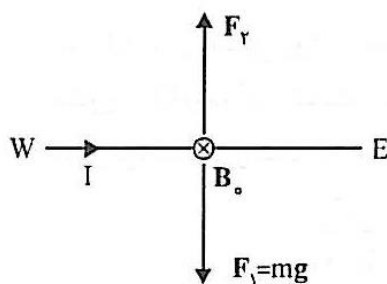


فصل پنجم میدان مغناطیسی ساکن در خلا

۱. یک قطعه سیم نازک مستقیم به طول l و جرم m به طور افقی در امتداد شرق به غرب و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 که به سمت شمال است قرار می‌گیرد. چه جریانی باید از سیم عبور کند تا نیروی جاذبه وارد آمده بر سیم از طرف زمین به طور کامل خنثی شود. مقدار این جریان را وقتی که قطعه سیم دارای طول ۱ متر و جرم 30 گرم بوده و در میدان مغناطیسی زمین، که برابر $0.3 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ فرض می‌شود، قرار بگیرد محاسبه کنید.



شکل پ-۴۴

۱. با توجه به شکل پ-۴۴ داریم:

$$|F_y| = \int_0^l B_0 I dL = B_0 I l ; \text{ میدان } B_0 \text{ بر جریان } I \text{ عمود است}$$

$$|F_x| = |F_y| , B_0 I l = mg$$

$$I = \frac{mg}{B_0 l} = \frac{30 \times 10^{-3} \times 9.8}{1 \times 0.3 \times 10^{-4}} = 9800 \text{ A}$$

۲. نشان دهید که نیروی کل وارد آمده بر یک مدار بسته حامل جریان I وقتی که در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار گیرد همواره برابر صفر است.

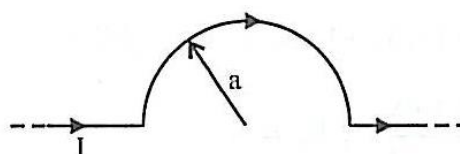
$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}_0 \quad ۲.$$

چون B_0 بردار ثابتی است، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{F} = I \left(\oint_C d\mathbf{L} \right) \times \mathbf{B}_0$$

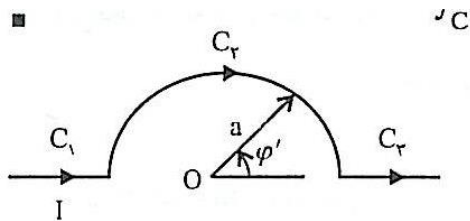
اما:

$$\oint_C d\mathbf{L} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = 0$$



شکل ۵-۱۷

۳. یک رشته سیم مستقیم به طول بینهایت و حامل جریان I در قسمتی از مسیر، شکل یک نیم‌دایره به شعاع a ، مطابق شکل ۵-۱۷، را به خود می‌گیرد. میدان مغناطیسی B را در مرکز نیم‌دایره محاسبه کنید.



شکل پ-۴۵

۳. با توجه به شکل پ-۴۵ داریم:

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1 + C_2 + C_3} \frac{d\mathbf{L}' \times \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right)$$

روی مسیرهای C_1 و C_2 زاویه بین $d\mathbf{L}'$ و $\hat{\mathbf{a}}_R$ برابر صفر یا π است، بنابراین $d\mathbf{L}' \times \hat{\mathbf{a}}_R = 0$. پس، فقط بخش C_3 از مسیر جریان در تولید میدان مغناطیسی در نقطه O سهیم است.

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_3} \frac{d\mathbf{L}' \times \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2}$$

روی مسیر C_3 ، داریم:

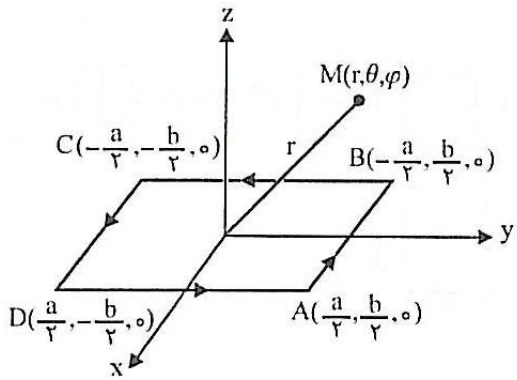
$$d\mathbf{L}' = -a d\varphi' \hat{\mathbf{a}}_\varphi, \quad R = a, \quad \hat{\mathbf{a}}_R = -\hat{\mathbf{a}}_r$$

$$d\mathbf{L}' \times \hat{\mathbf{a}}_R = (-a d\varphi' \hat{\mathbf{a}}_\varphi) \times (-\hat{\mathbf{a}}_R) = -a d\varphi' \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$B_O = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{a^2} \hat{\mathbf{a}}_z \int_{\pi}^0 d\varphi' = \frac{\mu_0 I}{4a} \hat{\mathbf{a}}_z$$

۴. یک دوقطبی مغناطیسی مستطیلی شکل را به اضلاع a و b در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود که دوقطبی در صفحه xy واقع و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد. نشان دهید که میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در فواصل بسیار دور از دوقطبی از رابطه ۵-۲۲ به دست می‌آید که در آن گشتاور دوقطبی برابر $m = Iab$ می‌باشد.

۴. با توجه به شکل پ-۴۶ داریم:



$$B(\mathbf{r}) = B_M(\mathbf{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \oint_{ABCD} \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\oint_{ABCD} = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A$$

روی مسیر AB:

شکل پ-۴۶ $\mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{b}{\gamma} \hat{\mathbf{a}}_y$, $d\mathbf{L}' = dx' \hat{\mathbf{a}}_x$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x') \hat{\mathbf{a}}_x + \left(y - \frac{b}{\gamma}\right) \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left[\left(y - \frac{b}{\gamma}\right) \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_y \right] dx'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left[(x - x')^2 + \left(y - \frac{b}{\gamma}\right)^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

$$K_1 = \int_A^B \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_{a/\gamma}^{-a/\gamma} \frac{\left(y - \frac{b}{\gamma}\right) \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_y}{\left[(x - x')^2 + \left(y - \frac{b}{\gamma}\right)^2 + z^2 \right]^{3/2}} dx'$$

در فواصل دور از دو قطبی، داریم:

$$\left[(x - x')^2 + \left(y - \frac{b}{\gamma}\right)^2 + z^2 \right]^{-3/2} = \left[\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=r^2} + \left(x'^2 + \frac{b^2}{\gamma^2} - 2xx' - by \right) \right]^{-3/2}$$

$$\cong r^{-\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma r^{\gamma}} \left(x'^{\gamma} + \frac{b^{\gamma}}{\gamma} - \gamma x x' - by \right) \right]$$

$$K_1 = \frac{1}{r^{\gamma}} \left[\left(y - \frac{b}{\gamma} \right) \hat{a}_z - z \hat{a}_y \right] \int_{a/\gamma}^{-a/\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma r^{\gamma}} \left(x'^{\gamma} + \frac{b^{\gamma}}{\gamma} - \gamma x x' - by \right) \right] dx'$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که روی مسیر CD،

$$K_{\gamma} = \int_C^D \frac{dL' \times (r - r')}{|r - r'|^{\gamma}}$$

$$K_{\gamma} = \frac{1}{r^{\gamma}} \left[\left(y + \frac{b}{\gamma} \right) \hat{a}_z - z \hat{a}_y \right] \int_{-a/\gamma}^{a/\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma r^{\gamma}} \left(x'^{\gamma} + \frac{b^{\gamma}}{\gamma} - \gamma x x' + by \right) \right] dx'$$

آنگاه:

$$K_1 + K_{\gamma} = \frac{1}{r^{\gamma}} \left[(y \hat{a}_z - z \hat{a}_y) \int_{-a/\gamma}^{a/\gamma} -\frac{\gamma}{r^{\gamma}} by dx' + b \hat{a}_z \int_{-a/\gamma}^{a/\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma r^{\gamma}} \left(x'^{\gamma} - \gamma x x' + \frac{b^{\gamma}}{\gamma} \right) \right] dx' \right]$$

$$= \frac{-\gamma aby}{r^{\gamma}} (y \hat{a}_z - z \hat{a}_y) + \frac{ab}{r^{\gamma}} \underbrace{\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma r^{\gamma}} \left(\frac{a^{\gamma}}{\gamma} + b^{\gamma} \right) \right]}_{<< 1} \hat{a}_z$$

$$\cong \frac{ab}{r^{\gamma}} \left[\frac{-\gamma y (y \hat{a}_z - z \hat{a}_y)}{r^{\gamma}} + \hat{a}_z \right]$$

روی مسیر AD:

$$r' = y' \hat{a}_y + \frac{a}{\gamma} \hat{a}_x, \quad dL' = dy' \hat{a}_y$$

$$r - r' = \left(x - \frac{a}{\gamma} \right) \hat{a}_x + (y - y') \hat{a}_y + z \hat{a}_z$$

$$dL' \times (r - r') = \left[- \left(x - \frac{a}{\gamma} \right) \hat{a}_z + z \hat{a}_x \right] dy'$$

$$|r - r'| = \left[\left(x - \frac{a}{\gamma} \right)^{\gamma} + (y - y')^{\gamma} + z^{\gamma} \right]^{1/\gamma}$$

$$|r - r'|^{-\gamma/\gamma} = \left[\underbrace{(x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})}_{=r^{\gamma}} + \left(y'^{\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{\gamma} - \gamma y y' - ax \right) \right]^{-\gamma/\gamma}$$

$$\cong r^{-\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma r^{\gamma}} \left(y'^{\gamma} + \frac{a^{\gamma}}{\gamma} - \gamma y y' - ax \right) \right]$$

$$K_r = \int_D^A \frac{dL' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^r} = \frac{1}{r^r} \left[\left(x - \frac{a}{r} \right) \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_x \right] \int_{-b/r}^{b/r} \left[1 - \frac{r}{r^r} \left(y'^r + \frac{a^r}{r^r} - r y y' - a x \right) \right] dy'$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که :

$$K_r = \int_B^C \frac{dL' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^r} = \frac{1}{r^r} \left[\left(x + \frac{a}{r} \right) \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_x \right] \int_{b/r}^{-b/r} \left[1 - \frac{r}{r^r} \left(y'^r + \frac{a^r}{r^r} - r y y' + a x \right) \right] dy'$$

آنگاه :

$$\begin{aligned} K_r + K_r &= \frac{1}{r^r} \left[(x \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_x) \int_{-b/r}^{b/r} -\frac{r}{r^r} a x dy' + a \hat{\mathbf{a}}_z \int_{-b/r}^{b/r} \left[1 - \frac{r}{r^r} \left(y'^r + \frac{a^r}{r^r} - r y y' \right) \right] dy' \right] \\ &= \frac{-r a b x}{r^{\Delta}} (x \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_x) + \frac{a b}{r^r} \underbrace{\left[1 - \frac{r}{r^r} \left(\frac{a^r}{r^r} + b^r \right) \right]}_{< 1} \hat{\mathbf{a}}_z \\ &\cong \frac{a b}{r^r} \left[\frac{-r x (x \hat{\mathbf{a}}_z - z \hat{\mathbf{a}}_x)}{r^r} + \hat{\mathbf{a}}_z \right] \end{aligned}$$

حال،

$$K_1 + K_r + K_r + K_r = \frac{a b}{r^r} \left[\frac{r}{r^r} (x z \hat{\mathbf{a}}_x + y z \hat{\mathbf{a}}_y - (x^r + y^r) \hat{\mathbf{a}}_z) + r \hat{\mathbf{a}}_z \right]$$

اما :

$$\frac{z(x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y)}{r^r} = \frac{z \mathbf{r}_c}{r^r} = \frac{z}{r} \frac{\mathbf{r}_c}{r} = \cos \theta \sin \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta)$$

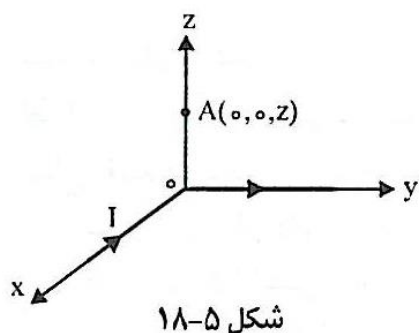
$$\frac{x^r + y^r}{r^r} = \frac{r_c^r}{r^r} = \sin^r \theta, \quad \hat{\mathbf{a}}_z = \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

$$\begin{aligned} K_1 + \dots + K_r &= \frac{a b}{r^r} [r \sin \theta (\cos \theta \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \cos^r \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta - \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin^r \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta) \\ &\quad + r (\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta)] \end{aligned}$$

$$= \frac{a b}{r^r} (r \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta)$$

سرانجام :

$$B(r) = \frac{\mu \cdot I a b}{r^r} (r \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta), \quad r \gg a, b$$



شکل ۵-۱۸

۵. جریان I در امتداد محورهای x و y ، مطابق شکل ۵-۱۸،
جریان دارد. میدان مغناطیسی B را در نقطه‌ای روی محور z
محاسبه کنید.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad .5$$

$$\mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{a}}_x, \quad d\mathbf{L}' = dx' \hat{\mathbf{a}}_x, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{\mathbf{a}}_z - x' \hat{\mathbf{a}}_x \quad \text{روی محور } x:$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = (z^2 + x'^2)^{3/2}, \quad d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -z dx' \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\mathbf{r}' = y' \hat{\mathbf{a}}_y, \quad d\mathbf{L}' = dy' \hat{\mathbf{a}}_y, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{\mathbf{a}}_z - y' \hat{\mathbf{a}}_y \quad \text{روی محور } y:$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = (z^2 + y'^2)^{3/2}, \quad d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = z dy' \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-z \hat{\mathbf{a}}_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + z^2)^{3/2}} + z \hat{\mathbf{a}}_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(y'^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + z^2)^{3/2}} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(y'^2 + z^2)^{3/2}} = - \left[\frac{y'}{z^2 (y'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{z^2}$$

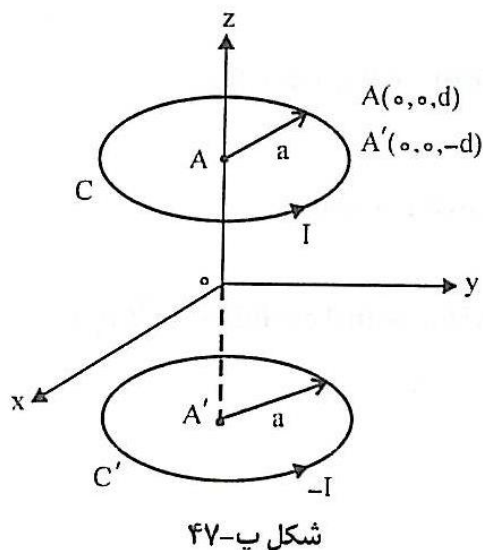
$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y)$$

۶. دو حلقه جریان دایره‌ای شکل در نظر می‌گیریم به طوری که مراکز هر دو منطبق بر محور z باشد، موازی و متقارن نسبت به صفحه xy قرار گیرند، فاصله آنها از یکدیگر $2d$ و شعاع هر یک برابر a باشد و حامل جریان I ولی در دو جهت مخالف باشند. چنین سیستمی را چهارقطبی مغناطیسی نامند. مطلوب است محاسبه میدان مغناطیسی B در فواصل دور از چهارقطبی در نقطه‌ای واقع بر:

الف) محور z ،

ب) صفحه xy .

۶. الف) با توجه به شکل پ-۴۷ داریم:



$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint_C \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \oint_{C'} \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]$$

ابتدا میدان حاصل از یک حلقه جریان را به فرض اینکه روی صفحه xy واقع باشد دست می‌آوریم. برای چنین حلقه جریانی داریم:

$$\mathbf{r} = z \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r}' = a \hat{\mathbf{a}}_r, \quad d\mathbf{L}' = a \hat{\mathbf{a}}_\phi d\phi'$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{\mathbf{a}}_z - a \hat{\mathbf{a}}_r, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = (z^2 + a^2)^{3/2}$$

$$d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (az \hat{\mathbf{a}}_r + a^2 \hat{\mathbf{a}}_z) d\phi', \quad \hat{\mathbf{a}}_r = \cos \phi' \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \phi' \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$B_1(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \left[az \int_0^{2\pi} (\cos \phi' \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \phi' \hat{\mathbf{a}}_y) d\phi' + a^2 \hat{\mathbf{a}}_z \int_0^{2\pi} d\phi' \right] = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_z$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$B(z) = B_1(z-d) + B_1(z+d)$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2} \hat{\mathbf{a}}_z \left[\frac{1}{[(z-d)^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(z+d)^2 + a^2]^{3/2}} \right]$$

لیکن:

$$\frac{1}{[(z-d)^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{1}{z^3 \left[1 + \frac{-2zd + d^2 + a^2}{z^2} \right]^{3/2}} \cong \frac{1}{z^3} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{2zd - d^2 - a^2}{z^2} \right], \quad z \gg d, a$$

$$\frac{1}{[(z+d)^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{1}{z^3 \left[1 + \frac{2zd + d^2 + a^2}{z^2} \right]^{3/2}} \cong \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{2zd + d^2 + a^2}{z^2} \right], \quad z \gg d, a$$

$$\frac{1}{[(z-d)^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(z+d)^2 + a^2]^{3/2}} \cong \frac{6zd}{z^5}, \quad z \gg d, a, \quad z > 0$$

اگر $z < 0$ باشد مقدار عبارت فوق برابر $-\frac{\epsilon z d}{z^5}$ است. پس برای $z > 0$ و $z < 0$ ، مقدار این عبارت را به صورت $\frac{\epsilon d |z|}{z^5}$ می‌نویسیم. آنگاه:

$$B(0, 0, z) = \frac{\mu \cdot I a^2 d |z|}{z^5} \hat{a}_z, \quad |z| \gg d, a$$

ب) برای این حالت، ابتدا کمیت‌های مربوط به یک حلقه جریان به فاصله d از صفحه xy را به دست می‌آوریم. چون میدان در یک نقطه واقع در صفحه xy ، تابعی از φ نیست (به دلیل تقارن مسیر جریان)، می‌توان φ را هر مقدار دلخواه، مثلاً صفر، انتخاب کرد. در این صورت $\mathbf{r} = x \hat{a}_x$ می‌شود و کافی است در خاتمه محاسبات x را با r و $\hat{a}_x$ را با $\hat{a}_r$ جایگزین نماییم. حال برای این حلقه جریان می‌نویسیم،

$$\mathbf{r}' = a \hat{a}_r + d \hat{a}_z = a (\cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y) + d \hat{a}_z$$

$$\mathbf{r} = x \hat{a}_x, \quad d\mathbf{L}' = a d\varphi' \hat{a}_\varphi = a d\varphi' (-\sin \varphi' \hat{a}_x + \cos \varphi' \hat{a}_y)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - a \cos \varphi') \hat{a}_x - a \sin \varphi' \hat{a}_y - d \hat{a}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2} = [(x - a \cos \varphi')^2 + a^2 \sin^2 \varphi' + d^2]^{-1/2} = [x^2 + a^2 + d^2 - 2ax \cos \varphi']^{-1/2} \\ \cong x^{-2} \left[1 - \frac{2}{x} (ax \cos \varphi' + a^2 + d^2) \right], \quad x \gg a, d$$

$$d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = [a^2 \sin^2 \varphi' \hat{a}_z - ad \sin \varphi' \hat{a}_y - \cos \varphi' (ax - a^2 \cos \varphi') \hat{a}_z - ad \cos \varphi' \hat{a}_x] d\varphi' \\ = a [-d \cos \varphi' \hat{a}_x - d \sin \varphi' \hat{a}_y + (a - x \cos \varphi') \hat{a}_z] d\varphi'$$

$$K_1 = \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{2}{x} (-2ax \cos \varphi' + a^2 + d^2) \right] a [-d \cos \varphi' \hat{a}_x - d \sin \varphi' \hat{a}_y + (a - x \cos \varphi') \hat{a}_z] d\varphi'$$

برای حلقه جریانی که به فاصله $-d$ از صفحه xy بوده و حامل جریان $-I$ است، داریم: (با تبدیل d به $-d$)

$$K_2 = \frac{d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{2}{x} (-2ax \cos \varphi' + a^2 + d^2) \right] a [d \cos \varphi' \hat{a}_x + d \sin \varphi' \hat{a}_y + (a - x \cos \varphi') \hat{a}_z] d\varphi'$$

حال، مقدار کل میدان عبارت است از:

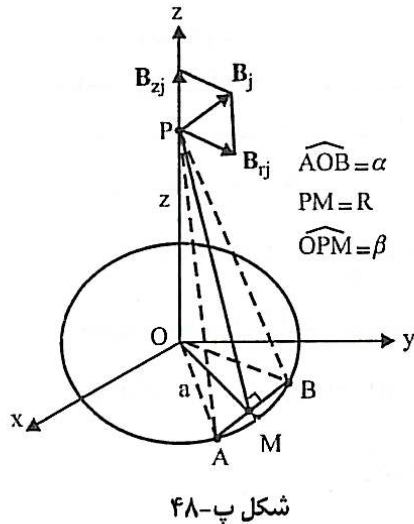
$$B(x, y, 0) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_0^{2\pi} (K_1 - K_2)$$

$$\begin{aligned}
 B(x, y, z) &= \frac{-\mu_0 I a}{4\pi x^3} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{r^2}{x^2} (-r a x \cos \varphi' + a^2 + d^2) \right] (r d \cos \varphi' \hat{a}_x + r d \sin \varphi' \hat{a}_y) d\varphi' \\
 &= \frac{-\mu_0 I a}{4\pi x^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{x^2} \right) (r a x \cos \varphi') (r d \cos \varphi') d\varphi' \hat{a}_x \\
 &= -\frac{\mu_0 I a^2 d}{4\pi x^4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi' d\varphi' \hat{a}_x = -\frac{\mu_0 I a^2 d}{4\pi x^4} \hat{a}_x
 \end{aligned}$$

با جایگزین نمودن x و $\hat{a}_x$ با r و $\hat{a}_r$ ، سرانجام نتیجه زیر حاصل می شود:

$$B(x, y, z) = -\frac{\mu_0 I a^2 d}{4\pi r^4} \hat{a}_r, \quad r \gg a, d$$

۷. حلقه‌ای از سیم به شکل یک n ضلعی منظم در صفحه xy قرار گرفته و حامل جریان I در جهت کلی φ است. مرکز دایره محیطی این n ضلعی منطبق بر مبدأ مختصات و شعاع آن برابر a فرض می شود. میدان مغناطیسی B حاصل از این n ضلعی جریان را در نقطه $(0, 0, z)$ محاسبه کنید. با میل دادن n به سمت بینهایت، میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار جریان دایره‌ای شکل به شعاع a را در نقطه $(0, 0, z)$ به دست آورید.



۷. با توجه به شکل پ-۴۸، فرض می‌کنیم AB یک ضلع، مثلاً ضلع زام، از n ضلعی منظم باشد. میدان مغناطیسی حاصل از پاره خط جریان AB (جریان I از A به طرف B است) در نقطه P(0, 0, z) بردار B_j است که در صفحه OPM واقع است. باید توجه شود که صفحه OPM در نقطه M که وسط AB است بر AB عمود است. با استفاده از رابطه ۵-۱۶ و قرار دادن z=0 در آن، اندازه بردار B_j برابر است با:

$$|B_j| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{2(AB/2)}{\sqrt{AP^2}}$$

لیکن:

$$AP^2 = z^2 + a^2, \quad AB = 2AM = 2a \sin \frac{\alpha}{2}, \quad R^2 = (z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2))$$

در نتیجه:

$$|B_j| = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{\sin(\alpha/2)}{(z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2))^{1/2}} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

B_j در دستگاه مختصات استوانه‌ای دارای مؤلفه‌های \hat{a}_r و \hat{a}_z است. اما مؤلفه \hat{a}_r برای میدان کل برابر صفر می‌شود، زیرا این مؤلفه‌ها دارای اندازه‌های یکسانند و برای مؤلفه \hat{a}_r هر ضلع، سایر اضلاع مؤلفه‌ای در جهت -\hat{a}_r تولید می‌کنند. بنابراین، میدان کل فقط مؤلفه \hat{a}_z دارد.

$$B_{jz} = |B_j| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = |B_j| \sin \beta, \quad \sin \beta = \frac{OM}{PM} = \frac{a \cos(\alpha/2)}{(z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2))^{1/2}}$$

$$B_{jz} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi} \frac{\sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{(z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2)) (z^2 + a^2)^{1/2}}$$

حال، داریم:

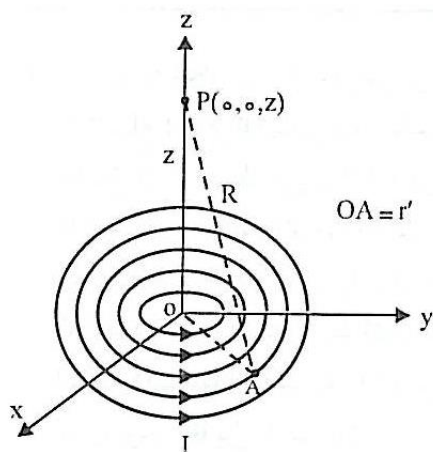
$$\mathbf{B} = (0, 0, z) = \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j = \sum_{j=1}^n B_{jz} \hat{a}_z = n B_{jz} \hat{a}_z$$

$$= n \left(\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \right) \frac{\sin \alpha}{(z^2 + a^2 \cos^2(\alpha/2)) (z^2 + a^2)^{1/2}}$$

اما برای یک n ضلعی منظم $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ است. پس:

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \left(\frac{\mu_0 I n}{4\pi} \right) \frac{\sin(2\pi/n)}{\left[(z/a)^2 + \cos^2(\pi/n) \right] \sqrt{z^2 + a^2}} \hat{a}_z$$

۸. یک رشته سیم نازک به طور پیوسته به شکل حلزون در صفحه xy پیچیده می شود. این سیم پیچ حلزونی از مرکز مختصات شروع و در نقطه ای به شعاع a خاتمه می یابد. اگر تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول و در امتداد شعاعی برابر n و جریان گذرنده از آن برابر I و در جهت φ باشد، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در نقطه $(0, 0, z)$ محاسبه نمایید.



شکل پ-۴۹

۸. این حلزون جریان را می توان به منزله یک توزیع سطحی جریان تلقی کرد که روی دیسکی به شعاع a و در جهت φ برقرار باشد (شکل پ-۴۹). چگالی توزیع سطحی جریان برابر است با:

$$\mathbf{J}_S = \lim \frac{\Delta I}{\Delta L} \hat{\mathbf{a}}_n ; \quad \hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

جریان عبوری از عنصر طول ΔL در امتداد شعاعی

$$\Delta I = n I \Delta L ;$$

$$\mathbf{J}_S = n I \hat{\mathbf{a}}_\varphi = n I (-\sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y)$$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{J}_S \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} dS'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' , \quad \mathbf{r} = z \hat{\mathbf{a}}_z , \quad \mathbf{r}' = r' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + r' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + r'^2)^{1/2} , \quad dS' = r' dr' d\varphi'$$

$$\mathbf{J}_S \times \mathbf{R} = n I (-\sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y) \times (-r' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x - r' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z)$$

$$= n I (z \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + z \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + r' \hat{\mathbf{a}}_z)$$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + z \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + r' \hat{\mathbf{a}}_z}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi'$$

مؤلفه‌های $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ میدان مغناطیسی $B(0,0,z)$ به ترتیب شامل $\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = 0$ و $\int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0$ هستند و در نتیجه صفرند. بنابراین:

$$B(0,0,z) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \left[\underbrace{\int_0^a \frac{r'^2 dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}}_{=K_1} \int_0^{2\pi} d\varphi' \right] \hat{a}_z$$

$$K_1 = \left[-\frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} + \ln \left(r' + (z^2 + r'^2)^{1/2} \right) \right]_0^a$$

پس از خلاصه نمودن، داریم:

$$B(0,0,z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\ln \frac{a + \sqrt{z^2 + a^2}}{|z|} - \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \hat{a}_z$$

۹. یک جریان سطحی در جهت z و از بخشی از صفحه $y=0$ که بین $x=a$ و $x=-a$ است، می‌گذرد. فرض می‌شود که چگالی جریان سطحی J_S تابع دلخواهی از x باشد. نشان دهید که مؤلفه‌های میدان مغناطیسی B در نقطه $(0, y, 0)$ از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$B_x = -\frac{\mu_0 y}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S dx}{x^2 + y^2}, \quad B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S x dx}{x^2 + y^2}, \quad B_z = 0$$

مؤلفه‌های میدان را برای توزیعهای جریان زیر محاسبه کنید:

الف) $J_S = J_{S_0} \hat{a}_z$

ب) $J_S = J_{S_0} (1 - |x|/a) \hat{a}_z$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_S \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

۹

$$\mathbf{r} = y \hat{\mathbf{a}}_y, \quad \mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{a}}_x + z' \hat{\mathbf{a}}_z, \quad dS' = dx' dz'$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -x' \hat{\mathbf{a}}_x - z' \hat{\mathbf{a}}_z + y \hat{\mathbf{a}}_y, \quad \mathbf{J}_S \hat{\mathbf{a}}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (-x' \hat{\mathbf{a}}_y - y \hat{\mathbf{a}}_x) J_S$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} = (x'^2 + z'^2 + y^2)^{-3/2}$$

$$\mathbf{B}(\cdot, y, \cdot) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x'=-a}^a \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \frac{-(y \hat{\mathbf{a}}_x + x' \hat{\mathbf{a}}_y) J_S}{(x'^2 + z'^2 + y^2)^{3/2}} dx' dz'$$

ابتدا انتگرال گیری را نسبت به z' انجام می دهیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(x'^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{x'^2 + y^2} \left[\frac{z'}{(x'^2 + y^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{x'^2 + y^2}$$

بنابراین:

$$B(\cdot, y, \cdot) = -\frac{\mu \cdot}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{(y \hat{a}_x + x' \hat{a}_y) J_S dx'}{x'^2 + y^2}$$

$$B_x = -\frac{\mu \cdot y}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S dx'}{x'^2 + y^2}, \quad B_y = -\frac{\mu \cdot}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S x' dx'}{x'^2 + y^2}$$

بدیهی است که در عبارات سمت راست B_y و B_x می‌توان به جای x, x' (یا هر حرف دلخواهی) به کار برد.

$$J_S = J_S \hat{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$B_x = -\frac{\mu \cdot y}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S dx'}{x'^2 + y^2} = -\frac{\mu \cdot J_S y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dx'}{x'^2 + y^2} = -\frac{\mu \cdot J_S}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a}{y} \right)$$

چون $\frac{x'}{x'^2 + y^2}$ تابع فردی از x' است، بنابراین:

$$B_y = -\frac{\mu \cdot J_S}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{x' dx'}{x'^2 + y^2} = 0$$

$$J_S = J_S \left(1 - \frac{|x'|}{a} \right) \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

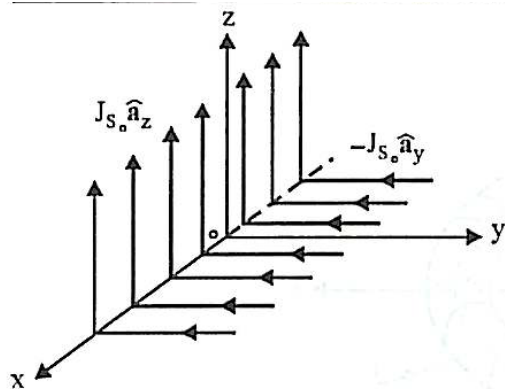
$$B_x = -\frac{\mu \cdot y}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S \left(1 - \frac{|x'|}{a} \right) dx'}{x'^2 + y^2} = -\frac{\mu \cdot y J_S}{\pi} \int_{-a}^a \frac{1 - \frac{x'}{a}}{x'^2 + y^2} dx'$$

$$= -\frac{\mu \cdot J_S y}{\pi} \left[\int_{-a}^a \frac{dx'}{x'^2 + y^2} - \frac{1}{a} \int_{-a}^a \frac{x' dx'}{x'^2 + y^2} \right]$$

$$= -\frac{\mu \cdot J_S y}{\pi} \left[\frac{1}{y} \tan^{-1} \left(\frac{x'}{y} \right) - \frac{1}{a} \frac{1}{2} \ln(x'^2 + y^2) \right]_{-a}^a$$

$$= -\frac{\mu \cdot J_S}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a}{y} \right) - \frac{y}{2a} \ln \left(\frac{a^2 + y^2}{y^2} \right) \right]$$

$$B_y = -\frac{\mu \cdot}{2\pi} \int_{-a}^a \underbrace{\frac{J_S x' \left(1 - \frac{|x'|}{a} \right)}{x'^2 + y^2}}_{\text{تابع فردی از } x'} dx' = 0$$



۱۰. یک جریان سطحی با چگالی توزیع یکنواخت J_{s0} روی دو نیم صفحه $(y=0, z>0)$ و $(z=0, y>0)$ مطابق شکل ۵-۱۹، توزیع شده است. میدان مغناطیسی B حاصل از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا تعیین کنید.

شکل ۵-۱۹

۱۰. ابتدا میدان یکی از نیم صفحه‌ها، مثلاً نیم صفحه $y=0$ و $z>0$ ، را به دست می‌آوریم.

$$B_y = \int_S \frac{\mu_0 J_S \times (r - r')}{4\pi |r - r'|^3} dS'$$

$$J_S = J_{s0} \hat{a}_z, \quad r = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z, \quad r' = x' \hat{a}_x + z' \hat{a}_z, \quad dS' = dx' dz'$$

$$r - r' = (x - x') \hat{a}_x + y \hat{a}_y + (z - z') \hat{a}_z, \quad J_S \times (r - r') = J_{s0} [(x - x') \hat{a}_y - y \hat{a}_x]$$

$$B_y = \frac{\mu_0 J_{s0}}{4\pi} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{z'=0}^{\infty} \frac{(x - x') \hat{a}_y - y \hat{a}_x}{[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dz'$$

$$= \frac{\mu_0 J_{s0}}{4\pi} \left\{ \hat{a}_y \int_{z'=0}^{\infty} dz' \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' \right.$$

$$\left. - y \hat{a}_x \int_{z'=0}^{\infty} dz' \int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{[(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{-(x - x')}{[y^2 + (z - z')^2][(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{y^2 + (z - z')^2}$$

حال،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma dz'}{y^2 + (z-z')^2} = -\gamma \int_z^{-\infty} \frac{dt}{y^2 + t^2} = \frac{\gamma}{|y|} \tan^{-1} \left(\frac{t}{|y|} \right) \Big|_{-\infty}^z$$

$$= \frac{\gamma}{|y|} \left[\tan^{-1} \left(\frac{z}{|y|} \right) + \frac{\pi}{\gamma} \right]$$

$$B_y = -\frac{\mu \cdot J_S}{\gamma \pi} \left[\frac{y}{|y|} \left(\tan^{-1} \left(\frac{z}{|y|} \right) + \frac{\pi}{\gamma} \right) \right] \hat{a}_x$$

با تبدیل z به y ، y به $-z$ و J_S به $-J_S$ - توزیع جریان مربوط به نیم صفحه $y=0$ و $z>0$ به توزیع جریان روی نیم صفحه دیگر واقع در $z=0$ و $y>0$ تبدیل می‌شود. با اِعمال این تبدیل، میدان مغناطیسی حاصل از نیم صفحه دوم برابر است با:

$$B_y = -\frac{\mu \cdot J_S}{\gamma \pi} \left[\frac{z}{|z|} \left(\tan^{-1} \left(\frac{y}{|z|} \right) + \frac{\pi}{\gamma} \right) \right] \hat{a}_x$$

آنگاه میدان کل برابر است با:

$$B = B_y + B_x$$

$$B = -\frac{\mu \cdot J_S}{\gamma \pi} \left[\frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{z}{|z|} + \frac{y}{|y|} \right) + \frac{z}{|z|} \tan^{-1} \left(\frac{y}{|z|} \right) + \frac{y}{|y|} \tan^{-1} \left(\frac{z}{|y|} \right) \right] \hat{a}_x$$

در ربع اول، $y>0$ و $z>0$ است و داریم:

$$B = -\frac{\mu \cdot J_S}{\gamma \pi} \left[\underbrace{\pi + \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right)}_{=\frac{\pi}{\gamma}} \right] \hat{a}_x = -\frac{\gamma}{\gamma} \mu \cdot J_S \cdot \hat{a}_x$$

در ربع‌های دوم و چهارم، $\frac{z}{|z|} + \frac{y}{|y|} = 0$ ، چون $y>0$ و $z<0$ یا $y<0$ و $z>0$ است.

$$\frac{z}{|z|} \tan^{-1} \left(\frac{y}{|z|} \right) + \frac{y}{|y|} \tan^{-1} \left(\frac{z}{|y|} \right) = - \left[\tan^{-1} \left| \frac{y}{z} \right| + \tan^{-1} \left| \frac{z}{y} \right| \right] = -\frac{\pi}{\gamma}$$

$$B = -\frac{\mu \cdot J_S}{\gamma \pi} \left(-\frac{\pi}{\gamma} \right) \hat{a}_x = \frac{1}{\gamma} \mu \cdot J_S \cdot \hat{a}_x$$

در ربع سوم $y<0$ و $z<0$ ، $\frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} = -\gamma$ است، بنابراین:

$$\frac{z}{|z|} \tan^{-1} \left(\frac{y}{|z|} \right) + \frac{y}{|y|} \tan^{-1} \left(\frac{z}{|y|} \right) = \tan^{-1} \left| \frac{y}{z} \right| + \tan^{-1} \left| \frac{z}{y} \right| = \frac{\pi}{\gamma}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 J_S}{2\pi} \left(-2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{1}{4} \mu_0 J_S \hat{\mathbf{a}}_x$$

به طور خلاصه:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (-3\mu_0 J_S / 4) \hat{\mathbf{a}}_x & y > 0, z > 0, \text{ (ربع اول)} \\ (\mu_0 J_S / 4) \hat{\mathbf{a}}_x & \text{ربع های دوم، سوم و چهارم، سایر نواحی} \end{cases}$$

۱۱. جریان I از یک سیم هادی مستقیم که هم محور با z در نظر گرفته می شود می گذرد. جریان I به طور یکنواخت در سطح مقطع سیم، که مستطیلی شکل و به ابعاد a و b می باشد، توزیع می گردد. میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در مبدأ مختصات محاسبه نمایید. سیم هادی بینهایت طویل فرض می شود.

۱۱. برای این توزیع حجمی جریان می توان نوشت:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{ab} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{a}}_x + y' \hat{\mathbf{a}}_y + z' \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\mathbf{r}'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{-3/2}, \quad \mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{I}{ab} (x' \hat{\mathbf{a}}_y - y' \hat{\mathbf{a}}_x)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi ab} \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \frac{x' \hat{\mathbf{a}}_y - y' \hat{\mathbf{a}}_x}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dx' dy' dz'$$

برای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_x$ میدان اگر ابتدا انتگرال گیری نسبت به y' انجام گیرد، داریم:

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{y' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right)}_{=0; \text{ (چون عبارت زیر انتگرال تابع فردی از } y' \text{ است.)}} dz' dx' = 0.$$

به طور مشابهی می توان نشان داد که $B_y = 0$ است. پس،

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

۱۲. مسئله ۱۱ را برای حالتی که سیم هادی فضای $a \leq r \leq b$ و $0 \leq \varphi \leq \pi$ را در دستگاه مختصات استوانه ای اشغال نماید تکرار کنید.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad ۱۲$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{s} \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad s = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2) \text{ سطح مقطع سیم}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}' = r' \hat{\mathbf{a}}_r + z' \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\mathbf{r}', \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} = (r'^2 + z'^2)^{-3/2}$$

$$\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -J r' \hat{\mathbf{a}}_\phi = -J r' (-\sin \phi' \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \phi' \hat{\mathbf{a}}_y)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2(b^2 - a^2)} \underbrace{\int_{r'=a}^b \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \int_{\phi'=0}^{\pi} \frac{r'(\sin \phi' \hat{\mathbf{a}}_x - \cos \phi' \hat{\mathbf{a}}_y)}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} r' dr' dz' d\phi'}_{= K_1}$$

$$K_1 = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r'^2 dr' dz'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \left(\hat{\mathbf{a}}_x \int_0^\pi \sin \phi' d\phi' - \hat{\mathbf{a}}_y \int_0^\pi \cos \phi' d\phi' \right)$$

$$= 4 \hat{\mathbf{a}}_x \int_a^b r'^2 dr' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}}_{= \frac{z'}{r'^2 \sqrt{r'^2 + z'^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{r'^2}} = 4 \hat{\mathbf{a}}_x \int_a^b dr' = 4(b-a) \hat{\mathbf{a}}_x$$

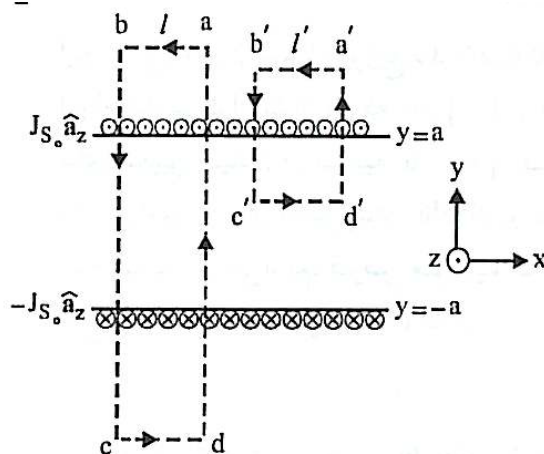
در نتیجه:

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{\pi^2(a+b)} \hat{\mathbf{a}}_x$$

۱۳. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ ناشی از توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات مستطیلی بیان شده‌اند، را به دست آورید:

$$\mathbf{J} = \begin{cases} y \hat{\mathbf{a}}_z & |y| < a \\ \mathbf{0} & |y| > a \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \mathbf{J}_S = \begin{cases} J_{S_0} \hat{\mathbf{a}}_z & y = a \\ -J_{S_0} \hat{\mathbf{a}}_z & y = -a \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{J} = \begin{cases} (a - |y|) \hat{\mathbf{a}}_z & |y| < a \\ \mathbf{0} & |y| > a \end{cases} \quad (\text{ج})$$



۱۳. الف) با توجه به توضیحات پایان بخش ۴-۵، میدان مغناطیسی فقط مؤلفه $\hat{a}_x$ دارد و این مؤلفه فقط تابعی از y می‌تواند باشد. ابتدا میدان را در ناحیه $|y| > a$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسیر بسته $ab c d a$ را در صفحه xy مطابق شکل پ-۵ در نظر می‌گیریم و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

شکل پ-۵
$$\oint_{ab c d a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = (B_{x_1} - B_{x_2}) l = 0$$

در امتدادهای bc و da ، $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 0$ است؛ زیرا $\mathbf{B}$ و $d\mathbf{L}$ بر یکدیگر عمودند. B_{x_1} و B_{x_2} میدان مغناطیسی در نواحی $y > a$ و $y < -a$ هستند. از رابطه بالا، نتیجه می‌گیریم:

$$B_{x_1} = B_{x_2}$$

از این نتیجه چنین استنباط می‌شود که، چون مسیر بسته $ab c d a$ نسبت به صفحه $y=0$ به طور دلخواه نامتقارن است، میدان $\mathbf{B}$ در نواحی $|y| > a$ یکنواخت است. از طرف دیگر، $\mathbf{B}$ یک میدان

سیملوله‌ای است و $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ است. اگر S را صفحه $x=0$ در نظر بگیریم (کره‌ای به شعاع بینهایت)،

برای اینکه شار کل گذرنده از صفحه $x=0$ برابر صفر شود باید $B_{x_1} = B_{x_2} = 0$ باشد. بنابراین:

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad |y| > a$$

برای تعیین میدان در ناحیه $|y| < a$ مسیر بسته $C' = a'b'c'd'a'$ را مطابق شکل پ-۵۰ در نظر می‌گیریم و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

$$\oint_{C'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 (C' \text{ در بر گرفته شده توسط مسیر } C')$$

$$= \int_{a'}^{b'} + \int_{b'}^{c'} + \int_{c'}^{d'} + \int_{d'}^{a'} = \int_{c'}^{d'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = B_x l' = J_S l'$$

در امتدادهای $b'c'$ و $d'a'$ ، $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 0$ و در امتداد $a'b'$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ است. بنابراین:

$$B_x = J_S \mu_0$$

به طور خلاصه:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} J_S \mu_0 \hat{\mathbf{a}}_x & |y| < a \\ \mathbf{0} & |y| > a \end{cases}$$

(ب) در این حالت نیز میدان فقط مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_x$ داشته و این مؤلفه فقط تابعی از y است، یعنی

$$\mathbf{B} = B_x(y) \hat{\mathbf{a}}_x$$

این توزیع جریان همانند توزیع بند (الف) تابع فردی از y است و به همان ترتیبی که در بند (الف)

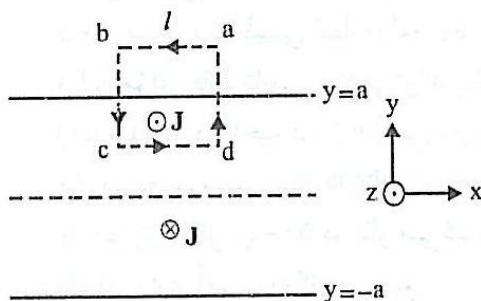
انجام شد می‌توان نشان داد که $\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad |y| > a$.

برای تعیین میدان در ناحیه $|y| < a$ قانون

مداری آمپر را روی مسیر بسته $abcd$ در شکل

پ-۵۱ به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم فاصله

ضلع cd از محور x برابر y باشد، آنگاه:



شکل پ-۵۱

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I; \quad I = \text{جریان در بر گرفته شده توسط مسیر } abcd$$

$$= \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = B_x l$$

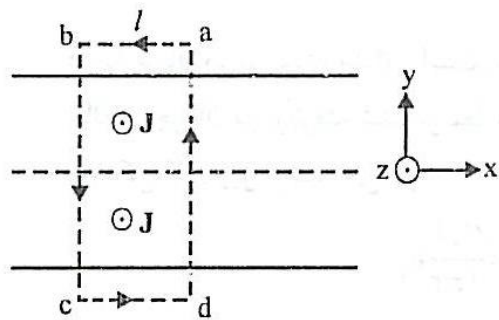
در امتدادهای bc و da ، $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 0$ و در امتداد ab ، میدان $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ است.

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int y \, dx \, dy = \int_y^a y \, dy \int_0^l dx = l(a^2 - y^2)/2$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} (a^2 - y^2)$$

به طور خلاصه:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} (a^2 - y^2) \hat{\mathbf{a}}_x & |y| < a \\ \mathbf{0} & |y| > a \end{cases}$$



شکل پ-۵۲

ج) مسیر بسته abcd را که نسبت به صفحه $y=0$ متقارن است مطابق شکل پ-۵۲ در نظر می‌گیریم. میدان در ناحیه $y > 0$ در جهت $-\hat{a}_x$ و در ناحیه $y < 0$ در جهت $\hat{a}_x$ است. بدیهی است که اندازه میدان روی اضلاع ab و cd یکسان است. با به کار بردن قانون مداری امپر داریم:

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I, \quad I = abcd \text{ مسیر بسته}$$

$$= \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = \int_{x_a}^{x_b} (-B_x \hat{a}_x) \cdot (dx \hat{a}_x) + \int_{x_c}^{x_d} (B_x \hat{a}_x) \cdot (dx \hat{a}_x) = 2l B_x$$

در امتدادهای bc و da، $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 0$ است.

$$I = \begin{cases} 2 \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (a-y) dy = a^2 l & |y| > a \\ 2 \int_{-a}^a dx \int_{-y}^y (a-y) dy = 2l \left(ay - \frac{y^2}{2} \right) & |y| < a \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 a^2 \hat{a}_x & y > a \\ -\mu_0 \left(ay - \frac{1}{2} y^2 \right) \hat{a}_x & 0 < y < a \end{cases}$$

با توجه به اینکه میدان در ناحیه $y < 0$ برابر منهای میدان در ناحیه $y > 0$ است، به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 a^2 \frac{y}{|y|} \hat{a}_x & |y| > a \\ -\mu_0 \left(ay - \frac{y^2}{2|y|} \right) \hat{a}_x & |y| < a \end{cases}$$

(۱۴) مسئله ۱۳ را برای توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، تکرار نمایید:

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z & 0 < r < a \\ -\frac{I}{\pi (c^2 - b^2)} \hat{a}_z & b < r < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \mathbf{J}_s = \begin{cases} J_s \hat{a}_z & r = a \\ -J_s \frac{a}{b} \hat{a}_z & r = b \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_s (r/a)^n \hat{a}_z & n \geq 1, \quad 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۱۴. با توجه به اینکه توزیع جریان فقط تابعی از r بوده و در جهت $\hat{a}_z$ است، میدان مغناطیسی حاصل (در هر سه بند) فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است و این مؤلفه فقط تابعی از r است، یعنی $B(r) = B_\varphi(r) \hat{a}_\varphi$. در به کار بردن قانون مداری آمپر بسته را دایره‌ای به شعاع r در نظر گرفته که مرکز آن منطبق بر محور z بوده و در صفحه‌ای عمود بر این محور باشد. به این ترتیب،

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C (B_\varphi \hat{a}_\varphi) \cdot (r d\varphi \hat{a}_\varphi) = \int_0^{2\pi} r B_\varphi d\varphi = r B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r B_\varphi$$

که C همان مسیر بسته مذکور است. سمت راست رابطه قانون مداری آمپر $\mu_0 I$ است که I مقدار خالص جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته C است. بنابراین، در این مسئله میدان مغناطیسی به شکل کلی زیر نوشته می‌شود:

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

حال برای هر بند مقدار I را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$I = \int_C \mathbf{J}_S \cdot d\mathbf{L} = \int_C (J_z \hat{a}_z) \cdot (r d\varphi \hat{a}_z) = \begin{cases} 2J_S \pi a & a < r < b \\ 0 & r < a, r > b \end{cases} \quad (\text{الف})$$

توجه کنید که برای $r < a$ ، مسیر بسته C هیچ مقدار جریانی را در بر نمی‌گیرد و برای $r > b$ مقدار خالص جریان در برگرفته شده صفر است، زیرا $J_S \cdot \left(\frac{a}{b}\right) (2\pi b) = 0$. در نتیجه میدان مغناطیسی B برابر است با:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 J_S \left(\frac{a}{r}\right) \hat{a}_\varphi & a < r < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} dr d\varphi \hat{\mathbf{a}}_z = \int_r \int_0^{2\pi} J_z r dr d\varphi = 2\pi \int_r J_z r dr \quad (\text{ب})$$

$$I = \begin{cases} 2\pi (I/\pi a^2) \int_0^r r dr = I \left(\frac{r}{a}\right)^2 & 0 < r < a \\ 2\pi (I/\pi a^2) \int_0^a r dr = I & a < r < b \\ I - [2\pi I/(c^2 - b^2)] \int_b^r r dr = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

بنابراین میدان مغناطیسی برابر است با:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{\mathbf{a}}_\varphi & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi & a \leq r \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\mathbf{a}}_\varphi & b \leq r \leq c \\ 0 & r \geq c \end{cases}$$

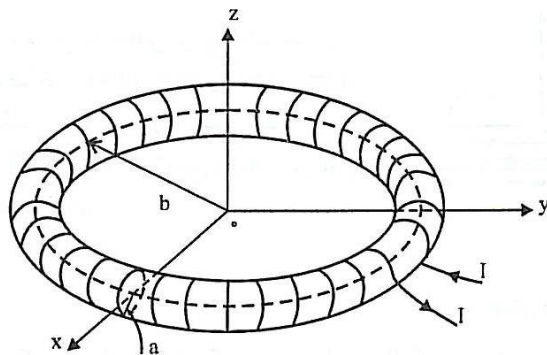
$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \mathbf{r} dr d\varphi \hat{\mathbf{a}}_z = 2\pi \int_r J_z r dr \quad (\text{ج})$$

$$I = \begin{cases} 2\pi \int_0^r J \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^n r dr = 2\pi J \cdot \left(\frac{r^{n+1}}{n+1}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^n & 0 < r < a \\ 2\pi \int_0^a J \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^n r dr = 2\pi J \cdot \left(\frac{a^{n+1}}{n+1}\right) & r > a \end{cases}$$

آنگاه:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J \cdot a}{n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \hat{\mathbf{a}}_\varphi & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\mu_0 J \cdot a}{n+1} \left(\frac{a}{r}\right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi & r \geq a \end{cases}$$

۱۵. یک چنبره با سطح مقطع دایره‌ای شکل از دوران دایره‌ای واقع در صفحه xy ، با شعاع a و به مرکز $(b, 0, 0)$ حول محور z به وجود می‌آید ($a < b$). یک رشته سیم نازک حامل جریان I به طور پیوسته و یکنواخت به دور چنبره پیچیده می‌شود. تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول و در امتداد محیط متوسط چنبره برابر n فرض می‌شود. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در درون و بیرون چنبره به دست آورید. شکل ۵-۲۰ ابعاد چنبره و سیم پیچ آن را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۲۰

۱۵. به دلیل تقارن توزیع جریان نسبت به φ ، توزیع جریان و میدان مغناطیسی حاصل از آن مستقل از φ هستند. بنابراین، ضمن محاسبه میدان $\mathbf{B}$ ، برای φ می‌توان هر مقدار دلخواهی در نظر گرفت بدون اینکه به عمومیت مسئله لطمه‌ای وارد آید. در اینجا $\varphi = \pi/2$ را انتخاب می‌کنیم. اگر میدان مغناطیسی حاصل از دو عنصر جریان که نسبت به صفحه $\varphi = \pi/2$ متقارن باشند را در نظر بگیریم، این میدان بر صفحه $\varphi = \pi/2$ عمود بوده و به عبارت دیگر فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد. در نتیجه میدان مغناطیسی چنبره نیز فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد. حال یک مسیر دایره‌ای بسته در نظر می‌گیریم به طوری که شعاع آن برابر r و مرکزش منطبق بر محور z باشد و در صفحه‌ای عمود بر محور z قرار گیرد. با نوشتن قانون مداری آمپر برای این مسیر بسته داریم:

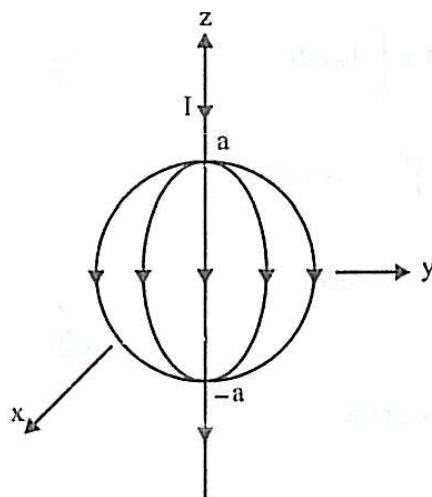
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = B_\varphi (\pi r) = \mu \cdot I_1$$

که C مسیر بسته مذکور و I_1 جریان در برگرفته شده توسط مسیر C است. بدیهی است که اگر مسیر C در بیرون چنبره واقع باشد، مقدار خالص جریان در برگرفته شده توسط آن صفر است و بنابراین میدان مغناطیسی در بیرون چنبره نیز صفر خواهد بود. اما، اگر مسیر بسته C در درون چنبره قرار گیرد، جریان در برگرفته شده توسط آن برابر $I_1 = 2\pi b n I$ است. بنابراین در درون و بیرون چنبره داریم:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n I \left(\frac{b}{r}\right) \hat{a}_\varphi & \text{درون چنبره} \\ 0 & \text{بیرون چنبره} \end{cases}$$

باید توجه داشت که نتایج به دست آمده با رعایت این فرض بوده است که توزیع جریان به شکل یک جریان سطحی روی بدنه چنبره که فاقد مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ باشد در نظر گرفته شود. این فرض تا وقتی که تعداد دورهای سیم پیچ زیاد باشد معقول است و نتایج با تقریب خوبی میدان را به دست می دهند.

۱۶. جریان I از یک رشته سیم در امتداد محور z از $z = +\infty$ تا $z = a$ گذشته و سپس از طریق یک سطح کروی به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات به نقطه $z = -a$ رسیده و در امتداد یک رشته سیم از $z = -a$ تا $z = -\infty$ ادامه می یابد. چگالی جریان روی سطح کروی از رابطه $J_s = (I/2\pi a \sin \theta) \hat{a}_\theta$ به دست می آید. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی B را در درون و بیرون کره به شعاع a محاسبه نمایید.



شکل پ-۵۳

۱۶. در مثال ۱-۵ نشان داده شده است که میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان در امتداد محور z فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است. از این رو، میدان مغناطیسی حاصل از دو قسمت جریان که در نواحی $a < z < \infty$ و $-\infty < z < -a$ روی محور z قرار دارند فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است. حال میدان مغناطیس ناشی از بخش کروی جریان را مورد بررسی قرار می دهیم (شکل پ-۵۳). واضح است که این بخش از توزیع جریان تابعی از φ نیست، بنابراین میدان حاصل از آن نیز مستقل از φ است. به علاوه اگر دو عنصر جریان که نسبت به یک صفحه ثابت $\varphi = \varphi_0$ (مثلاً

$\varphi = \pi/2$) متقارند را در نظر بگیریم، میدان مغناطیسی حاصل از آنها فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد. پس به طور خلاصه، کل توزیع جریان فقط مؤلفه B_φ ایجاد می کند و این مؤلفه خود تابعی از φ نیست. حال قانون مداری آمپر را برای یک مسیر دایره ای به شعاع r مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه ای عمود بر محور z به کار می بریم،

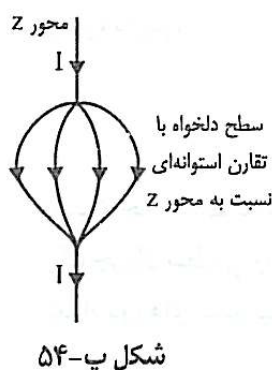
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I_1 = B_\varphi (2\pi r)$$

که C مسیر بسته دایره‌ای مذکور و I_1 جریان در برگرفته شده توسط آن است. اگر این دایره در درون محفظه کروی باشد ($r_s < a$) جریان در برگرفته شده توسط آن صفر است و اگر در بیرون آن باشد ($r_s > a$) این جریان برابر $-I$ است. بنابراین:

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} 0 & r_s < a \\ -\mu_0 I & r_s > a \end{cases}$$

(r_s) مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی و r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای است. به طور خلاصه:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} 0 & r_s < a, \text{ درون کره به شعاع } a \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi & r_s > a, \text{ بیرون کره به شعاع } a \end{cases}$$



جالب است که نتیجه مزبور در حقیقت بستگی به شکل سطحی که جریان در بخشی از مسیر خود روی آن توزیع می‌شود ندارد، بلکه فقط کافی است که سطح توزیع جریان دارای تقارن استوانه‌ای نسبت به محور Z باشد، به طوری که توزیع جریان تابع φ نباشد. به عنوان مثال، اگر به جای یک سطح کروی، سطحی مطابق شکل پ-۵۴ داشته باشیم، میدان مغناطیسی در درون این سطح صفر و در بیرون آن همانند میدان یک خط بینهایت جریان است.

بالاخره اگر در امتداد مسیر جریان تعداد دلخواهی از این گونه سطوح قرار گیرند، میدان در درون تمامی این سطوح صفر و در بیرون آنها همانند میدان یک خط بینهایت طولی جریان، $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{a}_\varphi$ است.

۱۷. برای هر یک از میدانهای مغناطیسی داده شده در زیر چگالی توزیع جریان مولد میدان را به دست آورید:

(الف) در دستگاه مختصات مستطیلی: (ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 J_s r^2 \hat{a}_\varphi & 0 < r < a \\ \mu_0 J_s \frac{a^2}{r} \hat{a}_\varphi & a < r < b \\ 0 & b < r < +\infty \end{cases} \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 J_s \hat{a}_x & -\infty < y < 0 \\ \frac{1}{3} \mu_0 J_s \hat{a}_x & 0 < y < a \\ -\mu_0 J_s \hat{a}_x & a < y < +\infty \end{cases}$$

(ج) در دستگاه مختصات کروی:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 J_s (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) & 0 < r < a \\ \frac{1}{3} \mu_0 J_s \left(\frac{a}{r}\right)^2 (\sqrt{3} \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) & a < r < +\infty \end{cases}$$

۱۷. الف) با استفاده از توابع پله، مؤلفه B_x را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$B = B_x \hat{a}_x$$

$$B_x = \mu_0 J_{S_0} \left[\left(1 - \frac{y}{a} \right) u(y) - \frac{y}{a} u(y-a) \right]$$

$$J = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_x}{dy} \hat{a}_z = -J_{S_0} \left[-\frac{1}{a} \delta(y) - \frac{1}{a} \delta(y-a) \right] \hat{a}_z$$

$$J = J_{S_0} \left[\frac{1}{a} \delta(y) + \frac{1}{a} \delta(y-a) \right] \hat{a}_z$$

این توزیع حجمی جریان، به دلیل وجود توابع ضربه یک بُعدی در آن، در حقیقت یک توزیع سطحی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$J_S = \begin{cases} \frac{1}{a} J_{S_0} \hat{a}_z & y=0 \\ \frac{1}{a} J_{S_0} \hat{a}_z & y=a \end{cases}$$

$$B = B_\phi(r) \hat{a}_\phi \quad (\text{ب})$$

$$B_\phi(r) = \mu_0 J_0 \left[r \left[u(r) - u(r-a) \right] + \frac{a^2}{r} \left[u(r-a) - u(r-b) \right] \right]$$

$$J = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\phi) \hat{a}_z$$

$$J = \frac{J_0}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left[u(r) - u(r-a) \right] + a^2 \left[u(r-a) - u(r-b) \right] \right] \hat{a}_z$$

$$= \frac{J_0}{r} \left[2r \left[u(r) - u(r-a) \right] + r^2 \left[\delta(r) - \delta(r-a) \right] + a^2 \left[\delta(r-a) - \delta(r-b) \right] \right] \hat{a}_z$$

$$J = J_0 \left[2r \left[u(r) - u(r-a) \right] - \frac{a^2}{b} \delta(r-b) \right] \hat{a}_z = J_1 + J_2$$

که در آن،

$$J_1 = 2J_0 r \left[u(r) - u(r-a) \right] \hat{a}_z, \quad J_2 = -J_0 \frac{a^2}{b} \delta(r-b) \hat{a}_z$$

J_1 خود یک توزیع حجمی جریان است و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$J_1 = \begin{cases} 2J_0 r \hat{a}_z & 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

اما J_φ یک توزیع سطحی جریان است و می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$J_\varphi \rightarrow J_{S_\varphi} = -J_s \frac{a^\varphi}{b} \hat{a}_z, \quad r=b$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_s} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_s r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_\varphi \quad (\text{ج})$$

چون $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ و $\mathbf{B} = B_r \hat{a}_r + B_\theta \hat{a}_\theta$ ، داریم:

$$r B_\theta = \begin{cases} -\mu_s J_{S_\varphi} r \sin \theta & 0 < r < a \\ \frac{1}{\varphi} \mu_s J_{S_\varphi} \frac{a^\varphi}{r^\varphi} \sin \theta & r > a \end{cases}$$

$$r B_\theta = -\mu_s J_{S_\varphi} r \sin \theta [u(r) - u(r-a)] + \frac{1}{\varphi} \mu_s J_{S_\varphi} \frac{a^\varphi}{r^\varphi} \sin \theta u(r-a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) = -\mu_s J_{S_\varphi} \sin \theta [u(r) - u(r-a)] - \mu_s J_{S_\varphi} r \sin \theta [\delta(r) - \delta(r-a)]$$

$$+ \frac{1}{\varphi} \mu_s J_{S_\varphi} \frac{a^\varphi}{r^\varphi} \sin \theta \delta(r-a) - \mu_s J_{S_\varphi} \frac{a^\varphi}{r^\varphi} \sin \theta u(r-a)$$

$$= -\mu_s J_{S_\varphi} \sin \theta \left[u(r) + \left(\frac{a^\varphi}{r^\varphi} - 1 \right) u(r-a) \right] + \frac{\varphi a}{\varphi} \mu_s J_{S_\varphi} \sin \theta \delta(r-a)$$

$$B_r = \begin{cases} \mu_s J_{S_\varphi} \cos \theta & 0 < r < a \\ \mu_s J_{S_\varphi} \left(\frac{a}{r} \right)^\varphi \cos \theta & r > a \end{cases}$$

$$B_r = \mu_s J_{S_\varphi} \cos \theta \left[u(r) - u(r-a) + \left(\frac{a}{r} \right)^\varphi u(r-a) \right]$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial \theta} = -\mu_s J_{S_\varphi} \sin \theta \left[u(r) + \left(\frac{a^\varphi}{r^\varphi} - 1 \right) u(r-a) \right]$$

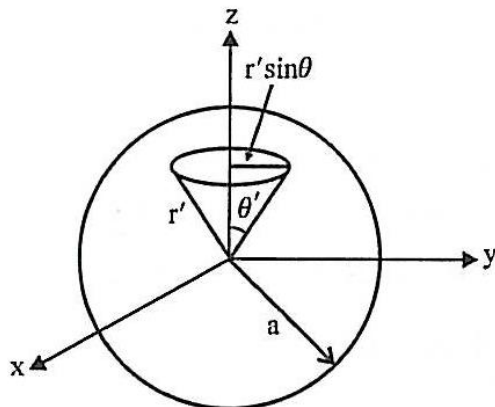
$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_s r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_\varphi = \left(\frac{\mu_s}{\mu_s r} \right) \left(\frac{\varphi a}{\varphi} \right) J_{S_\varphi} \sin \theta \delta(r-a) \hat{a}_\varphi$$

$$= \frac{\varphi}{\varphi} J_{S_\varphi} \sin \theta \delta(r-a) \hat{a}_\varphi$$

این توزیع جریان را می توان به صورت یک توزیع سطحی بیان داشت به طوری که:

$$J_S = \frac{\varphi}{\varphi} J_{S_\varphi} \sin \theta \hat{a}_\varphi, \quad r=a$$

۱۸. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ در یک فضای کروی به شعاع a توزیع شده است. این کره بار با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z و در جهت φ می‌چرخد. پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از این بار کروی چرخنده را در فواصل دور از مرکز کره محاسبه نمایید. مرکز کره را منطبق بر مبدأ مختصات فرض کنید.



شکل پ-۵۵

۱۸. یک حلقه بار الکتریکی به سطح مقطع $dS' = r' d\theta' dr'$ و شعاع $r' \sin \theta'$ مطابق شکل پ-۵۵ در نظر می‌گیریم. مقدار بار موجود در این حلقه برابر است با:

$$dq = \rho \cdot (2\pi r' \sin \theta') (r' dr' d\theta')$$

اگر کره بار با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z بچرخد، بار dq در هر ثانیه به تعداد $f = \frac{\omega}{2\pi}$ بار از سطح مقطع حلقه، (dS') عبور می‌کند. بنابراین، جریان حلقه که همان بار الکتریکی عبور نموده از سطح مقطع حلقه در یک ثانیه است عبارت است از:

$$dI = f \cdot dq = \rho \cdot \omega \cdot r'^2 \sin \theta' dr' d\theta'$$

گشتاور مغناطیسی حاصل از این حلقه جریان برابر است با:

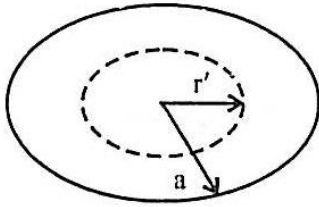
$$d\mathbf{M} = (dI \times \text{سطح حلقه}) \hat{\mathbf{a}}_z = \rho \cdot \omega \cdot \pi r'^4 \sin^2 \theta' dr' d\theta' \hat{\mathbf{a}}_z$$

پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از این حلقه با توجه به رابطه ۵-۶۹ عبارت است از:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu \cdot d\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu \cdot \omega \cdot \rho}{4\pi r^2} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi r'^4 \sin^2 \theta' dr' d\theta'$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi r^2} \mu \cdot \omega \cdot \rho \cdot \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi \int_0^a r'^4 dr' \int_0^\pi \sin^3 \theta' d\theta' = \frac{\mu \cdot \omega \cdot \rho \cdot a^5 \sin \theta}{15\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

۱۹. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_s روی سطح یک دیسک به شعاع a توزیع شده است. این دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور خود می‌چرخد. نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز دیسک از رابطه $B = \mu \cdot \rho_s \cdot \omega \cdot a/2$ به دست می‌آید.



شکل پ-۵۶

۱۹. اگر حلقه‌ای از این دیسک بار الکتریکی به شعاع r' و به ضخامت dr' را در نظر بگیریم (شکل پ-۵۶)، مقدار بار موجود در این حلقه برابر $dq = \rho_s (2\pi r') dr'$ است. اگر دیسک با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، حلقه مزبور به منزله جریانی به میزان

$dI = f \cdot dq$ خواهد بود که $f = \frac{\omega}{2\pi}$ است. میدان حاصل از این

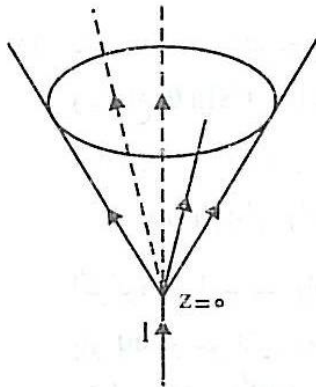
حلقه جریان در مرکز حلقه در امتداد محور دیسک بوده و مقدار آن با توجه به نتیجه مسئله ۳

خودآزمایی برابر $dB = \frac{\mu_0 dI}{2r'} \hat{a}_z$ است (دقت شود که میدان یک حلقه در مرکز آن، دو برابر میدان

نیم حلقه است). میدان کل حاصل از تمامی دیسک برابر است با:

$$B = \int dB = \int_0^a \frac{1}{2} \mu_0 \rho_s \omega \cdot dr' \hat{a}_z = \left(\frac{1}{2} \mu_0 \rho_s \omega \cdot a \right) \hat{a}_z$$

۲۰. جریان I از یک رشته سیم در امتداد محور z از $z = -\infty$ تا $z = 0$ گذشته و سپس روی یک سطح مخروطی با نیم‌زاویه θ_0 و محوری منطبق بر نیمه مثبت محور z به طور متقارن و شعاعی توزیع می‌گردد. میدان مغناطیسی B ناشی از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا تعیین نمایید.



شکل پ-۵۷

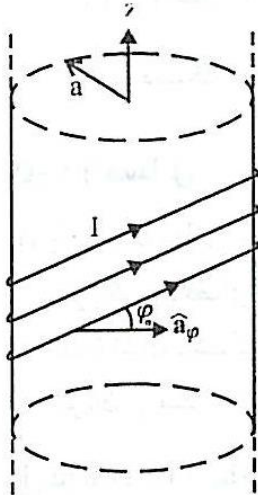
۲۰. این مسئله با مسئله خودآزمایی ۱۶ ماهیتاً تفاوتی ندارد. پس، با توجه به شکل پ-۵۷ و توضیحاتی که در مسئله مزبور داده شد، داریم:

$$B = B_\phi(r) \hat{a}_\phi$$

یک مسیر بسته دایره‌ای به شعاع r ، مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه $z = z_0$ (مقدار ثابتی است) را در نظر گرفته و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

$$\oint_C B \cdot dL = \mu_0 I$$

$$(B_\phi)(2\pi r) = \begin{cases} \mu_0 I & \theta_0 < \theta < \pi \\ 0 & 0 < \theta < \theta_0 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi & \theta_0 < \theta < \pi \\ 0 & 0 \leq \theta < \theta_0 \end{cases}$$



شکل ۵-۲۱

۲۱. شکل ۵-۲۱ یک سیملوله با سیمپیچ مایل را نشان می‌دهد. زاویه بین سیمپیچ و بردار واحد $\hat{a}_\phi$ روی سطح سیملوله برابر φ_0 می‌باشد. جریان گذرنده از سیمپیچ سیملوله برابر I ، شعاع سیملوله برابر a و تعداد دورهای سیمپیچ در واحد طول سیملوله برابر n فرض می‌شود. میدان مغناطیسی B را در کلیه نقاط فضا محاسبه کنید.

۲۱. این سیملوله را می‌توان با یک جریان سطحی به صورت $\vec{J}_S = J_{S\phi} \hat{a}_\phi + J_{Sz} \hat{a}_z$ بیان کرد. روشن است که $J_{S\phi} = J \cos \varphi_0$ و $J_{Sz} = J \sin \varphi_0$ که $J_S = \frac{nI}{\cos \varphi_0}$. میدان حاصل از $J_{S\phi}$ را طی مثال ۵-۶ مطالعه نموده‌ایم. این میدان برابر است با:

$$\vec{B}_\parallel = \begin{cases} 0 & r > a \\ \mu_0 n I \hat{a}_z & r < a \end{cases}$$

میدان حاصل از J_{Sz} ، که به صورت $\vec{B}_\perp = B_{\phi} \hat{a}_\phi$ بیان می‌شود، به سادگی با استفاده از قانون مداری آمپر به دست می‌آید. نتیجه عبارت است از:

$$\vec{B}_\perp = \begin{cases} 0 & r < a \\ \mu_0 n I \tan \varphi_0 \left(\frac{a}{r} \right) \hat{a}_\phi & r > a \end{cases}$$

سرانجام، میدان کل برابر است با:

$$\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{a}_z & r < a \\ \mu_0 n I \tan \varphi_0 \left(\frac{a}{r} \right) \hat{a}_\phi & r > a \end{cases}$$

۲۲. پتانسیل مغناطیسی برداری A را برای توزیعهای جریان در مسائل ۱۳-الف و ۱۴-الف به دست آورید. پس از یافتن A میدان مغناطیسی B را به دست آورید. درستی نتایج به دست آمده برای B را، با مقایسه آنها با نتایج به دست آمده براساس قانون مداری آمپر، تحقیق کنید.

۳۲. ابتدا پتانسیل مغناطیسی برداری A را برای یک صفحه بینهایت جریان که به صورت $J_S = J_S \hat{a}_z$, $y = y_0$ بیان می‌شود محاسبه می‌کنیم. برای سادگی پتانسیل A را در $y = 0$ برابر صفر فرض می‌کنیم. به عبارت دیگر $y = 0$ را به منزله مبنا اختیار می‌کنیم.

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_S dS'}{R}$$

$$A(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \hat{a}_z \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y_0)^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y_0^2 + (z-z')^2}} \right\} dx' dz'$$

با جایگزینی متغیرهای $x_1 = x - x'$ و $z_1 = z - z'$ ، انتگرال دو گانه بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2 + y_0^2}} \right] dx_1 dz_1 \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2 + y_0^2}} \right] dx_1 dz_1 \\ &= 4 \int_0^{\infty} \left[\ln \left(\sqrt{x_1^2 + z_1^2 + (y-y_0)^2} + z_1 \right) - \ln \left(\sqrt{x_1^2 + z_1^2 + y_0^2} + z_1 \right) \right] dx_1 \\ &= -4 \int_0^{\infty} [\ln(x_1^2 + (y-y_0)^2) - \ln(x_1^2 + y_0^2)] dx_1 \\ &= -4 \left\{ x_1 \ln[x_1^2 + (y-y_0)^2] - 2x_1 + 2|y-y_0| \tan^{-1} \frac{x_1}{|y-y_0|} \right. \\ &\quad \left. - x_1 \ln(x_1^2 + y_0^2) + 2x_1 - 2|y_0| \tan^{-1} \frac{x_1}{|y_0|} \right\} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$= -\gamma \left\{ x_1 \ln \left[\frac{x_1^2 + (y - y_1)^2}{x_1^2 + y_1^2} \right] + \gamma |y - y_1| \tan^{-1} \frac{x_1}{|y - y_1|} - \gamma |y_1| \tan^{-1} \frac{x_1}{|y_1|} \right\}^{\infty}$$

$$= -\gamma \pi (|y - y_1| - |y_1|) = \begin{cases} \gamma \pi (\gamma y_1 - y) & y > y_1 \\ \gamma \pi y & y < y_1 \end{cases}$$

سرانجام:

$$A_z(r) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \mu \cdot J_{S_1} (\gamma y_1 - y) \hat{a}_z & y > y_1 \\ \frac{1}{\gamma} \mu \cdot J_{S_1} y \hat{a}_z & y < y_1 \end{cases}$$

در نتیجه مزبور فرض شده است که $y_1 > 0$ باشد. در صورتی که صفحه جریان در $y = -y_1$ واقع باشد، داریم:

$$A_1(r) = -\frac{1}{\gamma} \mu \cdot J_{S_1} (|y + y_1| - |y_1|)$$

$$A_1(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma} \mu \cdot J_{S_1} y \hat{a}_z & y > -y_1 \\ \frac{1}{\gamma} \mu \cdot J_{S_1} (y + \gamma y_1) \hat{a}_z & y < -y_1 \end{cases}$$

حال برای مسئله خودآزمایی ۱۳-الف داریم:

$$J_S = \begin{cases} J_{S_1} \hat{a}_z & y = a \\ -J_{S_1} \hat{a}_z & y = -a \end{cases}$$

با توجه به نتایج به دست آمده در بالا، داریم:

$$A(r) = A_z(r) \Big|_{y_1=a} - A_1(r) \Big|_{y_1=a}$$

$$A(r) = \begin{cases} \mu \cdot J_{S_1} a \hat{a}_z & y > a \\ \mu \cdot J_{S_1} y \hat{a}_z & -a < y < a \\ -\mu \cdot J_{S_1} a \hat{a}_z & y < -a \end{cases}$$

$$B = \nabla \times A = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x \Rightarrow B = \begin{cases} 0 & |y| > a \\ \mu \cdot J_{S_1} \hat{a}_x & |y| < a \end{cases}$$

برای مسئله خودآزمایی ۱۴-الف، ابتدا پتانسیل مغناطیسی برداری A را برای یک توزیع جریان روی سطح استوانه‌ای به طول بینهایت و شعاع r_0 به دست می‌آوریم. این توزیع جریان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{J}_S = J_{S_0} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad r = r_0$$

برای سادگی پتانسیل A را در $r = 0$ برابر صفر فرض می‌کنیم. به عبارت دیگر $r = 0$ را به منزله مبنا اختیار می‌کنیم.

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_S dS'}{R}$$

$$A(\mathbf{r}) = A_0(r) = \left(\frac{\mu_0 J_{S_0}}{4\pi} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (z - z')^2}} \right] r_0 d\varphi' dz'$$

با جایگزینی متغیر $z_1 = z - z'$ در عبارت زیر انتگرال داریم:

$$\begin{aligned} &= \mu_0 J_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi') + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + z_1^2}} \right] d\varphi' dz_1 \\ &= \mu_0 J_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \left[\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi') + z_1^2} + z_1 \right] - \ln \left[\sqrt{r_0^2 + z_1^2} + z_1 \right] \right\} d\varphi' \\ &= -\mu_0 J_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ln [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi')] - 2 \ln r_0 \right\} d\varphi' \\ &= -\mu_0 J_{S_0} \left\{ \ln \left[\frac{1}{r_0^2} \left(r^2 + r_0^2 + \sqrt{(r^2 + r_0^2)^2 - (2rr_0)^2} \right) \right] - 2 \ln r_0 \right\} \\ &= -\mu_0 J_{S_0} \left\{ \ln \left[\frac{1}{r_0^2} \left(r^2 + r_0^2 + |r^2 - r_0^2| \right) \right] - 2 \ln r_0 \right\} \\ &= \begin{cases} -\mu_0 J_{S_0} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) & r > r_0 \\ 0 & r < r_0 \end{cases} \end{aligned}$$

آنگاه:

$$A_s(r) = \begin{cases} -\mu_s J_{s_0} r \ln\left(\frac{r}{r_s}\right) & r > r_s \\ 0 & r < r_s \end{cases}$$

حال برای توزیع جریان مسأله خودآزمایی ۱۴- الف داریم:

$$J_s = \begin{cases} J_{s_0} \hat{a}_z & r = a \\ -J_{s_0} \frac{a}{b} \hat{a}_z & r = b \end{cases}$$

$$A = A_s \Big|_{\substack{r_s=a \\ J_{s_0}=J_s}} + A_s \Big|_{\substack{r=b \\ J_{s_0} \rightarrow -\frac{a}{b}J_s}}$$

$$A(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -\mu_s J_{s_0} a \ln\left(\frac{r}{a}\right) \hat{a}_z & a < r < b \\ \mu_s J_{s_0} a \ln\left(\frac{a}{b}\right) \hat{a}_z & r > b \end{cases}$$

برای میدان مغناطیسی **B**، داریم:

$$B = \nabla \times A = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{a}_\varphi = -\frac{d A_z}{dr} \hat{a}_\varphi \Rightarrow B(r) = \begin{cases} 0 & r < a, r > b \\ \mu_s J_{s_0} \left(\frac{a}{r}\right) \hat{a}_\varphi & a < r < b \end{cases}$$

۲۳. ضمن مطالعه معادله پواسون برای پتانسیل مغناطیسی برداری **A**، اشاره نمودیم که در دستگاه مختصات مستطیلی مؤلفه‌های لاپلاسین یک بردار برابر لاپلاسین مؤلفه‌های آن بردار هستند. یعنی برای $A = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$ داریم:

$$\nabla^2 A = (\nabla^2 A_x) \hat{a}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{a}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z$$

همچنین تأکید کردیم که این ویژگی برای لاپلاسین یک بردار در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی وجود ندارد. نشان دهید که:

$$\nabla^2 A \neq (\nabla^2 A_r) \hat{a}_r + (\nabla^2 A_\varphi) \hat{a}_\varphi + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z \quad \text{الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:}$$

$$\nabla^2 A \neq (\nabla^2 A_r) \hat{a}_r + (\nabla^2 A_\theta) \hat{a}_\theta + (\nabla^2 A_\varphi) \hat{a}_\varphi \quad \text{ب) در دستگاه مختصات کروی:}$$

۲۳. با استفاده از تعریف لاپلاسین یک بردار که در رابطه ۱-۱۳۵ آمده است می توان نشان داد که در دستگاه مختصات استوانه ای:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$= \left[\nabla^2 A_r - \frac{r}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2} \right] \hat{\mathbf{a}}_r + \left[\nabla^2 A_\varphi + \frac{r}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2} \right] \hat{\mathbf{a}}_\varphi + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{a}}_z$$

به خوبی روشن است که $\nabla^2 \mathbf{A} \neq (\nabla^2 A_r) \hat{\mathbf{a}}_r + (\nabla^2 A_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_\varphi + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{a}}_z$ مگر آنکه $A_\varphi = A_r = 0$ باشد.

در دستگاه مختصات کروی می توان نشان داد که:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$= \left[\nabla^2 A_r - \frac{r}{r^2} \left(A_r + \cot \theta A_\theta + \csc \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \hat{\mathbf{a}}_r +$$

$$\left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(\csc^2 \theta A_\theta - r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + r \cot \theta \csc \theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \hat{\mathbf{a}}_\theta +$$

$$\left[\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(\csc^2 \theta A_\varphi - r \csc \theta \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - r \cot \theta \csc \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

روشن است که،

$$\nabla^2 \mathbf{A} \neq (\nabla^2 A_r) \hat{\mathbf{a}}_r + (\nabla^2 A_\theta) \hat{\mathbf{a}}_\theta + (\nabla^2 A_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

(۲۶) تحقیق کنید کدامیک از میدانهای برداری زیر به عنوان یک میدان مغناطیسی قابل قبول است:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{z} (y \hat{\mathbf{a}}_y - z \hat{\mathbf{a}}_z)$$

(الف) در دستگاه مختصات مستطیلی:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

(ب) در دستگاه مختصات استوانه ای:

$$\mathbf{B}_3 = \left(1 + \frac{r}{r^2} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

(ج) در دستگاه مختصات کروی:

۲۶. کافی است تحقیق شود که آیا $\nabla \cdot \mathbf{B}$ صفر است یا نه. چون میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ یک میدان سیملوله‌ای است، همواره دیورژانس آن برابر صفر است.

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{z}(y \hat{\mathbf{a}}_y - z \hat{\mathbf{a}}_z) \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \nabla \cdot \left(\frac{y}{z} \hat{\mathbf{a}}_y - \hat{\mathbf{a}}_z \right) = \nabla \cdot \left(\frac{y}{z} \hat{\mathbf{a}}_y \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{z} \right) = \frac{1}{z} \neq 0.$$

در نتیجه $\mathbf{B}_1$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول نیست.

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{r^n} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (\text{ب})$$

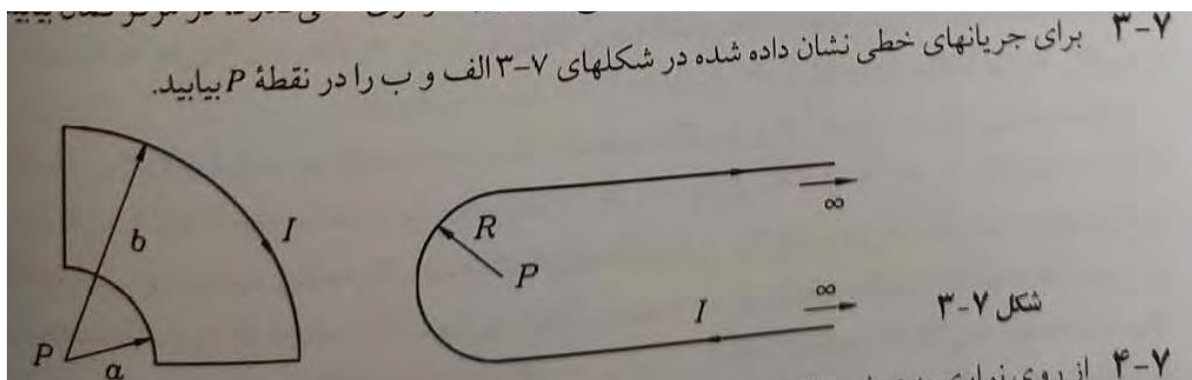
$$\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r^n} \right) = 0.$$

پس میدان $\mathbf{B}_2$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.

$$\mathbf{B}_3 = \left(1 + \frac{2}{r^3} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \left(1 - \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta \quad (\text{ج})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(r^2 + \frac{2}{r} \right) \cos \theta \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(1 - \frac{1}{r^3} \right) \sin^2 \theta \right] = 0.$$

بنابراین میدان $\mathbf{B}_3$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.



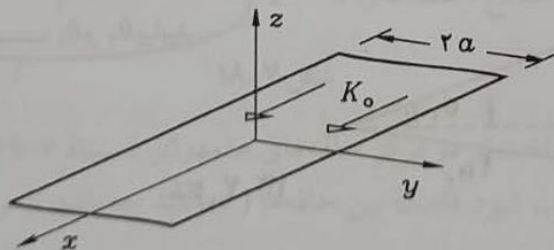
۳-۷ برای جریان شکل ۱-۷ الف از نتایج مسائل ۱-۷ و ۲-۷ استفاده می‌کنیم. $B = B_1 + B_2 + B_3$ که در آن B_1 میدان ناشی از جریان نیم خط بالایی، B_2 میدان ناشی نیم‌دایره، و B_3 میدان ناشی از جریان نیم خط پایینی است. هر سه میدان در جهت عمود بر کاغذ و هم‌راستا هستند، پس

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I \pi}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2 + \pi)$$

برای جریان شکل ۳-۷ ب از نتیجه مسئله ۲-۷ استفاده می‌کنیم. چون دو پاره خط با نقطه مشاهده هم‌راستا هستند، در آن نقطه میدانی ایجاد نمی‌کند و تنها جریان کمانها میدان ایجاد می‌کند

$$B = \frac{\mu_0 I (\pi/2)}{4\pi a} - \frac{\mu_0 I (\pi/2)}{4\pi b} = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

۷-۷ از روی نواری به عرض $2a$ ، واقع در صفحه $z = 0$ جریان سطحی $K_0 \hat{x}$ می‌گذرد. نوار نسبت به محور x متقارن است. مؤلفه z میدان مغناطیسی در نقطه دلخواه P را بر حسب فاصله آن نقطه تا لبه‌های نوار به دست آورید. شکل ۷-۷ وضعیت جریان را نشان می‌دهد.



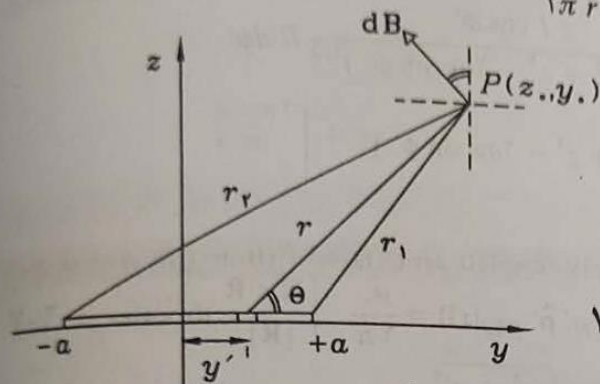
شکل ۷-۷

۷-۷ نوار را به سیمهای نازکی به عرض dy' تقسیم می‌کنیم، جریان هر یک از این نوارها $K \cdot dy'$ و میدان ناشی از هر یک به صورت زیر است

$$dB = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi r} dy'$$

این میدان در شکل ح ۷-۷ نشان داده شده است. با توجه به این شکل مولفه z میدان عبارت است از

$$dB_z = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi r} dy' \cos \theta$$



شکل ح ۷-۷

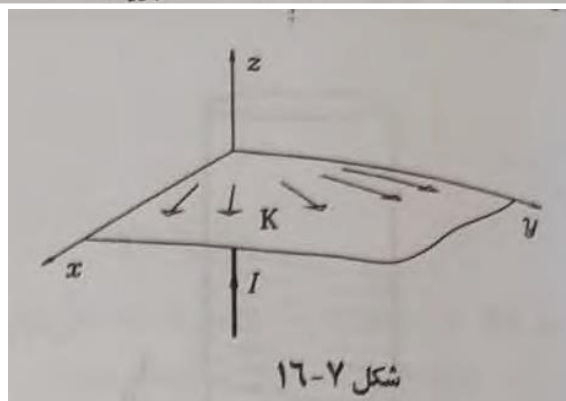
چون $\cos \theta = (y_0 - y') / r$ و $r^2 = (y_0 - y')^2 + z_0^2$ به دست می‌آوریم

$$dB_z = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \frac{(y_0 - y')}{(y_0 - y')^2 + z_0^2} dy'$$

سرانجام

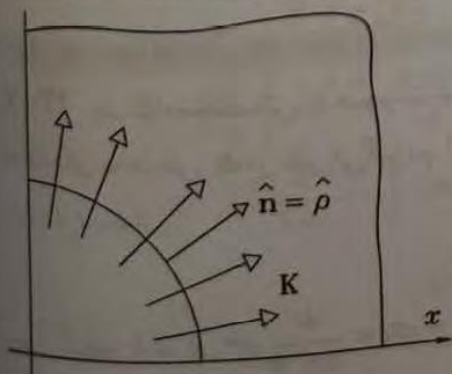
$$\begin{aligned} B_z &= \int_{-a}^a dB_z = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{(y_0 - y')}{(y_0 - y')^2 + z_0^2} dy' \\ &= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[(y_0 - y')^2 + z_0^2 \right] \right\} \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \{ (y_0 + a)^2 + z_0^2 \} - \frac{1}{2} \ln \{ (y_0 - a)^2 + z_0^2 \} \right] \\ &= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \frac{1}{2} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

۱۶-۷ جریان I از سیم نازکی روی بخش منفی محور z ها در جهت مثبت z می‌گذرد و در مبدا روی ربع صفحه $z=0, x \geq 0, y \geq 0$ به صورت شعاعی و یکنواخت پخش می‌شود. چگالی جریان سطحی K را یافته، میدان B را روی بخش مثبت محور z به دست آورید.



شکل ۱۶-۷

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad |\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}| \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad |\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho| \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad |\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q| \quad |\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I| \quad |\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I|$$



۱۶-۷ چون فرض شده که جریان سطحی شعاعی و یکنواخت (مستقل از ϕ) است، $\mathbf{K} = K \hat{\rho}$ که در آن K تنها تابعی از ρ است. جریانی که از ربع دایره نشان داده شده در شکل مقابل می‌گذرد باید برابر I باشد، پس

$$I = \int (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dl = \int_0^{\pi/2} (K \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}) \rho d\phi = K \rho \frac{\pi}{2}$$

که نتیجه می‌دهد $\mathbf{K} = \frac{2I}{\pi \rho} \hat{\rho}$. جریان روی محور z هیچ میدانی روی محور z ایجاد نمی‌کند، پس میدان فقط از جریان سطحی K ناشی می‌شود. در معادله بیوساوار برای جریان سطحی داریم $ds = \rho' d\rho' d\phi'$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + \rho'^2} \quad \text{و} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{\mathbf{z}} - \rho' \hat{\rho}'$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{R} = \frac{2I}{\pi \rho'} \hat{\rho}' \times (z \hat{\mathbf{z}} - \rho' \hat{\rho}') = -\frac{2I}{\pi \rho'} \hat{\phi}' = \frac{2I}{\pi \rho'} (\sin \phi' \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi' \hat{\mathbf{y}})$$

اکنون تمام اجزای معادله بیوساوار را داریم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I z}{2 \pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\sin \phi' \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi' \hat{\mathbf{y}}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} d\rho' d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 I}{2 \pi^2 z} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

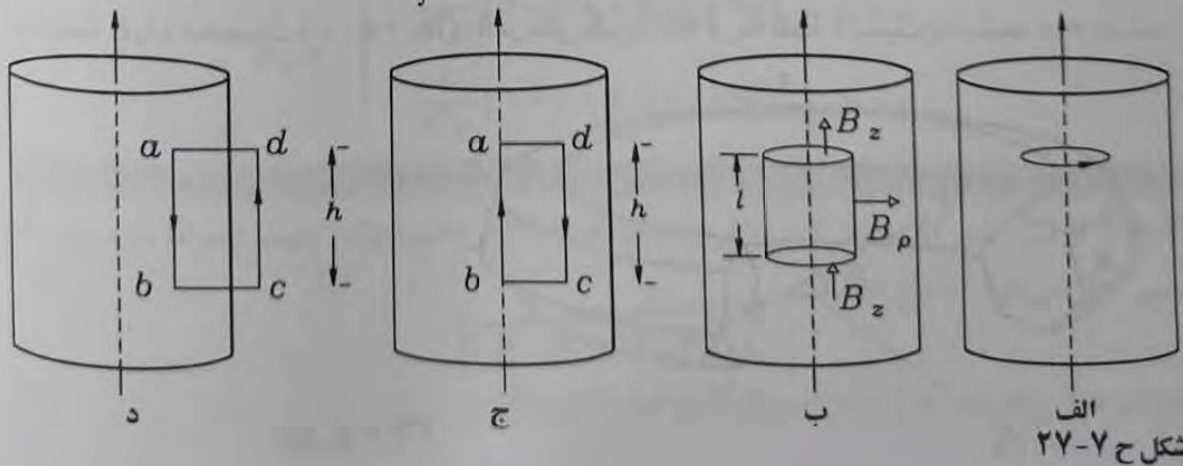
۲۷-۷ ثابت کنید در یک سیملوله بلند (بی‌نهایت) در تمام نقاط داخل سیملوله میدان یکنواخت و در نقاط خارج سیملوله میدان صفرست.

۲۷-۷ ابتدا ثابت می‌کنیم B نمی‌تواند مولفه B_ρ و B_ϕ داشته باشد. تقارن مسئله نشان می‌دهد که اگر چنین مولفه‌هایی وجود داشته باشند باید مقدارشان مستقل از ϕ باشد. مسیر آمپری مطابق شکل ح ۲۷-۷ الف بر می‌گزینیم. داریم $\oint B \cdot dl = 0$ زیرا جریانی از این مسیر نمی‌گذرد (چه مسیر داخل سیملوله باشد و چه خارج آن). با توجه به تقارن مسئله

$$\oint B \cdot dl = 2\pi r B_\phi$$

که در آن شعاع مسیر آمپرست. صفر بودن انتگرال فوق نشان می‌دهد که $B_\phi = 0$. سطح استوانه‌ای نشان داده شده در شکل ح ۲۷-۷ ب را در نظر بگیرید. چون $\oint B \cdot ds = 0$ ، شار خارج شده از این سطح باید صفر باشد. چون مسئله در جهت z تقارن دارد هر شاری از قاعده پایینی وارد استوانه شود از قاعده بالایی آن خارج می‌شود پس $\int B \cdot ds$ روی سطح جانبی باید صفر باشد، و چون

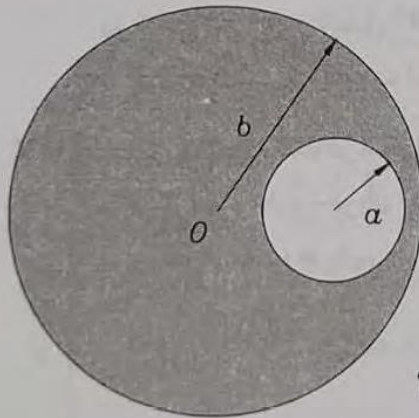
$$\int B \cdot ds = 2\pi r l B_\rho = 0$$



شکل ح ۲۷-۷

پس $B_\rho = 0$. حال صفر بودن $\oint B \cdot dl$ روی مسیر مستطیلی شکل ح ۲۷-۷ ج نشان می‌دهد که $B_z(\rho = 0) - B_z(\rho = \rho_s) = 0$. یعنی B_z در تمام نقاط همان مقدار روی محور سیملوله را دارد که عبارت است از $\mu_0 N I$. سرانجام با محاسبه $\oint B \cdot dl$ روی مسیر نشان داده شده در شکل ح ۲۷-۷ د، و با توجه به اینکه جریان گذرنده از این مسیر $N I$ است، در می‌یابیم که میدان در خارج سیملوله صفرست.

بیابید.



۳۰-۷ در استوانه‌ای به شعاع b ، حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع a ایجاد شده است. محور حفره با محور استوانه موازی است، شکل ۳۰-۷ مقطع استوانه را نشان می‌دهد. اگر از استوانه جریانی با چگالی یکنواخت J در جهت محور بگذرد، میدان مغناطیسی در حفره چقدر است؟ استوانه را بسیار بلند فرض کنید.

شکل ۳۰-۷

۳۰-۷ محور مختصات را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۳۰-۷ برمی‌گزینیم. فرض می‌کنیم در حفره دو جریان وجود دارد، هر دو با چگالی J ولی یکی در جهت z و یکی در جهت $-z$. به این ترتیب جریان خالص درون حفره چنانچه باید، صفر باقی می‌ماند.

حال دو استوانه داریم، استوانه‌ای به شعاع b که جریانی با چگالی J در جهت z از آن می‌گذرد و دیگری استوانه‌ای به شعاع a که جریانی با چگالی J در جهت $-z$ از آن می‌گذرد. میدان داخل یک استوانه دارای چگالی جریان یکنواخت $\hat{\phi} (\mu_0 J \rho / 2)$ است، که می‌توان آن را به صورت $(\hat{z} \times \hat{\rho}) (\mu_0 J / 2)$ نوشت. اگر

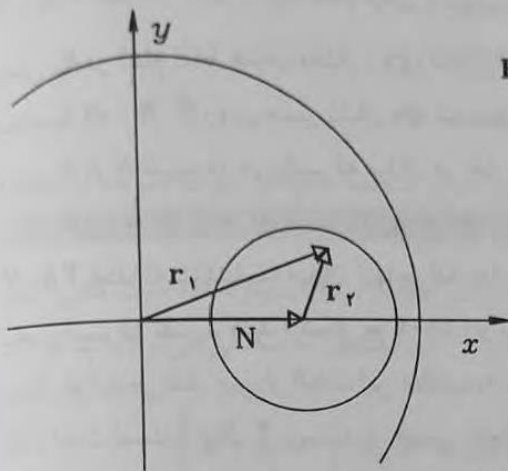
میدان ناشی از جریان استوانه بزرگتر را B_1 و میدان ناشی از جریان استوانه کوچکتر را B_2 بنامیم (با توجه به شکل ح ۳۰-۷) خواهیم داشت

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 J}{2} (\hat{z} \times \mathbf{r}_1 - \hat{z} \times \mathbf{r}_2)$$

$$= \frac{\mu_0 J}{2} \hat{z} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

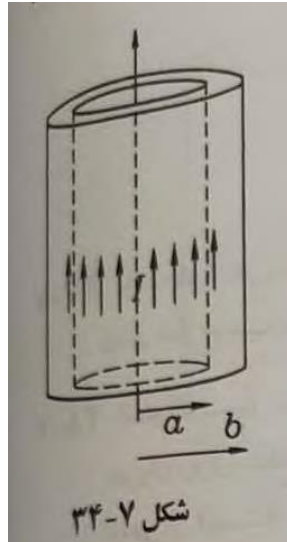
$$= \frac{\mu_0 J}{2} \hat{z} \times \mathbf{N} = \frac{\mu_0 J N}{2} \hat{y}$$

که در آن $\mathbf{N} = N \hat{x}$ برداری است که محور استوانه بزرگ را به محور حفره استوانه، در جهت عمود بر محورها وصل می‌کند. می‌بینیم که میدان حاصل یک میدان یکنواخت است.



شکل ح ۳۰-۷

۳۴-۷ جریان I به طور یکنواخت از پوسته‌ای استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b می‌گذرد (شکل ۳۴-۷ را ببینید). پتانسیل برداری A و میدان مغناطیسی B را بیابید.



شکل ۷-۳۴

۷-۳۴ میدان خارج استوانه ($\rho > b$) شبیه میدان مغناطیسی جریان I است که از سیم توپری بگذرد، یعنی $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi\rho) \hat{\phi}$ پس با توجه به حل مسئله ۷-۳۲ داریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho} \hat{z}$$

در $a < \rho < b$ چگالی جریان یکنواختی در جهت z داریم. پس

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

چون A_z تابعی از z و ϕ نیست

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_z$$

با دوبار انتگرالگیری به دست می آوریم

$$A_z = -\frac{\mu_0 \rho^2 J_z}{4} + K_1 \ln \rho + K_2$$

میدان داخل پوسته را با استفاده از قانون آمپر می یابیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 (\rho^2 - a^2) J_z}{2\rho} \hat{\phi}$$

که در آن $J_z = I / \pi (b^2 - a^2)$ با برابر قرار دادن $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ به دست می آوریم

$$\frac{\mu_0 (\rho^2 - a^2) J_z}{2\rho} = \frac{\mu_0 \rho J_z}{2} - \frac{K_1}{\rho}$$

که نتیجه می دهد $K_1 = \mu_0 a^2 J_z / 2$ حال می توانیم با اعمال شرایط مرزی در $\rho = b$ ثابت K_2 را بیابیم.

۷-۴۰ رسانایی ویژه استوانه ای به ارتفاع l و شعاع a تابعی از فاصله شعاعی تا محور استوانه است. بین دو قاعده اختلاف پتانسیل V ایجاد شده و میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده از استوانه $\mathbf{B} = k\rho^2 \hat{\phi}$ است. مقاومت استوانه و رسانایی ویژه نقاط مختلف آن را بیابید.

۴۰-۷ چگالی جریان در استوانه را از رابطه $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ به دست می آوریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) \right] \hat{z} = \frac{\gamma k}{\rho} \rho^2 \hat{z} = \gamma k \rho \hat{z}$$

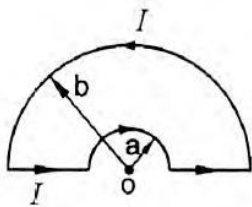
پس $\mathbf{J} = (\gamma k \rho / \mu_0) \hat{z}$. چون شدت میدان الکتریکی $V/l \hat{z}$ است و $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ، به دست می آوریم

$\sigma = (\gamma k l \rho) / (\mu_0 V)$. جریانی را که از استوانه می گذرد به صورت زیر به دست می آوریم

$$\mu_0 I = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = k a^2 \times 2 \pi a$$

$$R = \frac{\mu_0 V}{\gamma \pi k a^3}$$

بنابراین

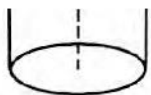


۱. در شکل زیر میدان در نقطه O کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{I}{4a} + \frac{I}{4b} & (1) \\ \frac{I}{4a} - \frac{I}{4b} & (2) \\ \frac{I}{2a} + \frac{I}{2b} & (3) \\ \frac{I}{2a} - \frac{I}{2b} & (4) \end{array}$$

۱. گزینه ۱) میدان ناشی از قطعه های شعاع در O صفر است زیرا O در امتداد این قطعه ها می باشد پس میدان ناشی از دو نیم دایره شعاع a, b داریم که میدان هر کدام به ترتیب $\frac{I}{4a}$ و $\frac{I}{4b}$ می باشد ولی چون جریانش عکس هم هستند میدان کل تفاضل این میدانها است یعنی

$$H = \frac{I}{4a} - \frac{I}{4b}$$



۱۴. کره ای بشعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s با سرعت زاویه ای ω حول محور

Z می چرخد میدان مغناطیسی در مرکز کره کدام است؟

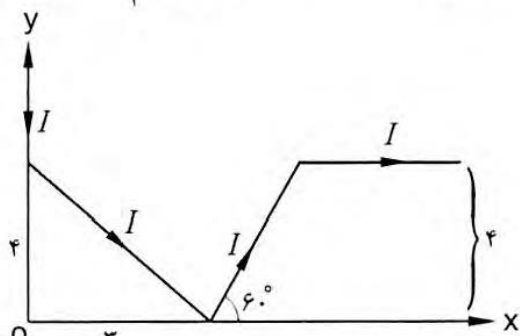
$$\begin{array}{llll} \frac{1}{4} \rho_s \omega a & (1) & \frac{1}{3} \rho_s \omega a & (2) \\ \rho_s \omega a & (3) & \frac{1}{4} \rho_s \omega a & (4) \end{array}$$

۱۴. گزینه ۲) چگالی جریان سطحی معادل برابر است با $\vec{J}_s = \rho_s \omega a \sin \theta \hat{\phi}$ حال اگر یک حلقه روی کره در نظر بگیریم جریان معادل این حلقه عبارتست از $(J_s a d\theta)$ و شعاع این حلقه $(a \sin \theta)$ می باشد پس طبق رابطه میدان روی محور حلقه میدان ناشی از این حلقه عبارتست از:

$$dH = \frac{(J_s a d\theta) (a \sin \theta)^2}{2 [a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta]} = \frac{J_s a^3 \sin^3 \theta d\theta}{2 a^3} = \frac{(\rho_s \omega a \sin \theta) \sin^3 \theta d\theta}{2}$$

$$dH = \frac{\rho_s \omega a}{2} \sin^3 \theta d\theta \rightarrow H = \int_0^\pi dH = \frac{\rho_s \omega a}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{\rho_s \omega a}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \rho_s \omega a$$



۱۵. در شکل زیر میدان در نقطه O کدام است؟

(۱) $\frac{I}{\pi} \cdot \frac{24}{\pi}$ (۲) $\frac{I}{\pi} \cdot \frac{14}{\pi}$

(۳) $\frac{I}{\pi} \cdot \frac{42}{\pi}$ (۴) $\frac{I}{\pi} \cdot \frac{12}{\pi}$

۱۵. گزینه ۴ میدان ناشی از قطعه سیم واقع روی محور y در نقطه O صفر است زیرا O در امتداد این قطعه سیم است. قطعه سیم و ترمثلث میدانی که ایجاد می‌کند قبلاً در درس حساب شده که برابر با $\frac{\sqrt{I}}{4\pi} \hat{a}_z$ - میدان سیمی که با محور x زاویه 60° می‌سازد با محاسبه α_1, α_2 و فاصله عمودی O تا این سیم بصورت زیر بدست می‌آید.
 $\alpha_1 = 120^\circ$

$$OH = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\alpha_2 = 210^\circ / \sqrt{3}$$

$$H = \frac{I \hat{a}_z}{4\pi \frac{3\sqrt{3}}{2}} [\cos 120^\circ - \cos 210^\circ / \sqrt{3}]$$

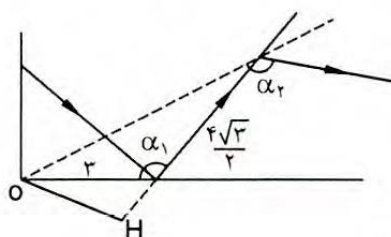
$$\alpha_1 = 150^\circ / \sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \pi$$

$$OH = 4$$

$$\rightarrow H = \frac{I}{4\pi(4)} [\cos 150^\circ / \sqrt{3} - \cos \pi] \hat{a}_z = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{32}{\pi} \hat{a}_z$$

$$H = -\frac{\sqrt{I}}{4\pi} + \frac{I}{4\pi} + \frac{I}{4\pi} = -\frac{I}{4\pi}$$



برای سیم افقی داریم:

۳. یک کابل هم محور بشعاع داخلی a و خارجی b حامل جریانی به چگالی $J = J_0 \frac{R}{a} \hat{a}_z$ در هادی داخلی می‌باشد اگر پتانسیل در $R=b$ صفر باشد پتانسیل در $a < R < b$ کدام است؟

(۱) $\frac{\mu_0 J_0 a^2}{3} \ln \frac{R}{b}$ (۲) $\frac{\mu_0 J_0 a}{3} \ln \frac{b}{R}$ (۳) $\frac{\mu_0 J_0 a^3}{3} \ln \frac{R}{b}$ (۴) $\frac{\mu_0 J_0 a^2}{3} \ln \frac{b}{R}$

۳. گزینه (۱) با توجه به اینکه جریان در جهت $\hat{a}_z$ است فقط مولفه A_z پتانسیل برداری موجود است پس داریم

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_z &= 0 \rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial A_z}{\partial R} \right] = 0 \rightarrow \\ A_z &= A \ln R + B \quad A_z(R=b) = 0 \rightarrow B = -A \ln b \rightarrow \\ A_z &= A \ln \frac{R}{b} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I = \int_0^a J_0 \frac{R}{a} 2\pi R dR \Rightarrow \\ H &= J_0 \frac{1}{2} \frac{a^2}{R} \rightarrow H = \frac{J_0 a^2}{2R} \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2R} \hat{a}_\phi \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B} \Rightarrow \frac{A}{R} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2R} \rightarrow A = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2} \\ \rightarrow A_z &= \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2} \ln \frac{R}{b}\end{aligned}$$

۶. ناحیه $|y| \leq \frac{a}{2}$ دارای جریانی به چگالی $\vec{J} = J_0 \cos\left[\frac{\pi}{a}y\right] \hat{a}_z$ می باشد پتانسیل مغناطیسی برداری در

این ناحیه کدام است؟

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0 J_0 a^2}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \cos \frac{\pi}{a} y \right] \quad (2) \\ \frac{\mu_0 J_0 a^2}{\pi} \left[2 + \cos \frac{\pi}{a} y \right] \quad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0 J_0 a^2}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{a} y \right] \quad (1) \\ \frac{\mu_0 J_0 a^2}{\pi} \left[1 + \cos \frac{\pi}{a} y \right] \quad (3)\end{aligned}$$

۶. گزینه ۲) چون ناحیه در جهت Z و X بی نهایت است پس پتانسیل تابع Z و X نیست از طرفی چون پتانسیل برداری با جریان هم جهت است پس فقط مولفه A_z داریم:

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 A_z}{dy^2} = -\mu_0 J_0 \cos\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)y\right] \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} < y < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dA_z}{dy} = -\mu_0 J_0 \frac{a}{\pi} \sin\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)y + A\right] \rightarrow A_z = \mu_0 J_0 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \cos\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)y + A\right] + Ay + B$$

$$y > \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad J = 0 \quad \nabla^2 A_z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = A'y + B'$$

$$y < -\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad J = 0 \quad \nabla^2 A_z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = A''y + B''$$

$$A_z(y = \frac{a}{\sqrt{2}}) = A_z(y = \frac{a}{\sqrt{2}}) \Rightarrow A' \frac{a}{\sqrt{2}} + B' = A \frac{a}{\sqrt{2}} + B$$

$$A_z(y = -\frac{a}{\sqrt{2}}) = A_z(y = -\frac{a}{\sqrt{2}}) \Rightarrow -A'' \frac{a}{\sqrt{2}} + B'' = -A \frac{a}{\sqrt{2}} + B$$

حال پیوستگی H را در سه ناحیه می نویسیم

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad \rightarrow \quad \vec{H}_1 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x = -\frac{1}{\mu_0} A'' \hat{a}_x \quad y < -\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{H}_2 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x = -\frac{1}{\mu_0} \left[-\mu_0 J_0 \frac{a}{\pi} \sin\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)y + A\right] \right] \hat{a}_x \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} < y < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{H}_3 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x = -\frac{1}{\mu_0} A' \hat{a}_x \quad y > \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$H_1(y = -\frac{a}{\sqrt{2}}) = H_2(y = -\frac{a}{\sqrt{2}}) \Rightarrow A'' = -\mu_0 J_0 \frac{a}{\pi} + A$$

$$H_2(y = \frac{a}{\sqrt{2}}) = H_3(y = \frac{a}{\sqrt{2}}) \Rightarrow A' = \mu_0 J_0 \frac{a}{\pi} + A$$

با توجه به اینکه میدان در $y > \frac{a}{\sqrt{2}}$ قرینه میدان در $y < -\frac{a}{\sqrt{2}}$ است پس $A' = A''$ که با توجه به شرط مرزی

نسخه می گیریم $A = 0$ پس داریم:

$$A'' = -\mu_0 J_0 \frac{a}{\pi} \quad A' = \mu_0 J_0 \frac{a}{\pi} \quad , \quad B = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} a^2$$

$$A_z = \mu_0 J_0 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \cos\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)y\right] + \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} a^2 \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} < y < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

آموزشیار: کرامتی

موفق باشید، افصحی