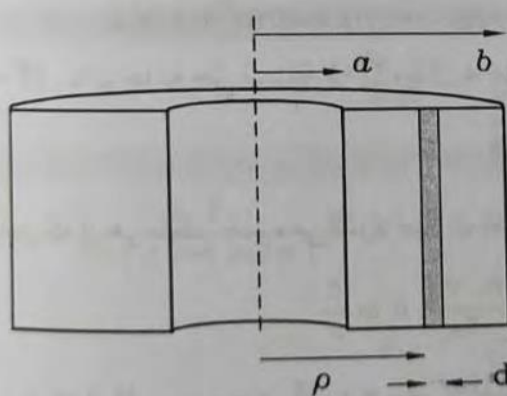


شکل ۲-۹

۱۶-۹ از یک پوسته استوانه‌ای طویل با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b جریان I با توزیع یکنواخت می‌گذرد. القاکنایی در واحد طول را بیابید.

۱۹-۹ سیم‌لوله‌ای از N دور سیم نازک کنار هم پیچیده تشکیل شده است. طول سیم‌لوله l و شعاع آن R است و از سیم‌ها جریان I می‌گذرد. نیروی وارد بر واحد طول سیم‌ها چقدر است؟

۱۶-۹ شکل ح ۱۶-۹ مقطعی از پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. با استفاده از قانون آمپر می‌توان نشان داد



که میدان داخل پوسته در فاصله ρ از محور برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left(\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \hat{\phi}$$

شکل ح ۱۶-۹

گذر شار متناظر با سطح هاشور زده را به دست می‌آوریم

$$d\Lambda = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left(\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) (l d\rho) \left(\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$$

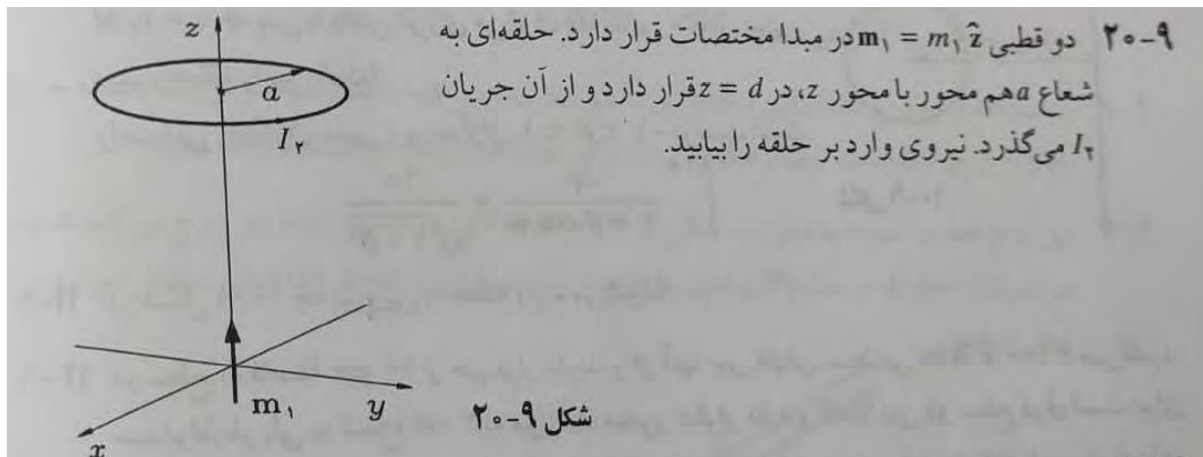
نکته اصلی حل این مسئله در جمله آخر عبارت فوق نهفته است. تمام جریان I در گذر شار مربوط به سطح هاشور زده شده دخیل نیست، بلکه تنها بخشی از جریان که درون این سطح هست باید در نظر گرفته شود.

پس

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi (b^2 - a^2)^2} \int_a^b \frac{(\rho^2 - a^2)^2}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi (b^2 - a^2)^2} \int_a^b \left(\rho^3 - 2a^2\rho + \frac{a^4}{\rho} \right) d\rho \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{\rho^4}{4} - \rho^2 a^2 + a^4 \ln \rho \right] \Big|_a^b$$

$$\frac{L}{I} = \frac{\Lambda}{I l} = \frac{\mu_0}{2\pi (b^2 - a^2)^2} \left(b^4 - 2a^2 b^2 + \frac{4a^4}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$



۲۰-۹ میدان ناشی از دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1}{r^3} (\gamma \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

نیروی وارد بر حلقه عبارت است از

$$\mathbf{F} = I_2 \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -I_2 \int \mathbf{B} \times (a d\phi \hat{\phi}) \quad (1)$$

$$= -\frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \gamma \cos \theta d\phi (-\hat{\theta}) + \sin \theta \hat{r} d\phi$$

برای محاسبه انتگرال بردارهای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان می‌کنیم.

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

چون انتگرال $\sin \phi$ و $\cos \phi$ روی یک دوره تناوب صفر می‌شود، مولفه‌های x و y نیرو صفرست و

$$F_z = -\frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \gamma \sin \theta \cos \theta d\phi$$

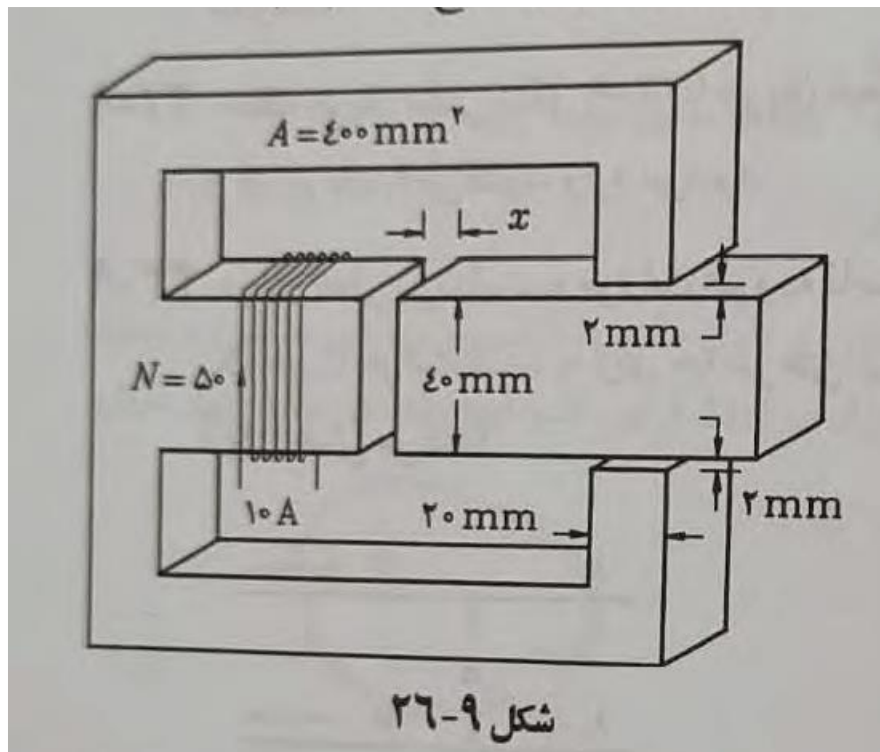
$$= \frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3} \times 2\pi \sin \theta \cos \theta$$

که در آن $r = \sqrt{d^2 + a^2}$ و $\cos \theta = d/r$ ، $\sin \theta = a/r$ پس

$$F_z = -\frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3} \times 2\pi \times \frac{a}{r} \times \frac{d}{r} = -\frac{\gamma}{2} \mu_0 m_1 I_2 \frac{a^2 d}{(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

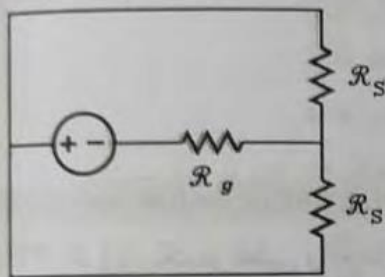
شکل ۲۵-۹

۲۶-۹ هسته آهنربای الکتریکی شکل ۲۶-۹ از ماده‌ای با $\mu \gg \mu_0$ ساخته شده است. زیانه‌ای که به داخل آهنربا کشیده می‌شود نیز از همان جنس است. نیرویی که به ازای $x = 5 \text{ mm}$ به زیانه وارد می‌شود چقدرست؟ ضخامت تمام بخشها در جهت عمود بر کاغذ ۲ cm است.



۹-۲۶ چون هسته تراوایی بسیار بزرگی دارد رلوکتانس آن در مقابل رلوکتانس فاصله هوایی قابل اغماض

است و برای مدار مغناطیسی شکل ح ۹-۲۶ داریم



$$R_s = \frac{2 \times 10^{-3}}{400 \times 10^{-6} \mu_0} = \frac{5}{\mu_0}$$

$$R_{g1} = \frac{x \times 10^{-3}}{40 \times 20 \times 10^{-6} \mu_0} = \frac{10x}{8 \mu_0}$$

شکل ح ۹-۲۶

که در آن x بر حسب میلیمتر است. پس رلوکتانس کل دیده شده توسط سیم پیچ $R = R_g + \frac{1}{4} R_s$ است و با توجه

به حل مسئله ۹-۹ القاکنایی آن برابرست با

$$L = \frac{N^2}{R} = \frac{2500}{(2.5 / \mu_0) + (10x / 8 \mu_0)} = \frac{20000 \mu_0}{20 + 10x} = \frac{2000 \mu_0}{x + 2}$$

نیروی وارد شده بر زبانه عبارت است از

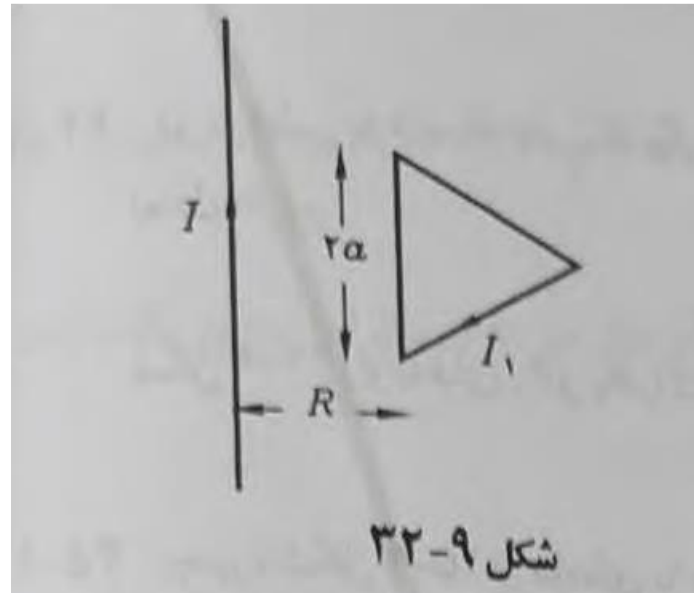
$$F = \frac{1}{4} I^2 \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{4} \times 100 \times 2000 \mu_0 \frac{1}{(x+2)^2}$$

و در $x = 5 \text{ mm}$

$$F = -\frac{2\pi}{4900} N$$

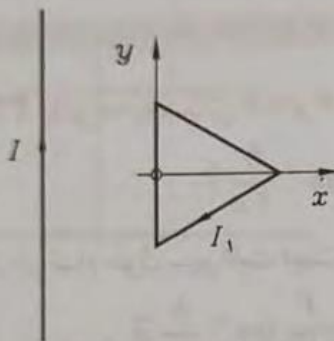
منفی بودن نیرو نشان می دهد که این نیرو نیروی جاذبه است.

۳۲-۹ حلقه جریان مثلثی شکل ۳۲-۹ با جریان خطی I در یک صفحه قرار دارند. چه نیرویی بر حلقه، که از آن جریان I_1 می‌گذرد، وارد می‌شود.



۳۲-۹ میدان مغناطیسی در محل مثلث عبارت است از $B = [I\mu_0 / 2\pi(R+x)](-\hat{z})$. نیروی وارد بر بخش موازی با جریان خطی عبارت است از

$$F = (2a) \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi R} (-\hat{x})$$



در امتداد ساق بالایی $dy = -dx$ پس $d\mathbf{l} = dx\hat{x} - dy\hat{y}$. نیروی وارد بر ساق بالایی مثلث عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_y &= \int I_1 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \frac{I I_1 \mu_0}{2\pi} \int (dx\hat{x} - dy\hat{y}) \times \frac{-\hat{z}}{R+x} \\ &= \frac{I I_1}{2\pi} (\hat{x} + \hat{y}) \int_0^a \frac{dx}{R+x} = \frac{I I_1}{2\pi} (\hat{x} + \hat{y}) \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right) \end{aligned}$$

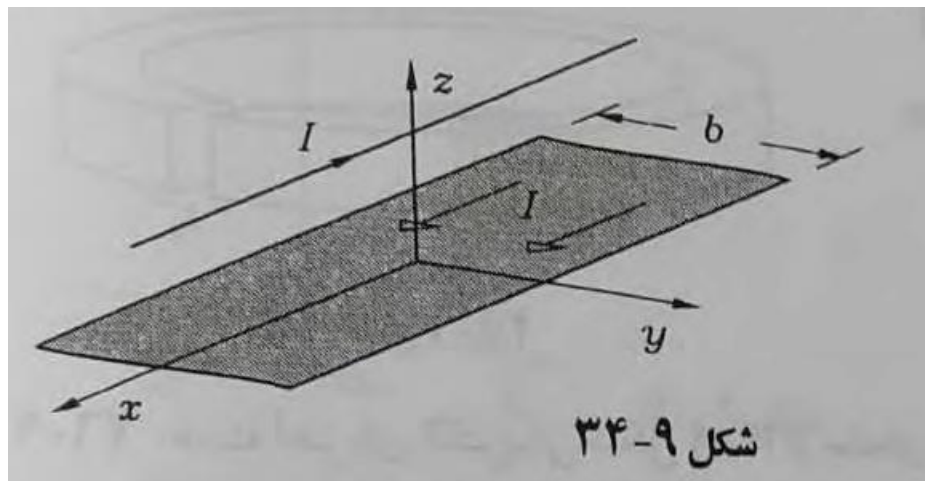
به همین ترتیب چون روی ساق پایینی $dy = dx$ نیروی وارد بر آن عبارت است از

$$\mathbf{F}_x = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} (\hat{x} - \hat{y}) \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right)$$

پس

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_x = \frac{\mu_0 I I_1}{\pi} \left[\ln \left(1 + \frac{a}{R} \right) - \frac{a}{R} \right] \hat{x}$$

۳۴-۹ جریان I از نواری به عرض b ، واقع در صفحه $z = 0$ ، در جهت x می‌گذرد و از سیمی واقع در $z = d$ و $y = 0$ در جهت $-x$ بر می‌گردد. نیروی وارد بر یک متر سیم را بیابید.

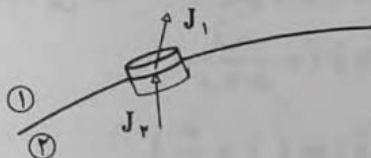


۳۴-۹ با توجه به مسائل ۷-۷ و ۸-۷ میدان ناشی از نوار جریان در محل سیم تنها مولفه y دارد و برابرست با

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \left(2 \tan^{-1} \frac{b}{2d} \right) \hat{y} = -\frac{\mu_0 I}{\pi b} \tan^{-1} \frac{b}{2d} \hat{y}$$

میدان در تمام طول سیم ثابت است، پس

$$\mathbf{F} = I \mathbf{I} \times \mathbf{B} = I(-\hat{x}) \times \left(-\frac{\mu_0 I}{\pi b} \tan^{-1} \frac{b}{2d} \hat{y} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi b} \tan^{-1} \frac{b}{2d} \hat{z}$$

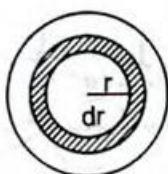


شکل ح ۳۴-۹

۱. یک دیسک بشعاع a حول محورش با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد اگر این دیسک دارای بار سطحی به چگالی ρ_s باشد اندازه ممان این دیسک چقدر است؟

$\frac{\pi}{4} \rho_s \omega a^4$ (۱)
 $\frac{\pi}{2} \rho_s \omega a^3$ (۲)
 $\pi \rho_s \omega a^4$ (۳)
 $\pi \rho_s \omega a^2$ (۴)

۱. گزینه (۱) اگر نواری به شعاع r و ضخامت dr در نظر بگیریم جریان در این نوار عبارتست از

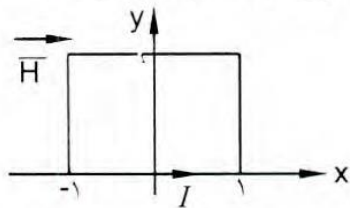


$$dI = (\rho_s 2\pi r dr) \times \frac{\omega}{2\pi} = \rho_s \omega r dr$$

$$dm = s dI = \pi r^2 \rho_s \omega r dr = \rho_s \omega r^3 \pi dr$$

$$m = \int_0^a dm = \frac{1}{4} \rho_s \omega a^4 \pi$$

۴. حلقه مستطیل شکل مطابق شکل در معرض میدان $H = \frac{2}{\mu_0} x^2 y^3 \hat{a}_x$ قرار دارد گشتاور وارد بر حلقه کدام است جریان حلقه 10^A است؟



- (۱) $270 \hat{a}_y$
(۲) $140 \hat{a}_y$
(۳) $150 \hat{a}_y$
(۴) $120 \hat{a}_y$

گزینه (۱)

$$\vec{T} = \int d\vec{m} \times \vec{B} = \int_{-1}^1 \int_0^2 I dx dy \hat{a}_y \hat{a}_z \times 2x^2 y^3 \hat{a}_x = \hat{a}_y \int_{-1}^1 \int_0^2 2x^2 y^3 dx dy$$

$$T = \hat{a}_y \left[2x^3 \times \frac{1}{4} y^4 \right]_{-1}^1 \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_0^2 = \hat{a}_y \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} (2)(16) = 270 \hat{a}_y$$

۵. فضای بین $0 < z < a$ را ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{a} \right)^2$ اشغال کرده است چگالی شار مغناطیسی $\vec{B} = B_0 \hat{a}_y$ در فضا وجود دارد چگالی جریانه‌های مغناطیسی کدام است؟

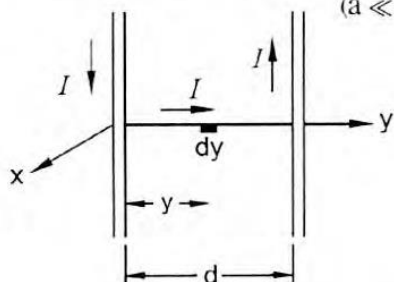
(۱) $J_m = 0$
(۲) $J_m = \frac{2z}{a} \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_x$
(۳) $J_m = \left(\frac{2z}{a} + \frac{1}{a} \right) \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_x$
(۴) $J_m = \left(\frac{2z}{a} + \frac{1}{a} \right) \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_x$

- گزینه (۴)

پیوستگی مولفه مماسی $H_{y_2} = H_{y_1}$
 $\mu_r = \left(1 + \frac{z}{a} \right)^2$
 $H_{y_2} = \frac{B_0}{\mu_0} \rightarrow \vec{M} = (\mu_r - 1) \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_y = \left(\frac{2z}{a} + \frac{1}{a} \right) \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_y$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \frac{-\partial M_y}{\partial z} \hat{a}_x = - \left(\frac{2z}{a} + \frac{1}{a} \right) \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_x$$

۶. دو سیم موازی بفاصله d از هم قرار دارند جریان I از سیم اول عبور کرده و توسط یک میله افقی به سیم دوم متصل می‌شود نیروی وارد بر میله افقی کدام است (شعاع سیم‌ها a می‌باشد و $a \ll d$)



- (۱) $\frac{-\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{d}{a} \hat{a}_z$
(۲) $\frac{-\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d}{a} \hat{a}_z$
(۳) $\frac{-\mu_0 I^2}{\pi} \ln \frac{2d}{a} \hat{a}_z$
(۴) $\frac{-\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{2d}{a} \hat{a}_z$

ع. گزینه ۴)

$$d\vec{F} = I dy \hat{a}_y \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi y} + \frac{\mu_0 I}{4\pi (d-y)} \right] \hat{a}_x$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} (-\hat{a}_z) \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right] dy$$

$$\vec{F} = \int_{\frac{a}{2}}^{d-\frac{a}{2}} dF = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \hat{a}_z = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{2d}{a} \hat{a}_z$$

۷. یک دیسک ضخامت h از ماده مغناطیسی با بردار $\vec{M} = M_0 \hat{a}_z$ (M_0 عدد ثابتی است) مغناطیس شده است بردار پتانسیل برداری در نقطه‌ای بسیار دور از این دیسک کدام است مساحت دیسک را S بگیرید؟

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^2} M_0 \sin\theta \hat{a}_\phi \quad (۱) \quad \frac{\mu_0}{4\pi r^2} M_0 \sin\theta \hat{a}_\phi \quad (۲)$$

$$\frac{\mu_0 M_0}{4\pi r^2} M_0 \text{Sh} \sin\theta \hat{a}_\phi \quad (۴) \quad \frac{\mu_0}{4\pi r^2} M_0 \text{Sh} \sin\theta \hat{a}_\phi \quad (۳)$$

۷. گزینه ۳) چگالی سطحی جریان مغناطیسی معادل عبارتست از:

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{a}_R = M_0 \hat{a}_z \times \hat{a}_R = M_0 \hat{a}_\phi$$

$$\text{جریان معادل دیسک} = J_{sm} \times h = M_0 h \rightarrow m = SI = SM_0 h$$

$$A = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta \hat{a}_\phi = \frac{\mu_0 SM_0 h}{4\pi r^2} \sin\theta \hat{a}_\phi$$

۹. ضریب نفوذپذیری بین دو صفحه $Z=0$ و $Z=2$ بطور خطی از μ_0 در $Z=0$ به $3\mu_0$ تا $Z=2$ تغییر می‌کند اگر میدان $H = H_0 \hat{a}_x$ در بیرون دو صفحه برقرار باشد چگالی سطحی جریان مغناطیسی در صفحه $Z=2$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} H_0 \hat{a}_y \quad (۱) \quad \frac{2}{3} H_0 \hat{a}_y \quad (۲) \quad -2 H_0 \hat{a}_y \quad (۳) \quad \frac{3}{4} H_0 \hat{a}_y \quad (۴)$$

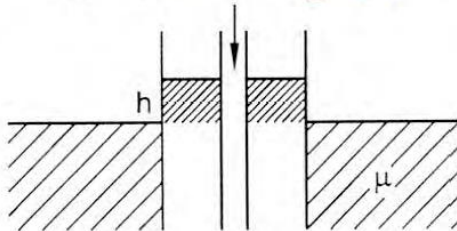
$$\mu = az + b \quad \begin{matrix} z=0 & \mu=\mu_0 \\ z=r & \mu=r\mu_0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a=\mu_0 \\ b=\mu_0 \end{matrix} \rightarrow \mu=\mu_0(z+1)=\mu_0\mu_r$$

$$H_{x_r} = H_{x_1} \Rightarrow \bar{H}_r = H_0 \hat{a}_x$$

$$\bar{M} = (\mu_r - 1) \bar{H}_r = z H_0 \hat{a}_x$$

$$\bar{J}_{ms} \Big|_{z=r} = \bar{M} \times \hat{a}_z \Big|_{z=r} = -r H_0 \hat{a}_y$$

۵. کابل هم محوری بشعاع داخلی a و خارجی b را در داخل مایع قابل مغناطیس شدن با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ بطور عمود مطابق شکل وارد می‌کنیم اگر وزن مخصوص مایع ρ باشد و جریان کابل I باشد ارتفاع h را که مایع بالا می‌آید بدست آورید



$$\begin{aligned} & \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{2\pi^2 a b \rho} \ln \frac{b}{a} \quad (r) \quad \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{4\pi^2 (b^2 - a^2) \rho g} \ln \frac{b}{a} \quad (1) \\ & \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{2\pi (b^2 - a^2) \rho g} \ln \frac{b}{a} \quad (r) \quad \frac{(\mu - \mu_0) I^2 \ln \frac{b}{a}}{2\pi^2 (b^2 - a^2) \rho g} \quad (r) \end{aligned}$$

۵. گزینه ۱) اگر طول کل کابل را L بگیریم و مطابق شکل ارتفاع مایع z باشد داریم

$$\oint \bar{H} \cdot d\vec{\ell} = I \rightarrow \bar{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

حال انرژی کل ذخیره شده در طول L را حساب کنید.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_a^b \mu H^2 2\pi r z dr + \frac{1}{2} \int_a^b \mu_0 H^2 2\pi r (L-z) dr$$

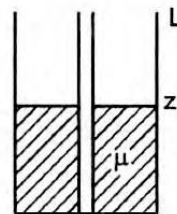
$$W_m = \frac{1}{2} \int_a^b \mu \frac{I^2}{2\pi} + \frac{1}{2} \int_a^b \mu_0 \frac{I^2}{2\pi r} (L-z)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu}{2\pi} I^2 z \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 (L-z) \ln \frac{b}{a}$$

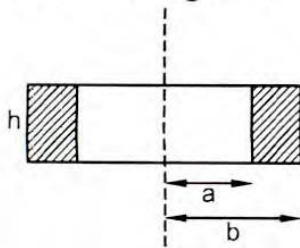
$$W_m = \frac{z}{2\pi} I^2 (\mu - \mu_0) \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{2\pi} L I^2 \ln \frac{b}{a}$$

$$F_z = \frac{dW_m}{dz} = \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \text{وزن مایع جابجا شده} = \pi (b^2 - a^2) h \rho g$$

$$\Rightarrow h = \frac{(\mu - \mu_0) I^2}{4\pi^2 (b^2 - a^2) \rho g} \ln \frac{b}{a}$$



۱۱. چه مقدار انرژی باید مصرف کنیم تا جریان I در یک چنبره با هسته هوایی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با سطح مقطع مستطیل به ابعاد $(b-a)$ و h مطابق شکل با N دور سیم پیچی برقرار شود فرض بر این است که سیم پیچی منظم باشد آنچنانکه تنها مولفه B_ϕ داخل هسته حضور داشته باشد و در خارج چنبره میدان صفر است



$$\frac{\mu_0}{2} N^2 I^2 h \ln \frac{b-a}{a} \quad (۱) \quad \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 I^2 h \ln \frac{b-a}{a}$$

$$\frac{\mu_0}{2} N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a} \quad (۲) \quad \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a} \quad (۳)$$

۱۱. گزینه ۳) کل انرژی برابر است با $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ پس کافیت L را بدست آوریم.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI \rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r} \rightarrow \phi = \int \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr$$

$$\phi = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \rightarrow L = \frac{N\phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{4\pi} \mu_0 N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a}$$

۱۳. دو پیچک با تعداد دورهای N_1 و N_2 با شعاع تقریباً مساوی a مفروضند اگر پیچک اولی بتواند در داخل پیچک دومی بلغزد نیروی متقابل بین دو پیچک را بدست آورید؟

$$\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2 I_1 I_2 \quad (۱) \quad \mu_0 N_1 N_2 \pi a^2 I_1 I_2 \quad (۲) \quad \mu_0 (N_1 N_2)^2 I_1 I_2 \pi a^2 \quad (۳) \quad \mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 \pi a^2 \quad (۴)$$



۱۳. گزینه ۲) فرض کنید طول پیچک ها مطابق شکل l_1, l_2 باشد. حال انرژی مغناطیسی ذخیره شده را در کل سیستم بدست می آوریم.

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 (N_1 I_1)^2 (l_1 - x) \pi a^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (N_2 I_2 + N_1 I_1)^2 x \pi a^2$$

$$+ \frac{1}{2} \mu_0 (N_2 I_2)^2 (l_2 - x) \pi a^2 \Rightarrow F_x = \frac{dW_m}{dx} \quad \left| \begin{array}{l} = -\frac{1}{2} \mu_0 I_1 I_2 \pi a^2 N_1^2 \\ I = \text{ثابت} \end{array} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \mu_0 (N_1 I_1 + N_2 I_2)^2 \pi a^2 - \frac{1}{2} \mu_0 N_2^2 I_2^2 \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 \pi a^2$$

آموزشیار: کرامتی

موفق باشید، افسحی