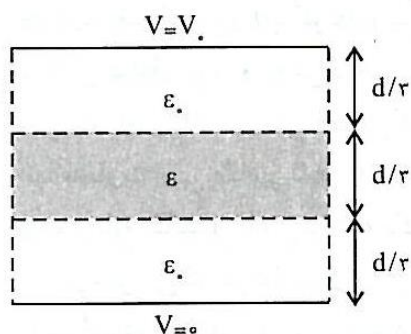


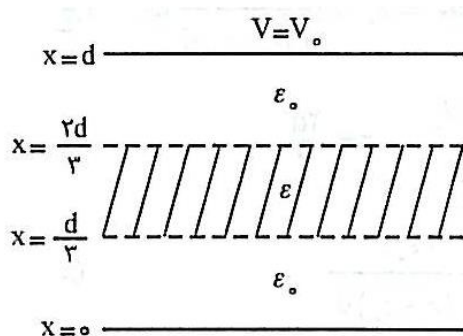
فصل چهارم (مسائل الکتریسیته ساکن، معادلات لاپلاس و پواسون، روش تصاویر)



شکل ۴-۱۷

۱. یک سوم از فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی، با ماده عایقی که قابلیت گذردهی آن برابر ϵ می باشد اشغال گردیده است. شکل ۴-۱۷ صفحات هادی و عایق بین آنها را نشان می دهد. پتانسیل صفحات هادی تختانی و فوقانی به ترتیب برابر صفر و V_0 می باشد. مطلوب است محاسبه:

- پتانسیل در کلیه نقاط بین دو صفحه هادی،
- چگالی توزیع بار سطحی روی صفحه هادی تختانی،
- چگالی توزیع بار سطحی مقید روی سطح فوقانی عایق،
- ظرفیت به ازای واحد سطح صفحات هادی.



شکل پ-۳۱

۱. الف) با توجه به شکل پ-۳۱، بدیهی است که پتانسیل فقط تابعی از x می باشد، $V=V(x)$. پس می توان نوشت:

$$V = \begin{cases} A_1 x + B_1 = V_1 & 0 \leq x \leq \frac{d}{3} \\ A_2 x + B_2 = V_2 & \frac{d}{3} \leq x \leq \frac{2d}{3} \\ A_3 x + B_3 = V_3 & \frac{2d}{3} \leq x \leq d \end{cases}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V_1(x=0) = 0$$

$$V_3(x=d) = V_0$$

$$V_1(x=d/3) = V_2(x=d/3)$$

$$V_2(x=2d/3) = V_3(x=2d/3)$$

$$\epsilon_0 \frac{dV_1}{dx} \Big|_{x=d/3} = \epsilon \frac{dV_2}{dx} \Big|_{x=d/3}$$

$$\epsilon \frac{dV_2}{dx} \Big|_{x=2d/3} = \epsilon_0 \frac{dV_3}{dx} \Big|_{x=2d/3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + B_1 = 0 \\ A_3 d + B_3 = V_0 \\ A_1 \frac{d}{3} + B_1 = A_2 \frac{d}{3} + B_2 \\ A_2 \left(\frac{2d}{3} \right) + B_2 = A_3 \left(\frac{2d}{3} \right) + B_3 \\ \epsilon_0 A_1 = \epsilon A_2 \\ \epsilon A_2 = \epsilon_0 A_3 \end{cases}$$

پس از حل دستگاه شش معادله و شش مجهول فوق داریم:

$$B_1 = 0, \quad A_1 = A_2 = \frac{\epsilon V_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}, \quad A_2 = \frac{\epsilon_0 V_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}, \quad B_2 = -B_1 = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)V_0}{\epsilon + \epsilon_0}$$

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon V_0 \epsilon x}{(\epsilon + \epsilon_0)d} & 0 \leq x \leq \frac{d}{\epsilon} \\ \frac{V_0 [\epsilon_0 x + (\epsilon - \epsilon_0)d]}{(\epsilon + \epsilon_0)d} & \frac{d}{\epsilon} \leq x \leq \frac{\epsilon d}{\epsilon} \\ \frac{V_0 [\epsilon x - (\epsilon - \epsilon_0)d]}{(\epsilon + \epsilon_0)d} & \frac{\epsilon d}{\epsilon} \leq x \leq d \end{cases}$$

$$\rho_S = D \cdot \hat{a}_n = \left[-\epsilon_0 \frac{dV_1}{dx} \hat{a}_x \right] \cdot (\hat{a}_x) \Big|_{x=0} = -\frac{\epsilon_0 \epsilon V_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}, \quad x=0 \quad (ب)$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \left[-\epsilon \frac{dV_2}{dx} - \epsilon_0 \left(-\frac{dV_1}{dx} \right) \right] \hat{a}_x = (\epsilon_0 - \epsilon) \frac{dV_2}{dx} \hat{a}_x = (\epsilon_0 - \epsilon) \frac{\epsilon_0 V_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d} \hat{a}_x \quad (ج)$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n = P \cdot \hat{a}_x = -\frac{\epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0) V_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}, \quad x = \frac{\epsilon d}{\epsilon}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{|\rho_S(1)|}{V_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon V_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d V_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{(\epsilon + \epsilon_0)d} \quad (د)$$

۲. در مسئله ۱، جسم عایق با یک جسم هادی کامل جایگزین می‌گردد. مطلوب است محاسبه:
الف) پتانسیل جسم هادی، ب) ظرفیت به ازای واحد سطح صفحات هادی.

۲. تابع پتانسیل به صورت $V=V(x)$ در نواحی خلأ و $V=k$ در ناحیه هادی است. یعنی،

$$V = \begin{cases} A_1 x + B_1 = V_1 & 0 \leq x \leq \frac{d}{\epsilon} \\ k & \frac{d}{\epsilon} \leq x \leq \frac{\epsilon d}{\epsilon} \\ A_2 x + B_2 = V_2 & \frac{\epsilon d}{\epsilon} \leq x \leq d \end{cases}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} V_1(x=0) &= 0 \\ V_2(x=d) &= V_0 \\ V_1(x=d/3) &= k \\ V_2(x=2d/3) &= k \\ \rho_S \Big|_{x=d} &= -\rho_S \Big|_{x=0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 0 + B_1 = 0 \\ A_2 d + B_2 = V_0 \\ A_1 \frac{d}{3} + B_1 = k \\ A_2 \left(\frac{2d}{3} \right) + B_2 = k \\ \underbrace{\left(-\epsilon_2 \frac{dV_2}{dx} \hat{a}_x \right) \cdot (-\hat{a}_x)}_{\epsilon_2 A_2} = - \underbrace{\left(-\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} \hat{a}_x \right) \cdot (\hat{a}_x)}_{\epsilon_1 A_1} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه پنج معادله و پنج مجهول بالا، نتایج زیر را به دست می آوریم:

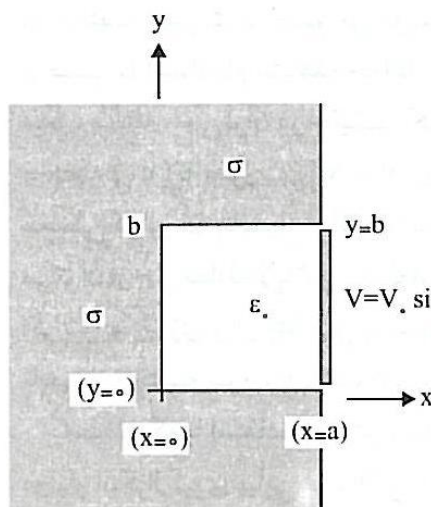
$$B_1 = 0, \quad A_1 = A_2 = \frac{3V_0}{2d}, \quad B_2 = -\frac{V_0}{3}, \quad k = \frac{V_0}{3}$$

$$k = \frac{V_0}{3}$$

الف) پتانسیل جسم هادی:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_S(1)}{V_0} = \frac{\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx}}{V_0} = \frac{\epsilon_1 A_1}{V_0} = \frac{3\epsilon_1}{2d}$$

ب) ظرفیت:



شکل ۱۸-۴

۳) شکافی مستطیلی شکل به پهنای b و عمق a ،

مطابق شکل ۱۸-۴، در یک قطعه فلزی با پتانسیل

صفر تعبیه می گردد. پتانسیلی که توزیع آن در محدوده

$0 < y < b$ ، به صورت $V = V_0 \sin(\pi y/b)$ باشد، در

دهانه شکاف، در $x=a$ ایجاد می شود. با فرض آنکه

قطعه فلزی هادی کامل بوده و شکاف مزبور در امتداد z

تا بینهایت ادامه داشته باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) تابع توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی در درون

شکاف،

ب) چگالی توزیع بارهای سطحی موجود در این سیستم.

۳. الف) با توجه به بینهایت بودن طول شکاف در امتداد محور z ، پتانسیل تابعی از z نبوده و $V = V(x, y)$ است. از آنجا که در مرز $x = a$ و $0 < y < b$ تغییرات تابع پتانسیل برحسب y سینوسی است، تابع $V(x, y)$ را در حالت کلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

که A, B, C, D و k ضرایب ثابت ولی مجهول هستند. برای تعیین این مجهولات از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم که به شرح زیر خلاصه می‌شوند.

$$V = 0, \quad x = 0, \quad 0 < y < b \quad (۱)$$

$$V = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < a \quad (۲)$$

$$V = 0, \quad y = b, \quad 0 < x < a \quad (۳)$$

$$V = V_0 \sin(\pi y / b), \quad x = a, \quad 0 < y < b \quad (۴)$$

$$(۲) \text{ اعمال شرط: } (Ae^{kx} + Be^{-kx})D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$(۱) \text{ اعمال شرط: } (A + B)(C \sin ky) = 0 \Rightarrow B = -A$$

توجه کنید در اعمال شرط (۱) نمی‌توان $C = 0$ را قابل قبول دانست، زیرا با $D = C = 0$ تابع پتانسیل همه جا صفر می‌شود. با استفاده از نتایج فوق تابع پتانسیل به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$V(x, y) = AC(e^{kx} - e^{-kx}) \sin ky = A' \sinh(kx) \sin ky$$

که $A' = 2AC$ ثابت جدیدی است.

$$(۳) \text{ اعمال شرط: } A' \sinh kx \sin kb = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{b}; \quad n = \text{عدد صحیح}$$

بدین ترتیب:

$$V(x, y) = A' \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

حال شرط مرزی (۴) را اعمال می‌کنیم. در $x = a$,

$$V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = A' \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

برقراری رابطه مذکور به ازای جميع مقادیر $0 < y < b$ وقتی میسر است که:

$$n = ۱, \quad A' = V_0 / \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)$$

سرانجام:

$$V(x, y) = V_0 \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0 \pi}{b \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \left[\cosh\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{a}}_x + \sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{a}}_y \right], \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (\text{ب})$$

$$\rho_S = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_x \quad : 0 < y < b \text{ و } x = 0 \quad \text{روی سطح}$$

$$\rho_S = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{V_0 \epsilon_0 \pi}{b \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_y \quad : 0 < x < a \text{ و } y = 0 \quad \text{روی سطح}$$

$$\rho_S = \epsilon_0 E_y|_{y=0} = -\frac{V_0 \epsilon_0 \pi}{b \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n = -\hat{\mathbf{a}}_y \quad : 0 < x < a \text{ و } y = b \quad \text{روی سطح}$$

$$\rho_S = -\epsilon_0 E_y|_{y=b} = -\frac{V_0 \epsilon_0 \pi}{b \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right) = \rho_S|_{y=0}$$

۴. مسئله ۳ را برای حالتی که پتانسیل در دهانه شکاف به صورت $V = V_0 \sin^2(\pi y/b)$ باشد تکرار نمایید.

۴. شرایط مرزی ۱، ۲ و ۳ مسئله نیز صادقند و بنابراین شکل کلی جواب را می توان به صورت یک سری نوشت:

$$V(x, y) = \sum_n A'_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

الف) شرط مرزی ۴ در این مسئله عبارت است از:

$$V = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad x = a, \quad 0 < y < b$$

با نوشتن این شرط به صورت $V = V_0 \left[\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right]$ و اعمال آن، داریم:

$$V_0 \left[\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right] = \sum_n A'_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

شرط فوق وقتی به ازای جمیع مقادیر $0 < y < b$ برقرار است که به جز A'_1 و A'_3 تمام ضرایب A'_n صفر باشند و

$$A'_1 = \frac{3V_0}{4 \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}, \quad A'_3 = -\frac{V_0}{4 \sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)}$$

آنگاه تابع پتانسیل برابر است با:

$$V(x, y) = \frac{3V_0}{4} \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{V_0}{4} \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

ب)

$$\begin{aligned} &= \frac{-3\pi V_0}{4b} \left\{ \left[\frac{\cosh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right] \hat{\mathbf{a}}_x \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right] \hat{\mathbf{a}}_y \right\}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \end{aligned}$$

$$\rho_S = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$$

روی سطح $x=0$ و $0 < y < b$: $\hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_x$

$$\rho_S = \epsilon_0 E_x \big|_{x=0} = -\frac{3\pi \epsilon_0 V_0}{4b} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \right]$$

روی سطح $y=0$ و $0 < x < a$: $\hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_y$

$$\rho_S = \epsilon_0 E_y \big|_{y=0} = -\frac{3\pi \epsilon_0 V_0}{4b} \left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \right]$$

روی سطح $y=b$ و $0 < x < a$: $\hat{a}_n = -\hat{a}_y$

$$\rho_s = -\epsilon \cdot E_y \Big|_{y=b} = -\frac{\epsilon \pi \epsilon_0 V}{4b} \left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{\epsilon \pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\epsilon \pi a}{b}\right)} \right] = \rho_s \Big|_{y=0}$$

۵. فضای بین دو سطح استوانه‌ای هم‌محور به شعاعهای a و b ($b > a$)، به طول بینهایت و از جنس هادی کامل را دو ماده عایق با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 به شرح زیر پر می‌کنند: ناحیه $a < r < c$ شامل عایق ϵ_1 و ناحیه $c < r < b$ شامل عایق ϵ_2 است. پتانسیل استوانه‌های درونی و بیرونی به ترتیب برابر V_0 و صفر فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) تابع پتانسیل در تمام نقاط بین سطوح استوانه‌ای،

ب) ظرفیت سیستم به ازای واحد طول.

۵. الف) به دلیل وجود تقارن نسبت به φ و بینهایت بودن طول استوانه‌ها، تابع پتانسیل مستقل از φ و z می‌باشد. از این رو شکل کلی تابع پتانسیل در هر ناحیه به صورت $V(r) = A \ln r + B$ بیان می‌شود، که A و B ضرایب ثابتی هستند. البته در هر ناحیه، ضرایب ثابت جداگانه باید در نظر گرفت. پس به طور خلاصه:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 = A_1 \ln r + B_1 & a \leq r \leq c \\ V_2 = A_2 \ln r + B_2 & c \leq r \leq b \end{cases}$$

برای تعیین ضرایب ثابت از شرایط مرزی استفاده می‌شود. این شرایط عبارتند از:

$$V_1(r=a) = V_0 \quad (1)$$

$$V_2(r=b) = 0 \quad (2)$$

$$V_1(r=c) = V_2(r=c) \quad , \quad r=c \text{ پیوستگی پتانسیل در } \quad (3)$$

$$\epsilon_1 \frac{dV_1}{dr} \Big|_{r=c} = \epsilon_2 \frac{dV_2}{dr} \Big|_{r=c} \quad , \quad r=c \text{ پیوستگی } D_n \text{ در } \quad (4)$$

اِعمال شرایط مزبور به چهار معادله زیر می‌انجامد:

$$A_1 \ln a + B_1 = V_0$$

$$A_2 \ln b + B_2 = 0$$

$$(A_1 - A_2) \ln c + (B_1 - B_2) = 0$$

$$\epsilon_1 A_1 - \epsilon_2 A_2 = 0$$

پس از حل چهار معادله فوق برحسب A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 داریم:

$$A_1 = V_0 / \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right) \quad , \quad A_2 = V_0 \cdot \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) / \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

$$B_1 = V_0 - A_1 \ln a \quad , \quad B_2 = -A_2 \ln b$$

سرانجام:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{V_0 \left(\ln \frac{r}{c} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)}{\ln \frac{a}{c} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b}} & a \leq r \leq c \\ \frac{V_0 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{c} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b}} & c \leq r \leq b \end{cases}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s (\gamma \pi a)}{V_0} = \frac{\left(-\epsilon_1 \frac{dV_1}{dr} \Big|_{r=a} \right) (\gamma \pi a)}{V_0} = \frac{-\gamma \pi a \epsilon_1}{V_0 a} A_1 \quad (ب)$$

$$= -\frac{\gamma \pi a \epsilon_1}{V_0 a} \frac{V_0}{-\left(\ln \frac{c}{a} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{b}{c} \right)} \Rightarrow C = \frac{\gamma \pi \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \ln \left(\frac{b}{c} \right) + \epsilon_2 \ln \left(\frac{c}{a} \right)}$$

۶. فضای بین دو سطح استوانه‌ای مسئله ۵ با همان عایق‌ها ولی به گونه دیگری به شرح زیر پر می‌شود: ناحیه $0 < \varphi < \pi$ شامل عایق ϵ_1 و ناحیه $\pi < \varphi < 2\pi$ شامل عایق ϵ_2 می‌باشد. استوانه‌های هادی همان پتانسیلهای مسئله ۵ را دارا هستند. پتانسیل در تمام نقاط بین سطوح استوانه‌ای و ظرفیت سیستم به ازای واحد طول را محاسبه نمایید.

۶. در این مسئله تغییرات هم برحسب r و هم برحسب φ مشاهده می‌شود. در جهت r پتانسیل سطوح هادی از صفر به V_0 تغییر می‌کند و در جهت φ قابلیت گذردهی از ϵ_1 به ϵ_2 تغییر می‌یابد. بنابراین در ابتدا تابع پتانسیل را به صورت $V(r, \varphi)$ یعنی دو بُعدی در نظر گرفته و ساده‌ترین شکل پاسخ (رابطه ۴-۵۲-الف) را به کار می‌بریم.

$$V(r, \varphi) = (A \ln r + B)(C\varphi + D)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V = V_0, \quad r = a \quad (۱)$$

$$V = 0, \quad r = b \quad (۲)$$

$$\varphi = \pi, \quad 0 = E_r \text{ پیوستگی در } \quad (۳)$$

$$\varphi = \pi, \quad 0 = D_\varphi \text{ پیوستگی در } \quad (۴)$$

$$(۲) \text{ اعمال شرط: } 0 = (A \ln b + B)(C\varphi + D) \Rightarrow B = -A \ln b$$

$$V(r, \varphi) = A \ln \left(\frac{r}{b} \right) (C\varphi + D)$$

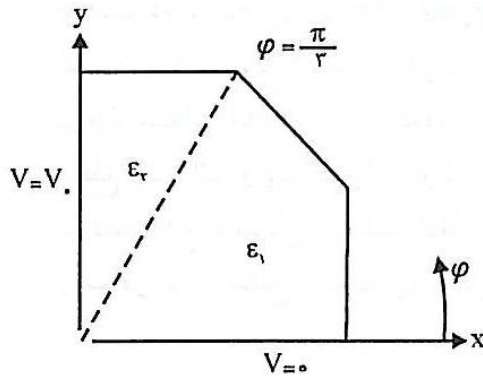
$$(۱) \text{ اعمال شرط: } V_0 = A \ln \left(\frac{a}{b} \right) (C\varphi + D)$$

شرط مزبور به ازای جميع مقادیر $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ وقتی می‌تواند برقرار باشد که $C=0$ و $A D \ln \left(\frac{a}{b} \right) = V_0$ باشد.

$$V(r, \varphi) = V(r) = V_0 \frac{\ln \left(\frac{r}{b} \right)}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)}, \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

این نتیجه در واقع نشان می‌دهد که تابع پتانسیل مستقل از φ است. چون $D_\varphi = 0$ است، شرط (۴) حذف گردیده و شرط (۳) به خودی خود برقرار است. برای محاسبه ظرفیت به ازای واحد طول داریم:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\pi a (\rho_{S_1} + \rho_{S_2})}{V_0} = \frac{-\pi a \left(\epsilon_1 \frac{\partial V}{\partial r} + \epsilon_2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=a}}{V_0} = \frac{-\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} = \frac{\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$



شکل ۴-۱۹

۷. دو نیم صفحه هادی $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi/2$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیل‌های صفر و V_0 می‌باشند. ناحیه $0 < \varphi < \pi/3$ را عایق کاملی با قابلیت گذردهی ϵ_1 و ناحیه $\pi/3 < \varphi < \pi/2$ را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ϵ_2 فراگرفته است. شکل ۴-۱۹ صفحات هادی و نواحی عایق را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:

الف) تابع تغییرات پتانسیل در فضای بین دو نیم صفحه هادی ($0 < \varphi < \pi/2$).

ب) شدت میدان الکتریکی در فضای مذکور در بند (الف).

ج) چگالی سطحی بارهای مقید ناشی از قطبی شدن عایقها در مرز $\varphi = \pi/3$.

د) تابع تغییرات پتانسیل در ناحیه $\pi/2 < \varphi < 2\pi$.

۷. الف) روشن است که پتانسیل فقط تابعی از φ است و نسبت به r و z تغییراتی ندارد؛ از این رو تابع پتانسیل شکل کلی رابطه ۴-۴۴ را دارا است. بنابراین:

$$V(\varphi) = \begin{cases} V_1 = A_1 \varphi + B_1 & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ V_2 = A_2 \varphi + B_2 & \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V_1 = 0, \quad \varphi = 0 \quad (1)$$

$$V_2 = V_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$V_1 = V_2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ در } D_n = D_\varphi \text{ پیوستگی} \quad (4)$$

اعمال شرایط فوق چهار معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ \frac{\pi}{3} A_2 + B_2 = V_0 \\ \frac{\pi}{3} (A_1 - A_2) + (B_1 - B_2) = 0 \\ \epsilon_1 A_1 - \epsilon_2 A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 0 \\ A_1 = \frac{V_0}{\pi} \frac{\epsilon_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \\ A_2 = \frac{V_0}{\pi} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \\ B_2 = 2V_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \end{cases}$$

آنگاه:

$$V(\varphi) = \begin{cases} \frac{\epsilon V_0 \epsilon_2}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \varphi & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\epsilon} \\ \frac{\epsilon V_0 \epsilon_1}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \varphi + \epsilon V_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} & \frac{\pi}{\epsilon} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\epsilon} \end{cases} \quad (ب)$$

$$E = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \Rightarrow E(r) = \begin{cases} -\frac{\epsilon \epsilon_2 V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_\varphi & 0 < \varphi < \frac{\pi}{\epsilon} \\ -\frac{\epsilon \epsilon_1 V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_\varphi & \frac{\pi}{\epsilon} < \varphi < \frac{\pi}{\epsilon} \end{cases} \quad (ج)$$

$$P = D - \epsilon_0 E = (\epsilon - \epsilon_0) E \Rightarrow P = \begin{cases} -\frac{\epsilon \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_0) V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_\varphi & 0 < \varphi < \frac{\pi}{\epsilon}, (P_1) \\ -\frac{\epsilon \epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_0) V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_\varphi & \frac{\pi}{\epsilon} < \varphi < \frac{\pi}{\epsilon}, (P_2) \end{cases}$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n$$

$$\rho_{PS_1} = P_1 \cdot \hat{a}_n = P_1 \cdot (\hat{a}_\varphi) = -\frac{\epsilon \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_0) V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r}, \varphi = \frac{\pi}{\epsilon}^-$$

$$\rho_{PS_2} = P_2 \cdot \hat{a}_n = P_2 \cdot (-\hat{a}_\varphi) = \frac{\epsilon \epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_0) V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r}, \varphi = \frac{\pi}{\epsilon}^+$$

$$\rho_{PS} = \rho_{PS_1} + \rho_{PS_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) V_0}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r}, \varphi = \frac{\pi}{\epsilon}$$

$$V = A\varphi + B, \quad \frac{\pi}{\epsilon} \leq \varphi \leq \epsilon\pi \quad (د)$$

شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

$$V = 0, \quad \varphi = \epsilon\pi \quad (۱)$$

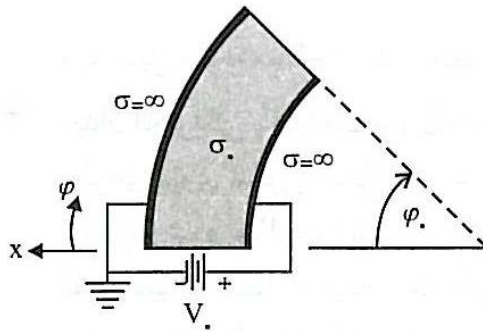
$$V = V_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{\epsilon} \quad (۲)$$

اعمال شرایط بالا دو معادله زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} \epsilon\pi A + B = 0 \\ A \frac{\pi}{\epsilon} + B = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{\epsilon V_0}{\epsilon\pi} \\ B = \frac{\epsilon V_0}{\epsilon} \end{cases}$$

آنگاه:

$$V(\varphi) = -\frac{\epsilon V_0}{\epsilon} \left(\frac{\varphi}{\pi} - \epsilon \right), \quad \frac{\pi}{\epsilon} \leq \varphi \leq \epsilon\pi$$



شکل ۴-۲۰

۸. صفحه‌ای نازک از جنس هادی با رسانایی σ مطابق شکل ۴-۲۰ بریده شده است. در دو طرف خمیده صفحه لایه‌هایی از جنس هادی کامل تعبیه شده و ولتاژ V_0 به آنها اعمال می‌گردد. ضخامت صفحه را Δ و شعاع لایه‌های هادی کامل درونی و بیرونی را به ترتیب برابر R_1 و R_2 فرض کنید. تغییرات پتانسیل در این صفحه و مقاومت آن را تعیین نمایید.

۸. به دلیل ناچیز بودن ضخامت صفحه، پتانسیل تغییراتی در جهت z نخواهد داشت. لیکن در جهت r به دلیل تغییر پتانسیل از V_0 به صفر و در جهت φ به دلیل تغییر محیط (تغییر رسانایی از σ به صفر) می‌توان تغییرات پتانسیل را محتمل دانست و مسئله را به عنوان یک معادله لاپلاس دو بُعدی مورد بررسی قرار داد. همانند مسئله ۶ تابع پتانسیل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r, \varphi) = (A \ln r + B)(C\varphi + D), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V = 0, \quad r = R_2 \quad (1)$$

$$V = V_0, \quad r = R_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (3)$$

شرط (۳) ناشی از این حقیقت است که جریانی از مرزهای $\varphi = 0$ و $\varphi = \varphi_0$ عبور نمی‌کند. به عبارت دیگر،

$$J_\varphi = \sigma \cdot E_\varphi = -\frac{\sigma}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

با اعمال شرایط (۱) و (۲) داریم:

$$0 = (A \ln R_2 + B)(C\varphi + D) \Rightarrow B = -A \ln R_2$$

$$V_0 = (A \ln R_1 + B)(C\varphi + D)$$

شرط (۲) فقط وقتی به ازای جمیع مقادیر $0 < \varphi < \varphi_0$ برقرار است که $C = 0$ و $AD = V_0 / \ln \frac{R_1}{R_2}$ باشد. آنگاه:

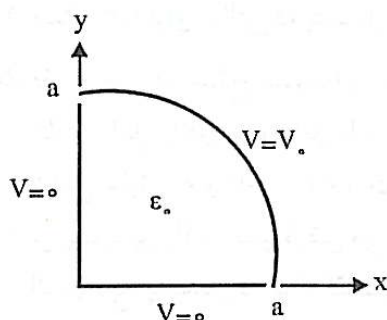
$$V(r, \varphi) = V(r) = V_0 \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

با توجه به اینکه تابع پتانسیل مستقل از φ است، $J_\varphi = 0$ و شرط (۳) حذف می‌شود.

$$E = -\nabla V = -\frac{V_0}{r} \frac{1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \hat{a}_r$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \sigma \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\sigma \int_S \frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} (r d\varphi dz) = -\frac{\sigma \cdot V_0}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_0^\Delta dz$$

$$= -\frac{\sigma \cdot \varphi_0 \cdot \Delta}{\ln \frac{R_1}{R_2}} V_0 = \frac{\sigma \cdot \varphi_0 \cdot \Delta}{\ln \frac{R_2}{R_1}} V_0 \Rightarrow R = \frac{V_0}{I} = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{\sigma \cdot \varphi_0 \cdot \Delta}$$



شکل ۴-۲۱

۹. یک محفظه استوانه‌ای شکل به سطوح هادی $\varphi=0$ و $\varphi=\pi/2$ با پتانسیل صفر و سطح $r=a$ با پتانسیل V_0 محدود می‌باشد. محفظه در امتداد محور z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و فضای درون آن خلأ است. شکل ۴-۲۱ سطح مقطع محفظه را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:
 الف) تابع تغییرات پتانسیل در درون محفظه،
 ب) میدان الکتریکی در درون محفظه و چگالی بار سطحی روی سطح هادی $r=a$.

۹. الف) چون محفظه در امتداد z تا بینهایت ادامه دارد، پتانسیل تابعی از z نخواهد بود و فقط نسبت به r و φ تغییر می‌کند. شکل کلی پتانسیل را مطابق رابطه ۴-۵۲ ب در نظر می‌گیریم.

$$V(r, \varphi) = (Ar^n + Br^{-n})(C \sin n\varphi + D \cos n\varphi), \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V = V_0, \quad r = a, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$V = 0, \quad \varphi = 0, \quad 0 < r < a \quad (2)$$

$$V = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r < a \quad (3)$$

$$V = 0, \quad r = 0 \quad (4)$$

$$\text{اعمال شرط (۲): } 0 = (Ar^n + Br^{-n})(0 + D) \Rightarrow D = 0$$

$$\text{اعمال شرط (۴): } 0 = \left(0 + \frac{B}{r^n}\right)(C \sin n\varphi) \Rightarrow B = 0$$

در نتیجه:

$$V(r, \varphi) = ACr^n \sin n\varphi = A' r^n \sin n\varphi; \quad A' = AC$$

$$\text{اعمال شرط (۳): } 0 = A' r^n \sin \frac{n\pi}{2} \Rightarrow n = \text{عدد صحیح زوج و مثبت } (n=2m)$$

تا اینجا داریم:

$$V(r, \varphi) = A' r^{2m} \sin 2m\varphi$$

شرط (۱) در پاسخی که تا کنون به دست آورده‌ایم برقرار نخواهد شد. برای رفع این مشکل پاسخ را به صورت یک سری به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m r^{2m} \sin 2m\varphi$$

$$\text{شرط (۱): } V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m a^{2m} \sin 2m\varphi$$

برای محاسبه ضرایب A'_m طرفین رابطه اخیر را در $\sin 2m'\varphi$ که m' عددی صحیح است، ضرب نموده و از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^{\pi/\gamma} V_0 \sin \gamma m' \varphi d\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m a^{\gamma m} \int_0^{\pi/\gamma} \sin \gamma m \varphi \sin \gamma m' \varphi d\varphi$$

اما:

$$\int_0^{\pi/\gamma} V_0 \sin \gamma m' \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{V_0}{m'} & \text{فرد } m' \\ 0 & \text{زوج } m' \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/\gamma} \sin \gamma m \varphi \sin \gamma m' \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{\gamma} & m = m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases}$$

آنگاه:

$$A'_m = \begin{cases} \frac{\gamma V_0}{m\pi} \left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma m} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

سرانجام:

$$V(r, \varphi) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\gamma V_0}{m\pi} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{\gamma m} \sin(\gamma m \varphi), \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\gamma}$$

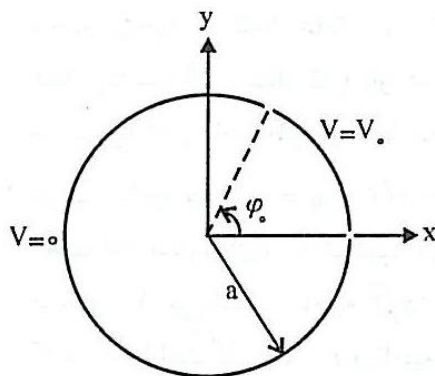
$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \quad (\text{ب})$$

$$= -\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\gamma V_0}{\pi} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{\gamma m} \left(\frac{1}{r} \right) (\sin \gamma m \varphi \hat{a}_r + \cos \gamma m \varphi \hat{a}_\varphi), \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\gamma}$$

$$\rho_S = D \cdot \hat{a}_n = \epsilon_0 E \cdot \hat{a}_n, \quad \hat{a}_n = -\hat{a}_r \quad r=a \quad \text{روی سطح}$$

$$\rho_S = -\epsilon_0 E_r(a, \varphi) = \epsilon_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\gamma V_0}{\pi} \right) \left(\frac{a}{a} \right)^{\gamma m} \left(\frac{1}{a} \right) \sin \gamma m \varphi$$

$$= \frac{\gamma \epsilon_0 V_0}{\pi a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \gamma m \varphi, \quad r=a, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{\gamma}$$



شکل ۴-۲۲

۱۰. یک سطح استوانه‌ای بینهایت طویل با سطح مقطع دایره‌ای شکل به دو قسمت تقسیم می‌شود. یک قسمت محدود به $0 < \varphi < \varphi_0$ دارای پتانسیل V_0 و قسمت دیگر محدود به $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ دارای پتانسیل صفر می‌باشد. شعاع استوانه برابر a و فضای درون و بیرون استوانه خلأ فرض می‌شود. شکل ۴-۲۲ سطح مقطع استوانه و پتانسیل‌های دو قسمت آن را نشان می‌دهد. تابع پتانسیل را در کلیه نقاط فضا (هم در درون و هم در بیرون سطح استوانه‌ای) تعیین نمایید.

۱۰. روشن است که پتانسیل فقط تابعی از r و φ است. برای نقاط درون سطح استوانه‌ای:

$$V(r, \varphi) = (Ar^n + Br^{-n})(C \sin n\varphi + D \cos n\varphi), \quad r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

برای آنکه پتانسیل روی محور استوانه محدود باشد ($r=0$) لازم است که $B=0$ باشد. توجه کنید که $n > 0$ فرض می‌شود. با معرفی ضرایب $A_n = AC$ و $B_n = AD$ ، داریم:

$$V(r, \varphi) = r^n (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi)$$

شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

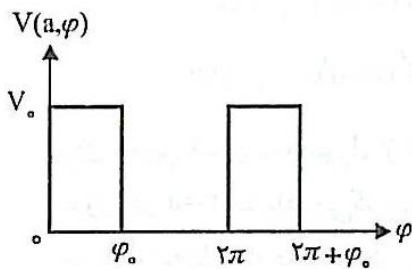
$$V = V_0, \quad r=a, \quad 0 < \varphi < \varphi_0. \quad (1)$$

$$V = 0, \quad r=a, \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi \quad (2)$$

تابع پتانسیل بالا در شکل موجود نمی‌تواند شرایط مذکور را برآورده سازد. از این رو، شکل کلی پاسخ را به صورت یک سری بینهایت در نظر می‌گیریم.

$$V(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi)$$

$$V(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi) \quad (1)$$



شکل پ-۳۲

برای تعیین ضرایب A_n و B_n بسط سری فوریه $V(a, \varphi)$ ، که تغییرات آن برحسب φ در شکل پ-۳۲ نشان داده شده است، را به دست می‌آوریم.

$$V(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \sin n\varphi + \bar{B}_n \cos n\varphi \quad (2)$$

$$\bar{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} V_0 \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{V_0}{n\pi} (1 - \cos n\varphi_0), \quad n \geq 0$$

$$\bar{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} V_0 \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{V_0}{n\pi} \sin n\varphi_0, \quad n \geq 1$$

$$\bar{B}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi_0} V_0 \, d\varphi = \frac{V_0 \varphi_0}{2\pi}$$

از مقایسه سریهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$B_n = \bar{B}_n = \frac{V_0 \varphi_0}{\gamma \pi}, \quad B_n = \frac{\bar{B}_n}{a^n} = \frac{V_0}{\pi} \frac{\sin n \varphi_0}{n a^n}, \quad n \geq 1, \quad A_n = \frac{\bar{A}_n}{a^n} = \frac{V_0}{\pi} \frac{(1 - \cos n \varphi_0)}{n a^n}, \quad n \geq 0.$$

سرانجام:

$$V(r, \varphi) = \frac{V_0 \varphi_0}{\gamma \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_0}{n \pi} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^n [(1 - \cos n \varphi_0) \sin n \varphi + \sin n \varphi_0 \cos n \varphi]$$

$$V(r, \varphi) = \frac{V_0}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_0}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \left[\frac{\sin \left(\frac{n \varphi_0}{\gamma} \right)}{n} \right] \cos \left[n \left(\varphi - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \right] \right\}, \quad r \leq a$$

برای نقاط بیرون سطح استوانه‌ای، تنها تفاوت با حالت قبل این است که پتانسیل باید وقتی که $r \rightarrow \infty$ محدود باشد. لازمه برآورده شدن این شرط آن است که در شروع کار A را به جای B برابر صفر قرار دهیم. سایر شرایط و محاسبات عیناً مانند حالت قبل هستند. کمی دقت نشان می‌دهد که پاسخ این حالت را می‌توان با جایگزین نمودن n با $-n$ از پاسخ حالت قبل به دست آورد. یعنی،

$$V(r, \varphi) = \frac{V_0}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_0}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \left[\frac{\sin \left(\frac{n \varphi_0}{\gamma} \right)}{n} \right] \cos \left[n \left(\varphi - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \right] \right\}, \quad r \geq a$$

(۱۲) در یک محفظه نیم‌کروی پتانسیل سطح کروی برابر

$$V = V_0 \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{\gamma}, \quad r = a$$

و پتانسیل صفحه مسطح (قاعده محفظه) برابر صفر می‌باشد. پتانسیل نقاط درون محفظه را تعیین نمایید.

۱۲. روشن است که تابع پتانسیل به φ بستگی ندارد و با توجه به رابطه ۴-۸۰ می توان نوشت:

$$V(r, \theta) = [Ar^n + Br^{-(n+1)}]P_n(\cos \theta)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V = V_0 \cos \theta, \quad r=a, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$V = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (۲)$$

$$\text{اعمال شرط ۱: } V_0 \cos \theta = [Aa^n + Ba^{-(n+1)}]P_n(\cos \theta)$$

برقراری رابطه بالا مستلزم آن است که $P_n(\cos \theta) = \cos \theta$ ، یعنی $n=1$ ، آنگاه:

$$V_0 = \left(Aa + \frac{B}{a^2} \right) \quad (۱)$$

$$\text{اعمال شرط ۲: } 0 = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \frac{\pi}{2}$$

برای اینکه رابطه بالا در $r=0$ برقرار باشد لازم است که $B=0$ باشد. آنگاه از رابطه (۱)، $A = \frac{V_0}{a}$ است و داریم:

$$V(r, \theta) = V_0 \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

۱۴. کره‌ای از جنس هادی کامل و به شعاع a در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0 \hat{a}_z$ ، مطابق شکل ۴-۹-الف، قرار داده می شود. میدان الکتریکی را در فضای اطراف کره هادی تعیین نمایید.

۱۴. تابع پتانسیل را به شکل کلی زیر در نظر می گیریم:

$$V(r, \theta) = [Ar^n + Br^{-(n+1)}]P_n(\cos \theta), \quad r \geq a$$

ضرایب مجهول را با استفاده از خواص تابع پتانسیل در $r = \infty$ و شرایط مرزی در $r=a$ به دست می آوریم. وقتی که $r \rightarrow \infty$ پتانسیل باید شکل اولیه خود را (که در صورت عدم حضور کره هادی وجود می داشت) باز یابد. این خصوصیت با آنچه که در مورد یک کره عایق در مثال ۴-۹ داشتیم تفاوتی ندارد. یعنی:

$$V(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 r \cos \theta$$

یا

$$Ar^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta, \quad (r \rightarrow \infty)$$

رابطه بالا فقط وقتی برقرار است که $n=1$ و $A = -E_0$ باشد. آنگاه $V(r, \theta) = \left(-E_0 r + \frac{B}{r^2}\right) \cos \theta$ شرط مرزی در $r=a$ عبارت است از $E_r = E_\theta = 0$. بنابراین برحسب پتانسیل داریم:

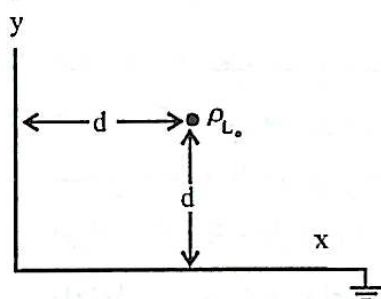
$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{r=a} = 0$$

$$\left. \frac{1}{r} \left(-E_0 r + \frac{B}{r^2}\right) \sin \theta \right|_{r=a} = \frac{1}{a} \left(-E_0 a + \frac{B}{a^2}\right) \sin \theta = 0 \Rightarrow B = E_0 a^3$$

سرانجام:

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) \cos \theta, \quad r \geq a$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{a}}_\theta = E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta, \quad r \geq a$$

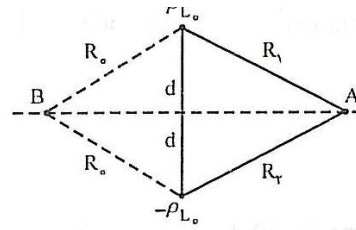


شکل ۴-۲۳

۱۵. یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع یکنواخت ρ_L به فاصله d از یک صفحه هادی بینهایت زمین شده قرار دارد. الف) نشان دهید که تصویر خط بار در صفحه هادی، خط بار دیگری با چگالی توزیع $-\rho_L$ ، موازی با خط بار اصلی و به فاصله d در طرف دیگر صفحه هادی است.

ب) سیستمی متشکل از دو نیم صفحه هادی زمین شده و عمود بر هم و یک خط بار بینهایت با چگالی توزیع یکنواخت ρ_L و موازی با نیم صفحه‌ها، مطابق شکل ۴-۲۳، در نظر می‌گیریم. خط بار از نقطه $(0, d, 0)$ می‌گذرد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات (a, a, z) محاسبه نمایید ($a > 0$ و $d > 0$).

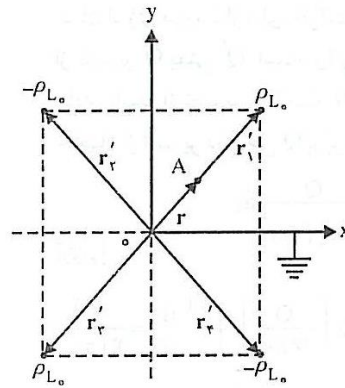
۱۵. الف) کافی است نشان دهیم خط بار و تصویرش تولید پتانسیل صفر در یک نقطه دلخواه مانند A در محل صفحه هادی می نمایند (شکل پ-۳۳). مبنای پتانسیل را نقطه‌ای مانند B به فاصله یکسان R_0 از دو خط بار در نظر می‌گیریم. آنگاه با استفاده از رابطه ۱۰۲-۲ می‌توان نوشت:



شکل پ-۳۳

$$V_A = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{-\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_0} = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{R_1}{R_2} = 1$$

ب) دو نیم صفحه عمود برهم هادی را می‌توان با سه تصویر مطابق شکل پ-۳۴ جایگزین نمود. میدان کل در نقطه $A(a, a, z)$ حاصل جمع میدانهای چهار خط بار (خط بار اولیه و سه تصویر آن) است. چون نیم صفحه‌های هادی، خط بار و تصاویر آن در امتداد محور z از هر دو طرف تا بینهایت ادامه دارند، میدان الکتریکی تابعی از z نخواهد بود و می‌توان محاسبات را به ازای هر مقدار دلخواه z، مثلاً $z=0$ ، انجام داد.



شکل پ-۳۴

$$E = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4|^3} \right]$$

$$\mathbf{r} = a(\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y)$$

$$\mathbf{r}'_1 = d(\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y), \quad \mathbf{r}'_2 = d(-\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y), \quad \mathbf{r}'_3 = -d(\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y), \quad \mathbf{r}'_4 = d(\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3 = |\hat{\mathbf{a}}_x(a-d) + \hat{\mathbf{a}}_y(a-d)|^3 = 2(a-d)^3$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|^3 = |\hat{\mathbf{a}}_x(a+d) + \hat{\mathbf{a}}_y(a-d)|^3 = (a+d)^3 + (a-d)^3 = 2(a^3 + d^3)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3|^3 = |\hat{\mathbf{a}}_x(a+d) + \hat{\mathbf{a}}_y(a+d)|^3 = 2(a+d)^3$$

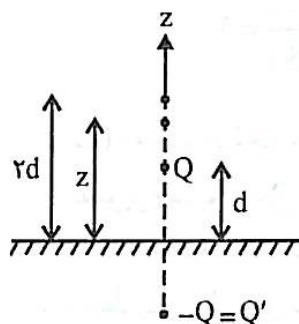
$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4|^3 = |(a-d)\hat{\mathbf{a}}_x + (a+d)\hat{\mathbf{a}}_y|^3 = (a-d)^3 + (a+d)^3 = 2(a^3 + d^3)$$

$$E = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(a-d)(\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y)}{2(a-d)^3} - \frac{(a+d)\hat{\mathbf{a}}_x + (a-d)\hat{\mathbf{a}}_y}{2(a^3 + d^3)} + \frac{(a+d)(\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y)}{2(a+d)^3} - \frac{(a-d)\hat{\mathbf{a}}_x + (a+d)\hat{\mathbf{a}}_y}{2(a^3 + d^3)} \right]$$

$$= \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{a-d} + \frac{1}{a+d} \right) (\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y) - \frac{2a(\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y)}{a^3 + d^3} \right]$$

$$E(a, a, z) = \frac{\rho_{L_0}}{\pi\epsilon_0} \frac{ad^3}{(a^3 - d^3)(a^3 + d^3)} (\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y)$$

۱۶. بار نقطه‌ای Q به فاصله d از یک صفحه هادی بینهایت قرار دارد. چه مقدار انرژی باید صرف شود برای اینکه بار Q به نقطه‌ای به فاصله $2d$ از صفحه هادی انتقال یابد؟ مسیر حرکت بار نقطه‌ای را در امتداد عمود بر صفحه فرض کنید.



شکل پ-۳۵

۱۶. انرژی لازم برای دور نمودن بار نقطه‌ای Q از صفحه هادی در حقیقت همان انرژی مورد نیاز برای حرکت دادن Q در میدان الکتریکی ناشی از تصویر Q' یعنی Q است. وقتی که بار Q به فاصله z از صفحه هادی باشد، از تصویرش فاصله $2z$ دارد (شکل پ-۳۵). آنگاه میدان حاصل از تصویر در محل Q برابر است با:

$$E = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (2z)^2} \hat{a}_z$$

آنگاه:

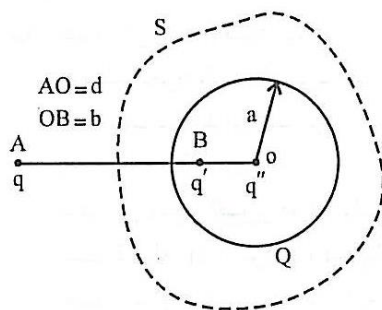
$$W = -Q \int_d^{2d} E \cdot dL = Q \left(\frac{Q}{16\pi\epsilon_0} \right) \int_d^{2d} \frac{dz}{z^2} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 d}$$

۱۷. بار نقطه‌ای q به فاصله d از مرکز کره‌ای هادی به شعاع a قرار دارد ($d > a$). کره هادی، باری به مقدار کل Q روی سطح خود دارد. مطلوب است:

الف) مکان و مقدار دو بار نقطه‌ای به طوری که بتوان آنها را با کره جایگزین کرد بدون آنکه تغییری در پتانسیل ناشی از این سیستم در فضای اطراف کره پدید آید؛

ب) محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی در فضای اطراف کره،

ج) تعیین پتانسیل کره.



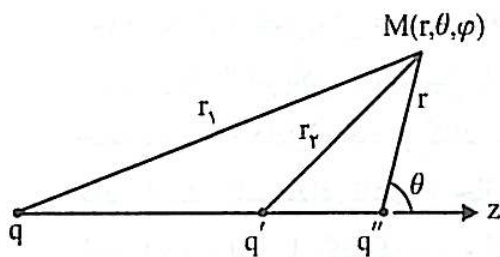
شکل پ-۳۶

۱۷. الف) دو بار تصویر q' و q'' همراه با بار q (شکل پ-۳۶) باید سطح هم‌پتانسیلی در محل سطح کره به وجود آورند. می‌دانیم که بار q و تصویر آن q' $\left(b = \frac{a^2}{d}, q' = -\frac{a}{d}q \right)$ سطح هم‌پتانسیلی با پتانسیل صفر در محل سطح کره ایجاد می‌کنند. از طرف دیگر چون q'' در مرکز کره واقع است، این بار تصویر نیز سطح هم‌پتانسیلی در محل سطح کره پدید

می‌آورد. بدین ترتیب هم‌پتانسیل بودن سطح کره محقق است و مقدار و مکان بار q' نیز مشخص است. برای تعیین مقدار q'' این‌طور استدلال می‌کنیم که بار نقطه‌ای q و کره هادی با بار Q در فضای اطراف کره همان میدانی را به وجود می‌آورند که سه بار نقطه‌ای q ، q' و q'' ایجاد می‌نمایند. بنابراین اعمال قانون گوس، روی سطح بسته‌ای که کره هادی را در برگیرد ولی بار نقطه‌ای q را شامل نشود، در سیستم اصلی و معادل آن باید نتایج یکسانی داشته باشد.

$$\oint_S \epsilon_0 E \cdot dS = Q = q' + q''$$

$$q'' = Q - q' = Q + \frac{a}{d}q$$



شکل پ-۳۷

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right)$$

با معلوم بودن r_1, r_2, r و q, q', q'' تابع پتانسیل به طور کامل مشخص است.

$$E = -\nabla V = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{a}_\theta \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{q(r+d\cos\theta)}{r_1^3} + \frac{q'(r+b\cos\theta)}{r_2^3} + \frac{q''}{r^3} \right] \hat{a}_r - \left[\frac{q d \sin\theta}{r_1^3} + \frac{q' b \sin\theta}{r_2^3} \right] \hat{a}_\theta \right\}$$

با معلوم بودن r_1 و r_2 برحسب r و θ و نیز q' و q'' ، میدان الکتریکی به طور کامل مشخص است. (ج) چون q و q' در محل کره، پتانسیل صفر تولید می کنند، پتانسیل کره همان پتانسیل ناشی از بار q'' در $r=a$ است.

$$V_{\text{کره}} = \frac{Q + \frac{a}{d}q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{d} \right)$$

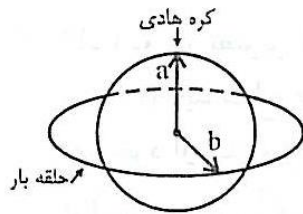
محاسبه V در $r=a$ نیز دقیقاً همین نتیجه را می دهد.

۱۸. سیستمی متشکل از یک کره هادی به شعاع a و یک حلقه بار الکتریکی که هم مرکز با کره هادی است در نظر می گیریم. حلقه بار دارای چگالی توزیع یکنواخت ρ_L و شعاع b ($a < b$) می باشد. برای سادگی، حلقه بار در صفحه xy و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات در نظر گرفته می شود. فضای اطراف حلقه بار و کره هادی را خلأ فرا گرفته است. ابتدا فرض می شود که کره هادی زمین شده باشد. مطلوب است:

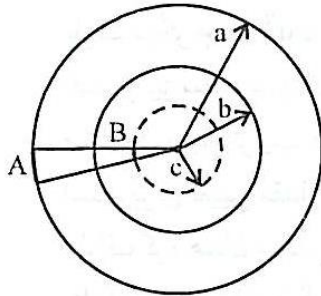
الف) تعیین تصویر حلقه بار در کره هادی (چگالی توزیع و موقعیت تصویر)،

ب) محاسبه پتانسیل در نقطه $A(0, 0, z)$ روی محور z ،

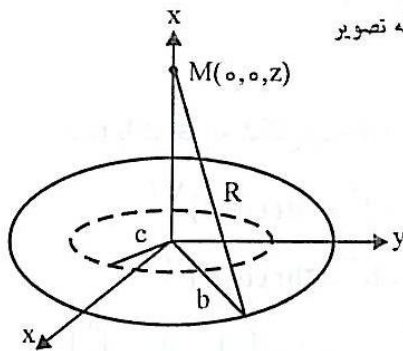
ج) محاسبه پتانسیل کره هادی در صورتی که کره از ابتدا زمین نشده باشد.



شکل پ-۳۸



شکل پ-۳۹



شکل پ-۴۰

۱۸. الف) با توجه به شکل‌های پ-۳۸ و پ-۳۹، یک عنصر بار از حلقه را در نقطه دلخواه A در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن این عنصر بار به عنوان یک بار نقطه‌ای، تصویر آن عنصر باری در نقطه B خواهد بود. با توجه به اینکه عنصر بار واقع در A برابر $dq = \rho_L b d\varphi$ است، مقدار بار عنصر تصویر در B برابر با $dq' = -\frac{a}{b} dq = -a\rho_L d\varphi$ است. فاصله dq' از مرکز کره (c) برابر با $c = a^2/b$ است. حال اگر تصاویر سایر عناصر حلقه بار را به همین ترتیب به دست آوریم، عناصر تصویر خود تشکیل یک حلقه بار می‌دهند که شعاع آن c، مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات (مرکز کره هادی) و واقع در صفحه حلقه بار (صفحه xy) است. برای محاسبه چگالی توزیع بار روی حلقه تصویر داریم:

$$Q' = \int dq' = - \int_0^{2\pi} a\rho_L d\varphi = -2\pi a\rho_L.$$

$$\rho'_L = \frac{Q'}{2\pi c} = \frac{-2\pi a\rho_L}{2\pi c} = -\frac{b}{a}\rho_L.$$

ب) حلقه بار و تصویرش در فضای اطراف کره هادی ($r > a$) همان میدان الکتریکی و پتانسیل را به وجود می‌آورند که حلقه بار و کره هادی ایجاد می‌کنند. بنابراین برای $|z| > a$ ، کافی است پتانسیل‌های ناشی از حلقه بار و تصویرش را در نقطه $M(0,0,z)$ با یکدیگر جمع کنیم (شکل پ-۴۰). پتانسیل ناشی از حلقه بار به شعاع b برابر است با:

$$V_1(0,0,z) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_{L.} b d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{b^2+z^2}} = \frac{\rho_{L.} b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2+z^2}}$$

به همین ترتیب پتانسیل ناشی از حلقه بار تصویر، $V_2(0,0,z)$ عبارت است از:

$$V_2(0,0,z) = \frac{\rho'_{L.} c}{2\epsilon_0 \sqrt{c^2+z^2}}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho_{L.} b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2+z^2}} + \frac{\rho'_{L.} c}{2\epsilon_0 \sqrt{c^2+z^2}}$$

$$V(0,0,z) = \frac{\rho_{L.}}{2\epsilon_0} \left[\frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{a}{\sqrt{(a^2/b)^2+z^2}} \right], \quad |z| > a$$

ج) در صورتی که کره هادی از ابتدا زمین نشده بود، علاوه بر تصویری که در بند (الف) مورد بحث قرار گرفت تصویر دیگری به صورت بار نقطه‌ای Q'' باید در مرکز کره در نظر بگیریم. آنگاه میدان الکتریکی و پتانسیل در فضای اطراف کره هادی برابر با میدان و پتانسیلی است که حلقه بار $\rho_{L.}$ و تصویرش با چگالی $\rho'_{L.}$ و بار تصویر Q'' ایجاد می‌کنند. برای تعیین بار نقطه‌ای Q'' ، قانون گوس را به کار می‌بریم و سطح بسته S را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که کره هادی را شامل شود، ولی حلقه بار را در بر نگیرد. آنگاه:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S \text{ بار محصور در } S = Q' + Q''$$

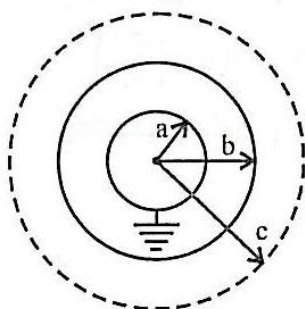
در نتیجه:

$$Q'' = -Q' = 2\pi a \rho_{L.}$$

آنگاه پتانسیل کره، که همان پتانسیل ناشی از Q'' در فاصله $r=a$ است، عبارت است از:

$$V_a = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\rho_{L.}}{2\epsilon_0}$$

(۱۹) بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_s روی یک سطح کروی به شعاع b توزیع شده است. هم‌مرکز با این توزیع بار یک کره هادی زمین شده به شعاع a قرار داده می‌شود. چه مقدار انرژی لازم است تا توزیع بار مزبور انبساط یابد و روی سطح کره‌ای به شعاع c قرار بگیرد؟ فضای اطراف کره هادی را خلا تشکیل می‌دهد ($a < b < c$).



شکل پ-۴۱

۱۹. انرژی الکتریکی ذخیره شده در سیستم را قبل و بعد از انبساط بار محاسبه می‌کنیم. تفاوت این دو انرژی مقدار انرژی مورد نیاز را نشان می‌دهد (شکل پ-۴۱). چون کره هادی زمین شده است باری به مقدار Q' روی آن جمع می‌شود. برای تعیین بار Q' پتانسیلها را در $r=b$ نسبت به کره هادی زمین شده و نسبت به بینهایت مساوی قرار می‌دهیم. برای این منظور ابتدا میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم.

$$E = \begin{cases} \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ \frac{Q+Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > b \end{cases} ; Q = 4\pi b^2 \rho_s$$

$$V_b = \int_b^\infty E \cdot dL = \int_b^a E \cdot dL \Rightarrow \frac{Q+Q'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^\infty = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^a$$

$$(Q+Q') \left(\frac{1}{b} \right) = Q' \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow Q' = -\frac{a}{b} Q$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_S \rho_s V dS = \frac{1}{2} \int_{S_b} \rho_s V_b dS + \frac{1}{2} \int_{S_a} \rho'_s V_a dS = \frac{1}{2} Q V_b$$

اما:

$$V_b = (Q+Q') / 4\pi\epsilon_0 b = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

$$W_1 = \frac{Q^2 (b-a)}{8\pi\epsilon_0 b^2}$$

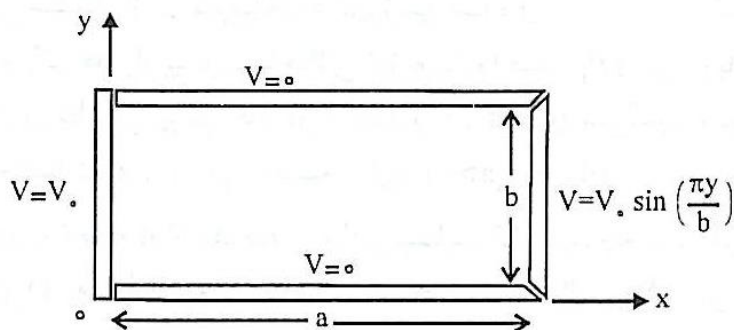
به همین ترتیب می‌توان نشان داد که انرژی ذخیره شده بعد از انبساط بار برابر است با:

$$W_2 = \frac{Q^2 (c-a)}{8\pi\epsilon_0 c^2}$$

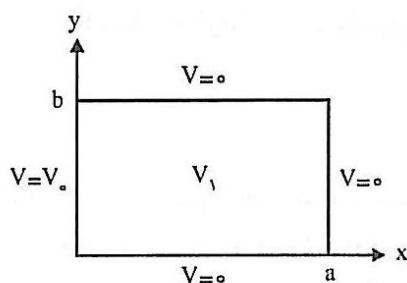
$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{b-a}{b^2} - \frac{c-a}{c^2} \right]$$

$$\Delta W = \left(\frac{4\pi}{\epsilon_0} \right) (\rho_s b^2)^2 \left[\frac{b-a}{b^2} - \frac{c-a}{c^2} \right]$$

۲۰. شکل ۴-۲۴ سطح مقطع یک فضای مستطیلی شکل محدود به سه سطح هادی در $x=0$ ، $y=0$ و $y=b$ و یک سطح مجازی در $x=a$ را نشان می‌دهد. پتانسیل سطح هادی در $x=0$ برابر V_0 ، پتانسیل سطوح $y=0$ و $y=b$ برابر صفر و پتانسیل در امتداد سطح $x=a$ به صورت $V_0 \sin(\pi y/b)$ فرض می‌شود. تابع پتانسیل را در درون فضای مستطیلی شکل تعیین نمایید. راهنمایی: ثابت کنید که اصل جمع آثار را می‌توان برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس به کار برد.



شکل ۴-۲۴



شکل پ-۴۲-الف

۲۰. ابتدا نشان می‌دهیم که تابع پتانسیل مساوی مجموع پتانسیلهای V_1 (به منزله پاسخ وقتی که تنها شرط مرزی غیر صفر $V = V_0$ ، $x=0$) و V_2 (به عنوان پاسخ وقتی که تنها شرط مرزی غیر صفر $x=0$ برای $V = V_0 \sin(\frac{\pi y}{b})$) است (شکل پ-۴۲). برای پتانسیلهای V_1 و V_2 داریم:

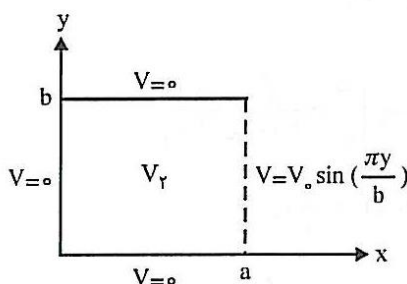
$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$V_1 = V_0, \quad x=0, \quad 0 < y < b$$

$$V_1 = 0, \quad x=a, \quad 0 < y < b$$

$$V_1 = 0, \quad y=0, \quad 0 < x < a$$

$$V_1 = 0, \quad y=b, \quad 0 < x < a$$



شکل پ-۴۲-ب

$$\nabla^2 V_2 = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$V_2 = 0, \quad x=0, \quad 0 < y < b$$

$$V_2 = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad x=a, \quad 0 < y < b$$

$$V_2 = 0, \quad y=0, \quad 0 < x < a$$

$$V_2 = 0, \quad y=b, \quad 0 < x < a$$

حال نشان می‌دهیم که $V_1 + V_2$ هم در معادله لاپلاس صدق می‌کند و هم شرایط مرزی کلی مسئله را برآورده می‌سازد. در آن صورت $V = V_1 + V_2$ پاسخ مسئله است.

معادله لاپلاس صادق است ، $\nabla^2 V_1 + \nabla^2 V_2 = \nabla^2 (V_1 + V_2) = 0$

$$V_1 + V_2 = V_0 + 0 = V_0, \quad x = 0, \quad 0 < y < b$$

$$V_1 + V_2 = 0 + V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad x = a, \quad 0 < y < b$$

$$V_1 + V_2 = 0 + 0 = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < a$$

$$V_1 + V_2 = 0 + 0 = 0, \quad y = b, \quad 0 < x < a$$

ملاحظه می شود که $V = V_1 + V_2$ در معادله لاپلاس صدق می کند و شرایط مرزی را نیز برآور می سازد، بنابراین تنها پاسخ است. حال V_1 و V_2 را جداگانه به دست می آوریم.

$$V_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin k_n y + B_n \cos k_n y) (C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x})$$

$$V_1 = 0, \quad y = 0 \Rightarrow B_n (C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x}) = 0, \quad B_n = 0$$

$$V_1 = 0, \quad y = b \Rightarrow A_n \sin(k_n b) (C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x}) = 0, \quad k_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$V_1 = 0, \quad x = a \Rightarrow A_n \sin(k_n y) (C_n e^{k_n a} + D_n e^{-k_n a}) = 0, \quad D_n = -C_n e^{2k_n a}$$

با به کار بردن نتایج فوق، تابع پتانسیل در این مرحله به صورت زیر نوشته می شود:

$$V_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right]$$

که $\bar{A}_n = 2 A_n C_n e^{k_n a}$ است.

حال آخرین شرط مرزی بر V_1 را اعمال می کنیم.

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} -\bar{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ و انتگرال گرفتن از صفر تا b ، داریم:

$$V_0 \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} -\bar{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy$$

با توجه به روابط ۳۵-۴ تا ۳۸-۴ داریم:

$$\bar{A}_n = \begin{cases} -\frac{4 V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

زوج n

$$V_1(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{4 V_0}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

پتانسیل V_y را در مسئله ۳ محاسبه نموده‌ایم. نتیجه عبارت است از:

$$V_y(x,y) = V \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}$$

سرانجام:

$$V(x,y) = V_1(x,y) + V_y(x,y)$$

$$V(x,y) = V \cdot \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \left[\frac{1}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{b}(a-x)\right) + \sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right) \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots} \left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]}{\sinh\left[\frac{n\pi a}{b}\right]} \right\}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

(۲) یک جعبه مکعب مستطیل، که کلیه وجوه آن از صفحات هادی تشکیل شده باشند، را در نظر بگیرید. پتانسیل سطح $z=c$ برابر V_0 و پتانسیل هر یک از وجوه دیگر برابر صفر است. تابع پتانسیل را در نقاط درون جعبه تعیین نمایید.

۲۱. تابع سه بُعدی پتانسیل را به صورت حاصل ضرب سه تابع به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

آنگاه:

$$\nabla^2 V = YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

با تقسیم طرفین رابطه بر XYZ ، داریم:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

بدیهی است که معادله بالا فقط وقتی برقرار است که هر جمله برابر مقدار ثابتی باشد. در این صورت معادله بالا به سه معادله تجزیه می‌گردد که همگی شکل عمومی یکسانی دارند و پاسخهای آنها نیز از یک خانواده خواهند بود. به عنوان مثال اگر جمله اول را برابر $-k_x^2$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

در صورتی که به جای $-k_x^2$ مقدار ثابت را به صورت k_x^2 در نظر بگیریم (شرایط مسئله مشخص می‌کند که $-k_x^2$ یا k_x^2 انتخاب گردد)، آنگاه:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k_x^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A' e^{k_x x} + B' e^{-k_x x}$$

نتایج مشابهی را می‌توان برای $Y(y)$ و $Z(z)$ به دست آورد. در اینجا از شرایط مرزی مسئله این طور استنباط می‌کنیم که چون دو صفر در جهات x و y داریم، تغییرات سینوسی بر حسب x و y محتمل تر از تغییرات نمایی است. در جهت z چنین ویژگی وجود ندارد و تغییرات نمایی خواهند بود. با این توضیحات، تابع پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$V(x,y,z) = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) (C \sin k_y y + D \cos k_y y) (E e^{k_z z} + F e^{-k_z z})$$

که،

$$k_z^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0$$

شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$V = 0, \quad x = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad (1)$$

$$V = 0, \quad x = a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad (2)$$

$$V = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c \quad (3)$$

$$V = 0, \quad y = b, \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c \quad (4)$$

$$V = 0, \quad z = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (5)$$

$$V = V_0, \quad z = c, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (6)$$

۱ اعمال شرط: $(0 + B) Y(y) Z(z) = 0 \Rightarrow B = 0$

۲ اعمال شرط: $A \sin k_x a Y(y) Z(z) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

۳ اعمال شرط: $A \sin k_x x (0 + D) Z(z) = 0 \Rightarrow D = 0$

۴ اعمال شرط: $(A \sin k_x x) (C \sin k_y b) Z(z) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$

۵ اعمال شرط: $(A \sin k_x x) (C \sin k_y y) (E + F) = 0 \Rightarrow F = -E$

در ضمن با داشتن k_x و k_y ، مقدار k_z عبارت است از:

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

در این مرحله تابع پتانسیل به صورت زیر خلاصه می شود:

$$V(x,y,z) = \bar{A}_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(k_z z)$$

که $\bar{A}_{nm} = 2ACE$ ثابت جدیدی است. شرط مرزی (۶) در شکل کنونی پاسخ صدق نخواهد کرد. برای رفع این مشکل، شکل نهایی پاسخ را به صورت یک سری دوگانه بینهایت در نظر می گیریم.

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(k_z z)$$

۶ اعمال شرط: $V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{nm} \sinh(k_z c) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

برای تعیین ضرایب $\bar{A}_{nm}$ طرفین را در $\sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right)$ ضرب کرده و نسبت به x از صفر تا a و نسبت به y از صفر تا b انتگرال می گیریم.

$$\int_0^a \int_0^b V_0 \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) dx dy =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_{nm} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) dy$$

که $\hat{A}_{nm} = \bar{A}_{nm} \sinh(k_z c)$ است.

$$\text{سمت چپ رابطه} = \begin{cases} \frac{4 V_0 ab}{m' n' \pi^2} & \text{فرد } m', n' \\ 0 & \text{زوج } m' n' \end{cases}$$

$$\text{سمت راست رابطه} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \text{ یا } m \neq m' \\ \frac{ab}{4} \hat{A}_{nm} & n = n', m = m' \end{cases}$$

با ترکیب نتایج فوق، داریم:

$$\bar{A}_{nm} = \begin{cases} \left(\frac{16 V_0}{\pi^2} \right) / (mn \sinh(k_z c)) & \text{فرد } m, n \\ 0 & \text{زوج } mn \end{cases}$$

سرانجام:

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \left[\frac{16 V_0}{mn \pi^2 \sinh\left[c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \right]} \right]$$

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right], \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c \end{matrix}$$

۲۲. یک بار الکتریکی با چگالی $\rho = k/(r^{5/2})$ در خلأ توزیع شده است. k یک ضریب ثابت و r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی است. تابع پتانسیل ناشی از این توزیع بار را با استفاده از معادله پواسون تعیین نمایید. در تعیین پتانسیل فرض کنید $V \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow \infty$ و $r^2 E_r \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow 0$.

$$\nabla^2 V = -\rho_V / \epsilon_0 = \frac{-k}{\epsilon_0} r^{-5/2} \quad ۲۲$$

$$V = V(r) \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{k}{\epsilon_0} r^{-5/2}$$

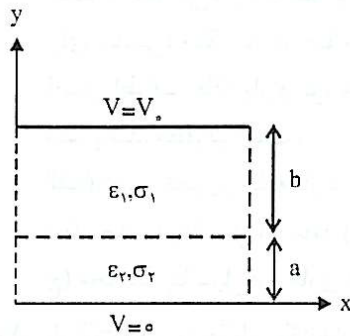
$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{k}{\epsilon_0} r^{-1/2} \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = -\frac{2k}{\epsilon_0} r^{1/2} + K_1$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{2k}{\epsilon_0} r^{-3/2} + \frac{K_1}{r^2}, \quad K_1 = \text{مقدار ثابت}$$

$$V(r) = \frac{4k}{\epsilon_0} r^{-1/2} - \frac{K_1}{r} + K_2, \quad K_2 = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow V(r=\infty) = K_2 \rightarrow 0 \Rightarrow K_2 = 0$$

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r = \frac{\gamma k}{\epsilon_0} r^{-\gamma/2} - \frac{K_1}{r^2} \Rightarrow r^2 E_r = \frac{\gamma k}{\epsilon_0} r^{\frac{1}{2}} - K_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow K_1 = 0$$

$$V(r) = \frac{\gamma k}{\epsilon_0 \sqrt{r}}$$



شکل ۴-۲۵

(۲۳) فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی را دو ماده، یکی با قابلیت گذردهی ϵ_1 و رسانایی σ_1 و دیگری با قابلیت گذردهی ϵ_2 و رسانایی σ_2 ، مطابق شکل ۴-۲۵، پر کرده‌اند. پتانسیل صفحه هادی فوقانی برابر V_0 و پتانسیل صفحه هادی تحتانی برابر صفر می‌باشد. مطلوب است محاسبه:
الف) تابع تغییرات پتانسیل در کلیه نقاط بین دو صفحه هادی،
ب) مقاومت سیستم به ازای واحد سطح صفحات هادی،
ج) ظرفیت سیستم به ازای واحد سطح صفحات هادی.

۲۳. الف) معادله لاپلاس در هر دو ناحیه برقرار است، زیرا جریان ایجاد شده یکنواخت و ساکن است (فقط ساکن بودن آن کافی است) $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot (-\nabla V) = -\sigma \nabla^2 V = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$$

پتانسیل فقط نسبت به y تغییر می‌کند، بنابراین:

$$V(y) = \begin{cases} V_1 = A_1 y + B_1 & a < y < a+b \\ V_2 = A_2 y + B_2 & 0 < y < a \end{cases}$$

شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

$$V_1 = V_0, \quad y = a+b \quad (1)$$

$$V_2 = 0, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$V_1 = V_2, \quad y = a \quad (3)$$

$$\sigma_1 \frac{dV_1}{dy} = \sigma_2 \frac{dV_2}{dy}, \quad y=a; \quad (J_{n1} = J_{n2}, y=a) \quad (4)$$

$$2 \text{ شرط } 0 = 0 + B_2 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$1 \text{ شرط } V_0 = A_1(a+b) + B_1$$

$$3 \text{ شرط } A_1 a + B_1 = A_2 a$$

$$4 \text{ شرط } \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{V_0 \sigma_2}{\sigma_2 b + \sigma_1 a}, B_1 = -\frac{(\sigma_2 - \sigma_1) a V_0}{\sigma_2 b + \sigma_1 a}, A_2 = \frac{V_0 \sigma_1}{\sigma_2 b + \sigma_1 a}$$

بنابراین:

$$V(y) = \begin{cases} \frac{V_0 \sigma_1 y}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} & 0 \leq y \leq a \\ \frac{\sigma_2 y - (\sigma_2 - \sigma_1) a}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} V_0 & a \leq y \leq a+b \end{cases}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{V_0}{J_n(1)} = \frac{V_0}{J_n}, J_n = \sigma_1 \frac{dV_1}{dy} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} V_0 \Rightarrow R = \frac{\sigma_2 b + \sigma_1 a}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{a}{\sigma_2} + \frac{b}{\sigma_1} \quad (\text{ب})$$

$$C = \frac{\gamma W_e}{V_0^2} = \frac{\gamma (W_{e1} + W_{e2})}{V_0^2} = \frac{\epsilon_1 \int_{V_1} |E_1|^2 dV + \epsilon_2 \int_{V_2} |E_2|^2 dV}{V_0^2} \quad (\text{ج})$$

$$|E_1| = \frac{J_n}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} V_0, \quad |E_2| = \frac{J_n}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} V_0.$$

$$\int_{V_1} |E_1|^2 dV = |E_1|^2 b; \quad 1 = \text{حجم مکعب مستطیلی به قاعده واحد سطح و ارتفاع } b \text{ در ناحیه } 1$$

$$\int_{V_2} |E_2|^2 dV = |E_2|^2 a; \quad 2 = \text{حجم مکعب مستطیلی به قاعده واحد سطح و ارتفاع } a \text{ در ناحیه } 2$$

$$C = \frac{\epsilon_1 b |E_1|^2 + \epsilon_2 a |E_2|^2}{V_0^2} = \frac{\epsilon_1 \sigma_2^2 b + \epsilon_2 \sigma_1^2 a}{(\sigma_1 a + \sigma_2 b)^2}$$

۲۴. بار نقطه‌ای Q در درون یک سطح کروی هادی و به فاصله d از مرکز آن قرار دارد. شعاع کره برابر a

و پتانسیل آن برابر صفر فرض می‌شود. مطلوب است:

الف) تعیین تصویر بار نقطه‌ای در کره هادی (مقدار بار و موقعیت تصویر)،

ب) محاسبه تغییرات پتانسیل در درون کره.

۲۴. الف) با توجه به شکل ۴-۱۶-ج، برای دوبار نقطه‌ای Q و Q' (به طوری که Q به فاصله D از مرکز کره هادی باشد و Q' = (-a/D)Q و به فاصله b = a^2/D از مرکز کره باشد) پتانسیل در محل سطح کره صفر است. در این شکل Q بار اصلی در خارج کره و Q' بار تصویر در داخل کره است. به سادگی قابل درک است که اگر Q' نقش بار اصلی را پیدا کند آنگاه Q حکم تصویر را خواهد داشت. بنابراین مقدار و مکان بار تصویر را در مسئله حاضر می‌توان از روابط ۴-۱۲۲ به دست آورد، اگر تبدیلات زیر را انجام دهیم:

$$Q' \rightarrow Q, \quad Q \rightarrow Q', \quad b \rightarrow d, \quad D \rightarrow b$$

آنگاه:

$$Q' = -\frac{a}{D} Q \Rightarrow Q = -\frac{a}{b} Q', \quad b = \frac{a^2}{D} \Rightarrow d = \frac{a^2}{b}$$

$$b = \frac{a^2}{d}, \quad Q' = -\frac{a}{d} Q \quad \text{یا}$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right), \quad r \leq a \quad (\text{ب})$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta)^{1/2}, \quad r_2 = (r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta)^{1/2}$$

که r₁ و r₂ به ترتیب فاصله A از Q و Q' است.

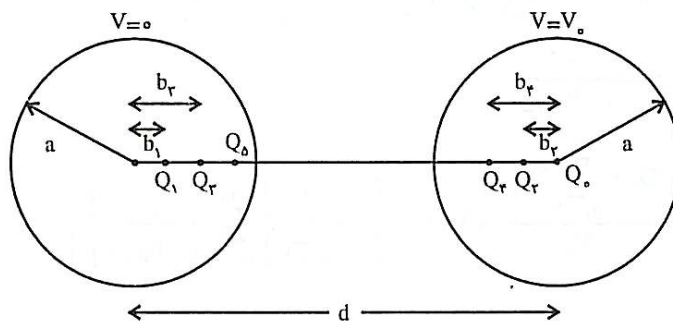
۲۵. دو کره هادی یکسان به شعاع a مفروضند که مراکز آنها به فاصله d از یکدیگر واقع است. پتانسیل یکی از کره‌ها V_0 و پتانسیل دیگری برابر صفر فرض می‌شود.
 الف) دو توزیع بار نقطه‌ای تصویر بیابید که کره‌های هادی را جایگزین نمایند. (یعنی پتانسیل ناشی از این دو بار تصویر فقط در فضای اطراف کره‌ها مساوی پتانسیل ناشی از خود کره‌ها با اختلاف پتانسیل V_0 باشد).
 ب) ظرفیت بین دو کره هادی را به دست آورید.

۲۵. الف) برای تعیین دو توزیع بار نقطه‌ای که کره‌های هادی را جایگزین نمایند، ابتدا مطابق شکل پ-۴۳ بار نقطه‌ای Q_0 را در مرکز کره‌ای که پتانسیل آن V_0 است قرار می‌دهیم. Q_0 را طوری تعیین می‌کنیم که پتانسیل حاصل از آن روی سطح کره برابر V_0 باشد، یعنی:

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow Q_0 = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

برای اینکه پتانسیل در محل سطح کره دیگر (کره سمت چپ شکل پ-۴۳) صفر باشد. لازم است که تصویر Q_1 را در این کره اضافه کنیم. این تصویر را Q_1 می‌نامیم که به فاصله b_1 از مرکز کره سمت چپ است.

$$Q_1 = -\frac{a Q_0}{d}, \quad b_1 = \frac{a^2}{d}$$



شکل پ-۴۳

اما Q_1 در پتانسیل روی سطح کره سمت راست تأثیر می‌گذارد. برای خنثی نمودن این تأثیر باید تصویر Q_2 را در کره سمت راست به سیستم اضافه کنیم. این تصویر را Q_2 می‌نامیم و فاصله آن از مرکز کره سمت راست b_2 است.

$$Q_2 = -\frac{a Q_1}{d - b_1} = -\frac{a^2 Q_0}{d(d - b_1)}, \quad b_2 = \frac{a^2}{d - b_1}$$

ولی باز هم حضور Q_2 روی پتانسیل کره سمت چپ تأثیر می‌گذارد. برای خنثی نمودن این تأثیر باید تصویر Q_3 را در کره سمت چپ به سیستم اضافه کنیم. این تصویر را Q_3 می‌نامیم و فاصله آن را از مرکز کره سمت چپ b_3 در نظر می‌گیریم.

$$Q_3 = -\frac{a Q_2}{d - b_2} = -\frac{a^3 Q_0}{d(d - b_1)(d - b_2)}, \quad b_3 = \frac{a^2}{d - b_2}$$

باز حضور Q_3 در پتانسیل کره سمت راست مؤثر است و ضرورت دارد که تصویر Q_4 را در این کره به سیستم اضافه کنیم این روند تا بینهایت ادامه می‌یابد و سرانجام به دو توزیع بار نقطه‌ای مطلوب می‌انجامد. به طور خلاصه، در کره با پتانسیل $V = V_0$ توزیع زیر را داریم:

$$Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{\gamma m}, \dots$$

که،

$$\begin{cases} Q_{\gamma m} = Q_0 \prod_{n=1}^{\gamma m} \frac{a}{d - b_{n-1}} & m=1,2,3,\dots \text{ به فاصله } b_{\gamma m} \text{ از مرکز کره} \\ b_{\gamma m} = \frac{a^{\gamma}}{d - b_{\gamma m-1}} & b_0 = 0 \end{cases}$$

در کره با پتانسیل $V=0$ توزیع زیر را داریم:

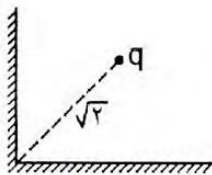
$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{\gamma m-1}, \dots$$

که،

$$\begin{cases} Q_{\gamma m-1} = -Q_0 \prod_{n=1}^{\gamma m-1} \frac{a}{d - b_{n-1}} & m=1,2,3,\dots \text{ به فاصله } b_{\gamma m-1} \text{ از مرکز کره} \\ b_{\gamma m-1} = \frac{a^{\gamma}}{d - b_{\gamma m-2}} \end{cases}$$

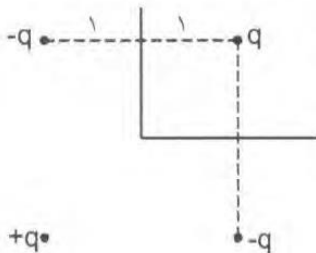
$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} Q_{\gamma m}}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 a \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{n=1}^{\gamma m} \frac{a}{d - b_{n-1}} \right) \right] \quad (ب)$$

۶. صفحات $Z=0$ و $Y=0$ دارای پتانسیل صفر می باشد بار q با فاصله $\sqrt{2}^m$ از مبدأ مختصات در صفحه $X=0$ روی نیمساز YOZ قرار دارد انرژی ذخیره شده الکتریکی کدام است؟



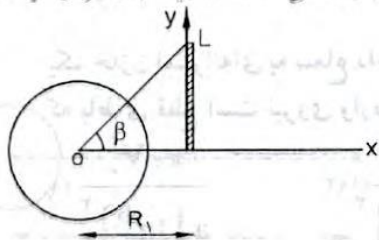
$$\begin{aligned} (1) & \frac{q^2 (1 - 2\sqrt{2})}{16\pi\epsilon_0} \\ (2) & \frac{q^2 (\sqrt{2} - 4)}{32\pi\epsilon_0} \\ (3) & \frac{\sqrt{2} q^2}{16\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

۶. گزینه ۴) تصویر بار q داخل صفحات عمود بر هم سه بار مطابق شکل زیر می باشد. پتانسیل فقط در نقطه q (بار اصلی واقع در ربع اول) وجود دارد پس



$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} q \left[\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2})} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2})} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2\sqrt{2})} \right] \\ &= \frac{1}{2} q \frac{[1 - 2\sqrt{2}] q}{16\pi\epsilon_0 \sqrt{2}} = \frac{q^2 (1 - 2\sqrt{2})}{16\pi\epsilon_0 \sqrt{2}} = \frac{q^2 (\sqrt{2} - 4)}{32\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

۱۱. بار خطی یکنواخت ρ_ℓ روی محور y از $y=0$ تا $y=L$ مفروض است کره فلزی به شعاع a با پتانسیل صفر در فاصله R_1 از بار خطی مطابق شکل مفروض است بطوریکه طول بار خطی تحت زاویه β از مرکز کره دیده می شود بار القائی در کره کدام است؟



$$\begin{aligned} & -a \rho_\ell \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \quad (2) \quad -a \rho_\ell \ln \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \quad (1) \\ & -\rho_\ell a \ln \frac{1 + \cos \beta}{1 + \sin \beta} \quad (4) \quad \frac{-\rho_\ell}{a} \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \quad (3) \end{aligned}$$

۱۱. گزینه (۱) اگر عنصر dy از میله را در نظر بگیریم تصویر آن عبارتست از:

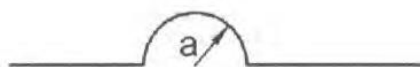
$$dq' = -\rho_\ell dy \times \frac{a}{R} = -\rho_\ell dy \frac{a}{\sqrt{y^2 + R_1^2}}$$

$$q' = \int_0^L -\rho_\ell dy \frac{a}{\sqrt{y^2 + R_1^2}} = -\rho_\ell a \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{y^2 + R_1^2}} = -\rho_\ell a \sinh^{-1} \frac{y}{R_1} \Big|_0^L$$

$$\begin{aligned} & = -\rho_\ell a \sinh^{-1} \frac{L}{R_1} = -\rho_\ell a \ln \left[\frac{L}{R_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R_1} \right)^2} \right] = -\rho_\ell a \ln \left[\tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] \\ & = -\rho_\ell a \ln \left[\frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \right] \end{aligned}$$

۱۹. بار نقطه ای Q در فاصله $d=2a$ از مرکز یک نیمکره بشعاع a که روی یک صفحه مسطح بی نهایت زمین شده می باشد، قرار دارد بار القاء شده روی صفحه مسطح چقدر است (از $r=a$ تا بی نهایت)

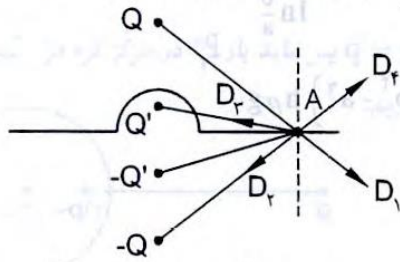
• Q



$$\begin{aligned} & -\frac{Q}{\sqrt{5}} \quad (2) \quad -Q \frac{\sqrt{2}}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-3Q}{2\sqrt{5}} \quad (4) \quad \frac{-3}{4\sqrt{5}} Q \quad (3) \end{aligned}$$

۱۹. گزینه ۴) سه تصویر Q' ، $-Q'$ و $-Q$ که Q' تصویر بار Q در نیمکره، $-Q$ تصویر بار Q در صفحه مسطح و $-Q'$ تصویر Q' در صفحه مسطح است حال مولفه عمودی D را مطابق شکل در نقطه A حساب می‌کنیم که همان ρ_s است.



$$\rho_s = -\frac{Q(a)}{2\pi \left[r^2 + 4a^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q' \left(\frac{a}{2} \right)}{2\pi \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q' = \frac{Q}{2}$$

$$\rho_s = \frac{-Qa}{\pi \left[r^2 + 4a^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Qa}{2\pi \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_e = \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \rho_s ds = \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{-Qa r dr d\phi}{\pi \left[r^2 + 4a^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{Qa r dr d\phi}{2\pi \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_a^\infty \frac{-2Qa r dr}{\left[r^2 + 4a^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \int_a^\infty \frac{Qa r dr}{2 \left[r^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{\frac{3}{2}}} = Qa \left[\frac{2}{\sqrt{r^2 + 4a^2}} \right]_a^\infty - \frac{Qa}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}} \right]_a^\infty$$

$$= Qa \left[-\frac{2}{a\sqrt{5}} \right] - \frac{Qa}{2} \left[-\frac{4}{a\sqrt{5}} \right] = -\frac{2Q}{\sqrt{5}} + \frac{Q}{2\sqrt{5}} = \frac{-4Q + Q}{2\sqrt{5}} = \frac{-3}{2\sqrt{5}} Q$$

۱. بین دو صفحه $Z=0$ و $Z=2$ بار الکتریکی به چگالی $\rho = (Z-1)\epsilon_0$ قرار گرفته است اگر پتانسیل در $Z=0$ برابر صفر و در $Z=2$ برابر ۴ باشد تابع پتانسیل بین دو صفحه کدام است؟

$$\frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{6}Z^3 + \frac{4}{3}Z \quad (۴) \quad \frac{1}{3}Z^2 - \frac{1}{6}Z^3 + \frac{1}{3}Z \quad (۳) \quad \frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{6}Z^3 + \frac{5}{3}Z \quad (۲) \quad \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{4}Z^3 + \frac{4}{3}Z \quad (۱)$$

۱. گزینه ۲) از معادله پواسن استفاده می‌کنیم.

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = 1-Z$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 1-Z \rightarrow \frac{dV}{dz} = Z - \frac{1}{2}Z^2 + C_1 \rightarrow V = \frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{6}Z^3 + C_1 Z + C_2$$

$$V(Z=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad V(Z=2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{6}(2)^3 + 2C_1 = 4 \rightarrow C_1 = \frac{5}{3}$$

$$V = \frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{6}Z^3 + \frac{5}{3}Z$$

۵. بین دو پوسته کروی فلزی هم مرکز اختلاف پتانسیل 270^V برقرار شده است شعاع کره کوچک $a = 10^{\text{cm}}$ و شعاع کره بزرگتر 40^{cm} می‌باشد اگر کره بزرگتر زمین شده باشد پتانسیل در $r = 30^{\text{cm}}$ چقدر است؟

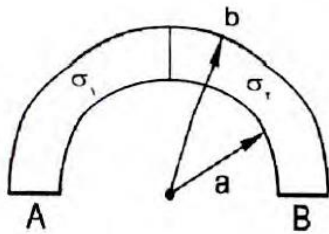
$$15^V \quad (۴) \quad 180^V \quad (۳) \quad 30^V \quad (۲) \quad 135 \quad (۱)$$

۵. گزینه ۲) پتانسیل تابع r است پاسخ معادله لاپلاس بصورت زیر است.

$$V = \frac{A}{r} + B \quad \begin{aligned} V(r=0/1) &= 10A + B = 270 \\ V(r=0/4) &= 2/5A + B = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} A &= 36 \\ B &= -90 \end{aligned}$$

$$V = \frac{36}{r} - 90 \rightarrow V(r=0/3) = \frac{36}{3} - 90 = 30^v$$

۱۰. دو رسانا با ضریب هدایت الکتریکی σ_1 و σ_2 تشکیل یک مقاومت بشکل نیم استوانه مطابق شکل به ضخامت d را داده‌اند. مقاومت الکتریکی بین سطوح A و B کدام است؟

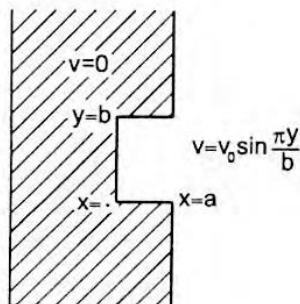


$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2 \ln \frac{b}{a}}{d} \left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right] \quad (2) \quad \frac{2 [\sigma_1 + \sigma_2] \ln \frac{b}{a}}{d(b-a)} \\ (3) \quad & \frac{\pi}{2d \ln \frac{b}{a}} \left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right] \quad (4) \quad \frac{(b-a)}{[\sigma_1 + \sigma_2] \pi (b+a)} \end{aligned}$$

۱۰. گزینه ۴) فرض کنیم $V_A = V_0$ و $V_B = 0$ در اینصورت پتانسیل فقط تابع ϕ است.

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 \phi + B_1 \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \\ V_2 &= A_2 \phi + B_2 \quad \frac{\pi}{2} < \phi < \pi \\ V_1(0) &= V_0 \rightarrow B_1 = V_0 \\ V_1(\pi) &= 0 \rightarrow A_2 \pi + B_2 = 0 \rightarrow A_2 = -\frac{V_0}{\pi} \rightarrow I = \int \int \sigma_1 E_1 ds \\ V_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= V_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow A_1 \frac{\pi}{2} + B_1 = A_2 \frac{\pi}{2} + B_2 \quad A_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{V_0}{\pi} \quad I = \int_a^b \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{V_0}{R \pi} d(R) \\ J_1 &= J_2 \Rightarrow \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \rightarrow \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \\ \bar{E}_1 &= -\nabla V = -\frac{A_1}{R} \\ I &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{[\sigma_1 + \sigma_2]} V_0 d \ln \frac{b}{a} \rightarrow \frac{V_0}{I} = R = \frac{\pi}{2d \ln \frac{b}{a}} \left[\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right] \end{aligned}$$

۱۳. شکافی مستطیل شکل به پهنای b و عمق a مطابق شکل در یک قطعه فلزی نهایت بزرگ به پتانسیل صفر اینجا می‌گردد پتانسیلی که توزیع آن بصورت $0 < y < b$ و $V = V_0 \sin \frac{\pi y}{b}$ می‌باشد در دهانه شکاف در $x=a$ ایجاد می‌شود تابع



پتانسیل در درون شکاف کدام است؟

$$V = \frac{V_0}{\cosh \frac{\pi}{b} a} \sinh \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (۱)$$

$$V = \frac{V_0}{\sinh \frac{\pi}{b} a} \sinh \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (۲)$$

$$V = \frac{V_0}{b \sinh \frac{\pi}{b} a} \sinh \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (۳)$$

$$V = \frac{V_0}{\cosh \frac{\pi}{b} a} \cosh \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (۴)$$

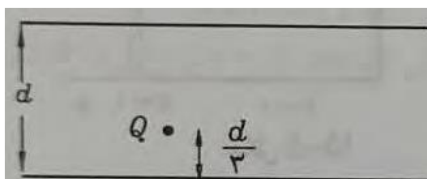
۱۳. گزینه ۲) پتانسیل در جهت y همانطوریکه دیده می‌شود تابع سینوسی دارد ولی در جهت x چون در $x=0$ برابر صفر است تابع سینوس هیپربولیک می‌باشد.

$$V = \sum A_m \sinh \alpha x \sin \alpha y \quad \alpha = \frac{m\pi}{b}$$

$$V(x=a) = \sum A_m \sinh \frac{m\pi}{b} a \sin \frac{m\pi}{b} y = V_0 \sin \frac{\pi}{b} y \rightarrow m=1$$

$$A_1 \sinh \frac{\pi}{b} a = V_0 \rightarrow A_1 = \frac{V_0}{\sinh \frac{\pi}{b} a}$$

$$\rightarrow V = \frac{V_0}{\sinh \frac{\pi}{b} a} \sinh \alpha x \sin \alpha y \Rightarrow V = \frac{V_0}{\sinh \frac{\pi}{b} a} \sinh \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{b} y$$



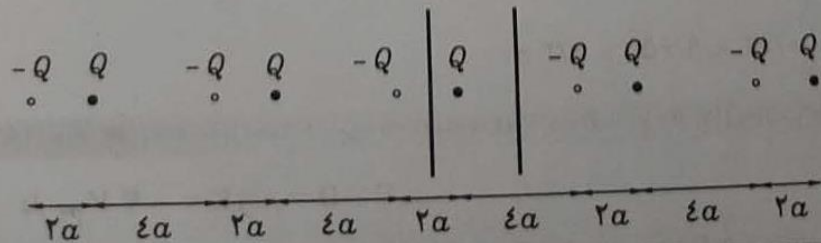
شکل ۵-۱۰

۵-۱۰ بار نقطه‌ای بین دو صفحه هادی موازی قرار دارد. فاصله دو صفحه d و فاصله بار تا صفحه پایینی $\frac{d}{3}$ است. نیروی وارد بر Q را بیابید.

۱۰-۵ شکل ح ۱۰-۵ بخشی از بارهای تصویر را، که تعدادشان بی نهایت است، نشان می دهد. در این شکل کمی دقت نشان می دهد که بارهای مثبت بر Q نیروی وارد نمی کنند. اگر جهت سمت چپ را جهت مثبت نیرو برگزینیم

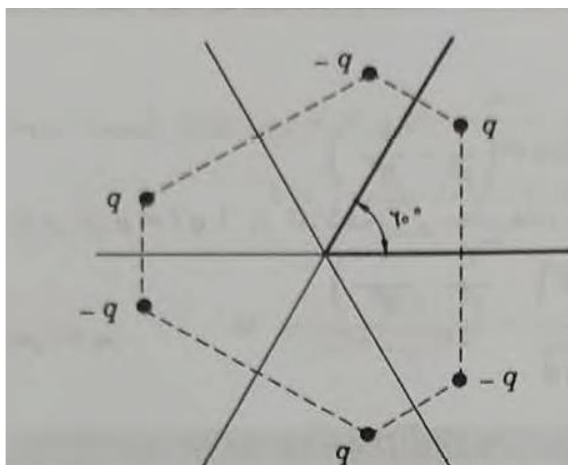
$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(2a)^2} - \frac{1}{(4a)^2} + \frac{1}{(8a)^2} - \frac{1}{(10a)^2} + \frac{1}{(14a)^2} - \frac{1}{(16a)^2} + \dots \right]$$

$$= \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(4a)^2} - \frac{1}{(5a)^2} + \frac{1}{(7a)^2} - \frac{1}{(8a)^2} + \dots \right]$$



شکل ح ۱۰-۵

۱۱-۵ بار q بین دو نیمه صفحه هادی که با هم زاویه 60° می سازند قرار دارد. بارهای تصویر را بیابید.



شکل ح ۱۱-۵

۱۱-۵ پنج بار تصویر داریم که در شکل ح ۱۱-۵ نشان داده شده اند.

۲۳-۵ پتانسیل سطح کره ای به شعاع a و به مرکز مبدا مختصات $1 - \cos \theta$ است. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

$$|\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}| \quad |\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}| \quad |\nabla \cdot \mathbf{B} = 0| \quad |\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho| \quad |\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}|$$

۲۳-۵ در داخل کره $r = 0$ جزء ناحیه جواب است، پس

$$V_1 = \sum A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \text{در } r = a$$

$$V_1 = \sum A_n a^n P_n(\cos \theta) \\ = A_0 + A_1 a \cos \theta + \dots = 1 - \cos \theta$$

پس $A_0 = 1$ ، $A_1 = -1/a$ و بقیه A_n ها برابر صفرند؛ یعنی

$$V_1 = 1 - \frac{r}{a} \cos \theta$$

در خارج کره چون $r = \infty$ در ناحیه جواب است. پس

$$V_2 = \sum B_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta) \\ = B_0 r^{-1} + B_1 r^{-2} \cos \theta + B_2 r^{-3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

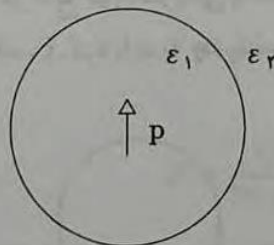
در $r = a$

$$V_2 = \frac{B_0}{a} + \frac{B_1}{a^2} \cos \theta + \dots = 1 - \cos \theta$$

که نتیجه می دهد $B_0 = a$ ، $B_1 = -a^2$ و بقیه B_n ها صفرند. پس

$$V_2 = \frac{a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \cos \theta$$

۳۱-۶ دو قطبی p در مرکز یک کره عایق با گذردهی ϵ_1 و شعاع a قرار دارد. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.



شکل ۳۱-۶

۶-۳۱ چون بجز مبدا در بقیه جاها معادله لاپلاس برقرار است، حل معادله لاپلاس در درون و بیرون کره را به صورت بسط لژاندر می نویسیم

$$V_1 = A_1 r \cos \theta + \frac{A_2 \cos \theta}{r^2}, \quad r < R$$

$$V_2 = B_1 r \cos \theta + \frac{B_2 \cos \theta}{r^2}, \quad r > R$$

البته جملات دیگری هم وجود دارد که در عبارتهای فوق گنجانده نشده اند، طبیعتاً اگر این جملات را در نظر بگیریم، عبارتهای مفصلتری باید بنویسیم و سرانجام در می یابیم که ضرائب آن جملات صفر می شوند. پس در اینجا در واقع برای صرفه جویی در میزان نوشته ها مراحل از حل مسئله را حذف کرده ایم. شرایط مرزی که باید توسط این توابع پتانسیل ارضا شوند چنین هستند

$$V_1 = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2} \quad \text{در } r \rightarrow \infty$$

زیرا در فواصل نزدیک مبدا باید همان میدان دوقطبی را داشته باشیم. همچنین میدان باید در مرکز کره و فضای آزاد پیوسته باشد، یعنی

$$V_1 = V_2 \quad \text{در } r = R$$

و سرانجام در $r \rightarrow \infty$ باید پتانسیل به صفر بگراید. شرط اخیر نتیجه می دهد که $B_1 = 0$. شرط اول نیز نتیجه می دهد

$$A_2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_1}$$

شرط پیوستگی پتانسیل در مرکز به دست می دهد

$$A_1 R \cos \theta + \frac{A_2 \cos \theta}{R^2} = \frac{B_2 \cos \theta}{R^2}$$

یک شرط نیز بر روی مولفه عمودی میدان در مرکز کره داریم؛ چون روی کره بار سطحی وجود ندارد باید داشته باشیم $D_{1n} = D_{2n}$ یا

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{در } r = R$$

یا

$$\epsilon_1 \left(A_1 - \frac{p}{4\pi\epsilon_1 R^2} \right) = -2\epsilon_2 \frac{B_2}{R^2}$$

که نتیجه می دهد

$$A_1 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_1 R^2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}$$

$$B_2 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_1 R^2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}$$

آموزشیار: کرامتی

موفق باشید، افسحی