

میدان الکتریکی در اجسام و انرژی الکتریکی (فصل ۳)

هدایت الکتریکی، جریان و مقاومت، اصل پیوستگی بار

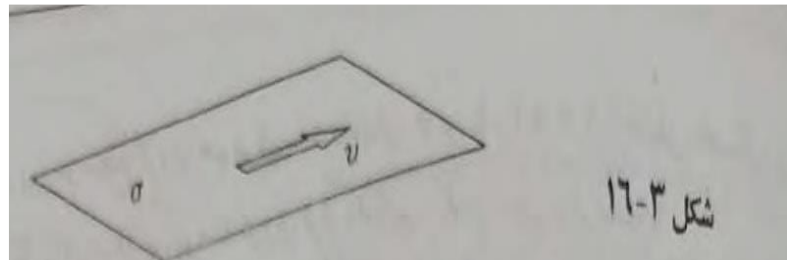
$$S = 1 \text{ mm}^2, I = 1 \text{ A}, N = 8.4 \times 10^{28} \Rightarrow J = \frac{I}{S} = 10^6 \text{ A/m}^2 \quad ۱.$$

$$J = \rho v_d = N e v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{N e} = \frac{10^6}{(8.4 \times 10^{28})(1.6 \times 10^{-19})} = 7 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$t = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}} = \frac{100 \times 10^3}{7 \times 10^{-5}} = \frac{10}{7} \times 10^9 \text{ s} \approx 45.3 \text{ سال}$$

۱. از یک سیم مسی با سطح مقطع یک میلیمتر مربع جریان مستقیم ۱ آمپر می‌گذرد. اگر تعداد الکترونهای آزاد مس در متر مکعب برابر $N = 8.4 \times 10^{28}$ باشد، سرعت متوسط حرکت الکترونها را محاسبه کنید. چه زمانی طول می‌کشد تا یک الکترون مسافتی برابر ۱۰۰ کیلومتر را طی کند؟

۱۶-۳ صفحه‌ای با بار سطحی $\sigma \text{ C/m}^2$ با سرعت v در جهت مماس بر سطح حرکت می‌کند. چگالی جریان معادل این بار متحرک را بیابید.



۱۶-۴ عنصر ds را روی سطح در نظر می‌گیریم، بار روی این عنصر σds است که با سرعت حرکت v می‌کند. ضخامت صفحه را t در نظر می‌گیریم. پس

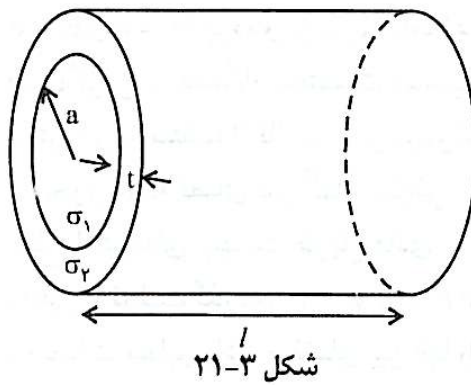
$$J = \rho v = \left(\frac{\text{بار}}{\text{حجم}} \right) v = \frac{\sigma ds}{t ds} v = \frac{\rho}{t} v$$

$K = \sigma v$ به جریانی حجمی به جریانی سطحی تبدیل می‌شود و

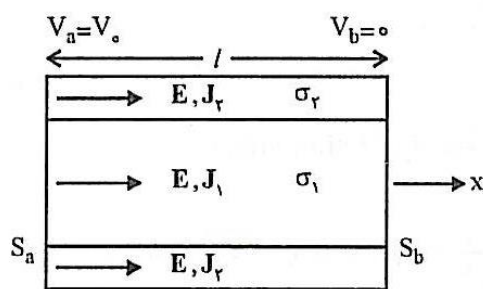
پایه ۱ به صفر جریانی حجمی به جریانی سطحی تبدیل می‌شود و

۱۶-۴ عنصر ds را روی سطح در نظر می‌گیریم، بار روی این عنصر σds است که با سرعت حرکت v می‌کند. ضخامت صفحه را t در نظر می‌گیریم. پس

۱۶-۴ عنصر ds را روی سطح در نظر می‌گیریم، بار روی این عنصر σds است که با سرعت حرکت v می‌کند. ضخامت صفحه را t در نظر می‌گیریم. پس



۲. استوانه‌ای به شعاع a و طول l از یک ماده هادی با رسانایی σ_1 تشکیل شده است. این استوانه، مطابق شکل ۲۱-۳، دارای پوششی به ضخامت t و رسانایی σ_2 است. مقاومت استوانه را بین دو سطح انتهایی آن محاسبه کنید.



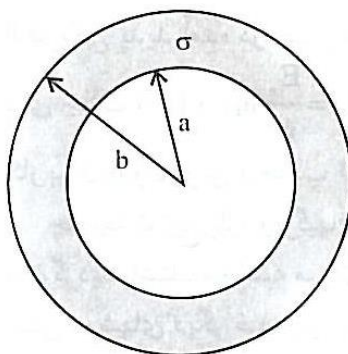
شکل پ-۱۵

۲. اعمال اختلاف پتانسیل V_0 بین دو سطح ابتدایی S_a و انتهایی S_b استوانه (شکل پ-۱۵) منجر به تشکیل میدان الکتریکی E می‌شود. این میدان در دو ناحیه هادی یکسان است و در هر سطح مقطع عمود بر محور استوانه توزیعی یکنواخت دارد. جریان به وجود آمده در مقاومت دارای چگالیهای متفاوتی در دو ناحیه هادی است. این مقاومت برابر است با:

$$R_{ab} = \frac{\int_a^b E \cdot dL}{\int_S \sigma E \cdot dS} ; E = E_x \hat{a}_x$$

$$\int_a^b E \cdot dL = \int_{x_0}^{x_0+l} (E_x \hat{a}_x) \cdot (dx \hat{a}_x) = E_x l = V_0$$

$$E_x = \frac{V_0}{l}$$



شکل ۲۲-۳

۳. یک مقاومت از جسمی با رسانایی σ و به شکل یک لایه کروی، مانند شکل ۲۲-۳، ساخته شده است. اگر شعاعهای داخلی و خارجی این لایه کروی به ترتیب برابر a و b باشند، مقاومت بین سطوح $r=a$ و $r=b$ را محاسبه کنید.

۳. اعمال اختلاف پتانسیل V بین سطوح کره درونی به شعاع a و کره بیرونی به شعاع b منجر به تشکیل میدان الکتریکی E می شود که در دستگاه مختصات کروی فقط دارای مؤلفه شعاعی است. بدیهی است که چون چگالی جریان روی سطح کره ای به شعاع r یکنواخت است، میدان الکتریکی نیز روی چنین کره ای اندازه ثابتی دارد. پس می توان نوشت:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S J_r dS = J_r \oint_S dS = J_r (4\pi r^2)$$

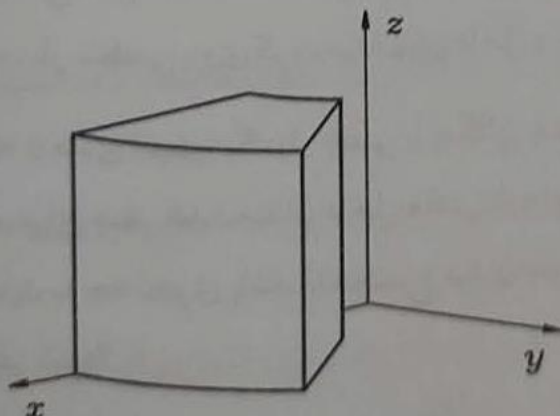
که S عبارت از سطح کره ای به شعاع r است.

$$J_r = \frac{I}{4\pi r^2}, \quad E_r = \frac{J_r}{\sigma} = \frac{I}{4\pi \sigma r^2}$$

$$V_{ab} = V. = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{I dr}{4\pi \sigma r^2} = \frac{I}{4\pi \sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$R_{ab} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{1}{4\pi \sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow R_{ab} = \frac{b-a}{4\pi ab \sigma}$$

۱۳-۳ یک جسم با $\sigma = 5 \text{ MS/m}$ فضای $4 \text{ cm} < \rho < 10 \text{ cm}$ ، $0 < z < 6 \text{ cm}$ و $0 < \phi < 0.2\pi$ را اشغال کرده است. در این جسم $E = \frac{2}{\rho} \hat{\phi} \text{ mV/m}$ (الف) کل جریانی که از این جسم می گذرد، و مقاومت این جسم را بیابید.



شکل ۱۳-۳

۱۳-۳ چگالی جریان $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ است و

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int \frac{\sigma}{\rho} \hat{\phi} \cdot d\rho dz \hat{\phi}$$

$$= 2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^6 \int_{0.04}^{0.1} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{0.06} dz = 550 \text{ A}$$

اختلاف پتانسیل بین دو سطح را از رابطه $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ می یابیم که در آن $d\mathbf{l} = \rho d\phi \hat{\phi}$ پس

$$V = \int_0^{0.2\pi} d\phi = 0.4\pi \text{ mV}$$

و سرانجام

$$R = \frac{V}{I} = 2.29 \mu\Omega$$

۱۲-۳ در اطراف نقطه $P(5, 7, -5)$ چگالی جریان به صورت زیرست

$$\mathbf{J} = 2x^2y\hat{x} - 5x^2z^2\hat{y} + 4x^2yz\hat{z} \text{ A/m}^2$$

مکعبی به ضلع یک متر، با اضلاع موازی محورهای مختصات و به مرکز نقطه P در نظر بگیرید. جریانی را که از این مکعب خارج می شود به دست آورید. آهنگ افزایش چگالی بار در نقطه P چقدرست؟

۱۲-۳ داریم $I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$ پس

$$I = \int_{-5/5}^{-4/5} \int_{6/5}^{7/5} \int_{4/5}^{5/5} (6x^2y + 4x^2y) dx dy dz$$

$$= 10 \int_{4/5}^{5/5} x^2 dx \int_{6/5}^{7/5} y dy = 1756 \text{ A}$$

طبق اصل پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ ، پس $\partial\rho/\partial t$ در نقطه P برابر $-\nabla \cdot \mathbf{J}$ در آن نقطه است

$$-\nabla \cdot \mathbf{J} = -10 x^2 y = -10 (5)^2 (7) = -1750$$

۵. تابع پتانسیل در ناحیه ای از فضا که سطح مقطعی یکنواخت در امتداد محور z دارد و به سه سطح هادی $(x=0, y>0)$ ، $(y=0, x>0)$ و $(xy=2, x>0, y>0)$ محدود می باشد توسط رابطه $V = V_{xy}$ بیان می شود. چگالی توزیع بار الکتریکی روی این سه سطح هادی را به دست آورید.

۵. با توجه به شکل پ-۱۶ داریم:

$$V = V_0 xy \Rightarrow E = -\nabla V = -V_0 (y \hat{a}_x + x \hat{a}_y)$$

$$\rho_S = \epsilon_0 E \cdot \hat{a}_n$$

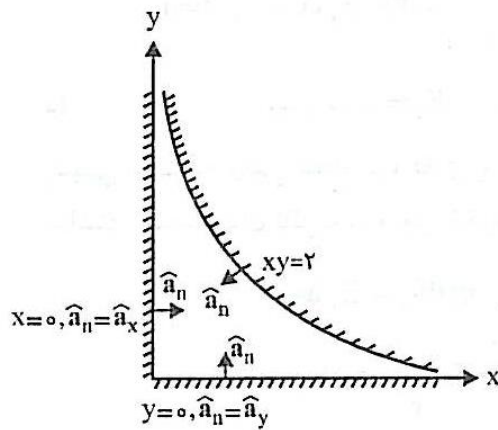
(i) برای سطح $x=0$ و $y>0$ داریم:

$$\rho_S = \epsilon_0 [-V_0 (y \hat{a}_x + x \hat{a}_y)] \cdot \hat{a}_x = -\epsilon_0 V_0 y$$

(ii) برای سطح $y=0$ و $x>0$ داریم:

$$\rho_S = \epsilon_0 [-V_0 (y \hat{a}_x + x \hat{a}_y)] \cdot \hat{a}_y = -\epsilon_0 V_0 x$$

(iii) برای سطح $xy=2$ ، ابتدا بردار واحد $\hat{a}_n$ را به دست می آوریم.



شکل پ-۱۶

$$\hat{a}_n = \pm \frac{\nabla(xy)}{|\nabla(xy)|} = \pm \frac{y \hat{a}_x + x \hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y=2/x} = \pm \frac{2 \hat{a}_x + x^2 \hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

چون بردار $\hat{a}_n$ باید به طرف خارج جسم هادی باشد علامت (-) باید مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین:

$$\begin{aligned} \rho_S &= \epsilon_0 E \cdot \hat{a}_n = \epsilon_0 [-V_0 (y \hat{a}_x + x \hat{a}_y)] \cdot \left[-\frac{2 \hat{a}_x + x^2 \hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + 4}} \right] \Big|_{y=2/x} \\ &= \epsilon_0 V_0 \frac{2y + x^3}{\sqrt{x^2 + 4}} \Big|_{y=2/x} = \epsilon_0 V_0 \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} \end{aligned}$$

۶. میدان الکتریکی در فضای اطراف یک کره هادی به شعاع a که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض می شود عبارت است از:

$$E = E_0 \left(1 + \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{a}_r - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r \geq a$$

الف) آیا میدان مزبور ویژگی یک میدان الکتریکی ساکن را دارا است؟

ب) نشان دهید که مؤلفه مماسی میدان الکتریکی روی سطح کره هادی صفر است.

ج) چگالی توزیع بار الکتریکی القا شده روی سطح کره هادی را به دست آورید.

د) میدانهای اولیه و ثانویه را از عبارت فوق که برای میدان کل می باشد محاسبه کنید.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{a}}_r \quad (6. الف)$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

$$= -\frac{E_0}{r} \left[\left(1 + \gamma \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta - \left(1 + \gamma \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \right] = 0$$

چون $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، $\mathbf{E}$ ویژگی لازم برای یک میدان الکتریکی ساکن را دارد.

ب) مؤلفه مماسی میدان، همان مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ است. مقدار این مؤلفه روی سطح کره عبارت است از:

$$E_t = E_\theta = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \Big|_{r=a} = 0$$

$$\rho_S = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n, \quad \hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_r \quad (ج)$$

$$\rho_S = \epsilon_0 E_r \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \left(1 + \gamma \frac{a^3}{r^3} \right) E_0 \cos \theta \Big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta, \quad r=a$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{E}_a = \text{میدان اولیه}, \quad \mathbf{E}_s = \text{میدان ثانویه} \quad (د)$$

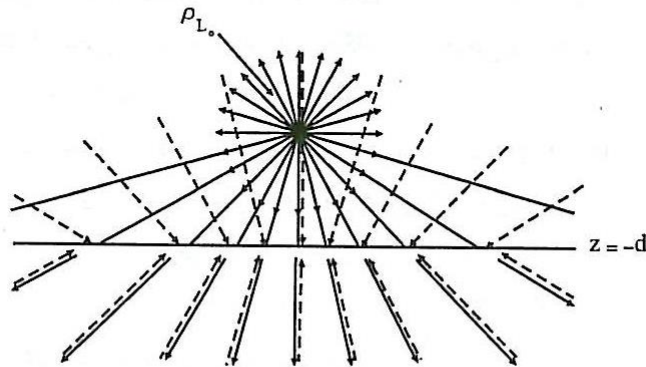
بدیهی است که وقتی شعاع کره هادی به سمت صفر میل کند ($a \rightarrow 0$)، یعنی کره هادی حضور نداشته باشد، میدان ثانویه به وجود نخواهد آمد. پس،

$$\mathbf{E}_a = \lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{E} = E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - E_0 \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta = E_0 \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_a = \gamma E_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + E_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

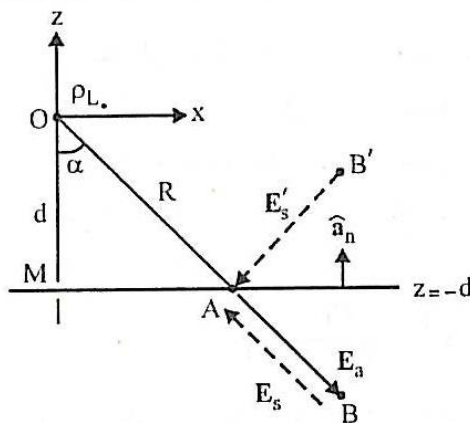
میدان اولیه یک میدان یکنواخت، با شدت E_0 ، در امتداد محور z است.

۷. ناحیه $z < -d$ از فضا را ماده‌ای هادی فراگرفته است. یک خط بینهایت بار با چگالی یکنواخت ρ_L ، مطابق شکل ۳-۲۴، در امتداد محور y قرار دارد. با استفاده از میدان ثانویه مورد نیاز برای آنکه میدان الکتریکی کل در ناحیه هادی صفر شود و با استفاده از تقارن میدان ثانویه نسبت به $z = -d$ نشان دهید که:



شکل ۳-۲۴

- الف) چگالی بارهای القا شده روی سطح هادی از رابطه $-\rho_L \cdot d / \pi(x^2 + d^2)$ در دستگاه مختصات مستطیلی به دست می‌آید.
- ب) مقدار بار القایی به ازای واحد طول در امتداد محور y برابر $-\rho_L$ است.
- ج) میدان الکتریکی در ناحیه $z > -d$ همانند میدانی است که از خط بینهایت بار در امتداد محور y و یک خط بار تصویر که موازی با محور y بوده، از نقطه $(0, 0, -2d)$ بگذرد و دارای چگالی یکنواخت $-\rho_L$ باشد حاصل می‌شود.



شکل پ-۱۷

۷. الف) با توجه به اینکه خط بار و جسم هادی در امتداد محور y تا بینهایت (از هر دو طرف) ادامه دارند (شکل پ-۱۷)، میدانهای اولیه و ثانویه و کمیت‌های دیگر مانند چگالی بارهای القایی آزاد تابعی از y نخواهند بود. بنابراین، اگر مسئله را برای مقدار معینی از y ، مثلاً $y = 0$ ، مطالعه نماییم به عمومیت مسئله لطمه‌ای وارد نخواهد شد. از این رو نقطه A را روی سطح هادی و در صفحه xz در نظر می‌گیریم. میدان اولیه حاصل از خط بار بینهایت (رابطه نظیر ۲-۲۴) عبارت است از:

$$\vec{E}_a^A = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{a}_R \quad ; \quad \hat{a}_R = \frac{\vec{OA}}{R}$$

بردار واحد در امتداد $\vec{OA}$

میدان ثانویه ایجاد شده در درون جسم هادی باید میدان اولیه را در هر نقطه در درون جسم خنثی سازد. میدان ثانویه از بارهای القایی آزاد، که روی سطح جسم در $z = -d$ ظاهر می‌شوند، پدید می‌آید. این بارهای القایی، صرف‌نظر از اینکه چگونه روی سطح جسم توزیع می‌شوند، در نقاط متقارن نسبت به صفحه $z = -d$ میدانهای ثانویه‌ای با اندازه‌های مساوی و با جهت‌های متقارن به گونه‌ای که در شکل نشان داده شده است به وجود می‌آورند. میدان کل در نقطه A عبارت است از:

$$\mathbf{E}^A = \mathbf{E}_a^A + \mathbf{E}_s^A, \quad |\mathbf{E}_s^A| = |\mathbf{E}_s^A| = |-\mathbf{E}_a^A|$$

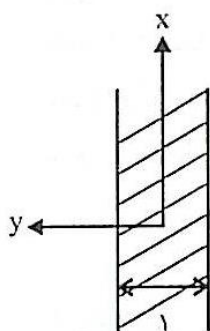
$$\mathbf{E}^A = -\gamma |\mathbf{E}_a^A| \cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_n = -\gamma \frac{\rho_{L_s}}{2\pi \epsilon_0 R} \cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_n$$

اما $\cos \alpha = \frac{d}{R}$ و $R = (x^2 + d^2)^{1/2}$ پس،

$$\mathbf{E}^A = -\frac{\rho_{L_s} d}{\pi \epsilon_0 (x^2 + d^2)} \hat{\mathbf{a}}_n$$

حال چگالی سطحی بار القایی، با استفاده از شرط مرزی ۳-۷۰، عبارت می‌شود از:

$$\rho_s = \epsilon_0 \mathbf{E}^A \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = -\frac{\rho_{L_s} d}{\pi (x^2 + d^2)}, \quad z = -d$$

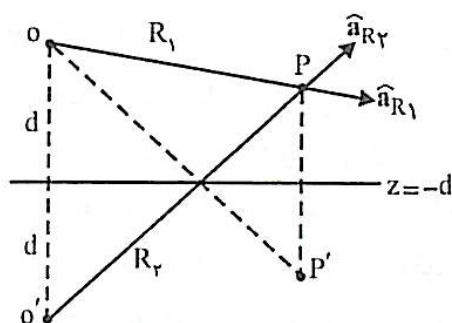


شکل پ-۱۸

ب) نواری از سطح جسم هادی به عرض واحد در امتداد محور y ، مطابق شکل پ-۱۸ در نظر می‌گیریم. مقدار بار موجود در این نوار برابر است با:

$$Q = \int_{\text{سطح نوار}} \rho_s dS = - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{L_s} d}{\pi (x^2 + d^2)} dx$$

$$= -\frac{\rho_{L_s} d}{\pi} \left[\frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{x}{d} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\rho_{L_s}$$



شکل پ-۱۹

ج) نقطه P را در ناحیه $z > -d$ به صورت شکل پ-۱۹ در نظر می‌گیریم. میدان کل در این نقطه دارای دو قسمت است. (i) میدان اولیه ناشی از خط بار (ii) میدان ثانویه ناشی از بارهای القایی روی سطح هادی. میدان اولیه در نقطه P برابر است با:

$$\mathbf{E}_a^P = \frac{\rho_{L_s}}{2\pi \epsilon_0 R_1} \hat{\mathbf{a}}_{R_1}$$

میدان ثانویه در نقطه P ، به دلیل تقارن این میدان نسبت به صفحه $z = -d$ ، به اندازه میدان در P' است (P و P' دو نقطه قرینه نسبت به صفحه $z = -d$ هستند). یعنی،

$$|E_s^P| = |E_s^{P'}| = |-E_a^{P'}| = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0 R^2} ; \quad OP' = OP = R^2$$

جهت میدان ثانویه $E_s^{P'}$ ، $\hat{a}_{R^2}$ است. بنابراین:

$$E_s^P = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_{R^2}$$

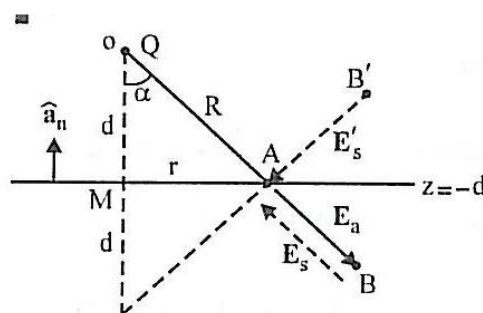
نتیجه مزبور نشان می‌دهد که E_s^P همانند میدانی است که از یک خط بار با چگالی $-\rho_{L_0}$ واقع در O' (تصویر O) ناشی شود. از این رو، با توجه به اینکه $E^P = E_a^P + E_s^P$ ، چنین نتیجه‌گیری می‌شود که میدان کل در نقطه دلخواه P در ناحیه $z > -d$ مساوی میدانی است که خط بار و تصویرش نسبت به سطح هادی و با چگالی ناهمنام در نقطه P به وجود می‌آورند. این مسئله اصول روش تصویر را با توجه به نقش میدانهای اولیه و ثانویه تشریح می‌کند. این مسئله را با استفاده از قواعد روش تصویر (فصل ۴) با سادگی بیشتری می‌توان مطالعه کرد.

۸. در مسئله ۷ فرض کنید به جای خط بینهایت بار، بار نقطه‌ای Q در مبدا مختصات قرار دارد. نشان دهید که:

الف) چگالی بارهای القا شده روی سطح هادی از رابطه $-Qd/(r^2+d^2)^{3/2}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آید.

ب) مقدار کل بار القا شده روی سطح هادی برابر $-Q$ است.

ج) میدان الکتریکی در ناحیه $z > -d$ همانند میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مبدا مختصات و یک بار نقطه‌ای تصویر، که مقداری برابر $-Q$ داشته و در نقطه $(0, 0, -2d)$ واقع باشد، حاصل می‌شود.



شکل پ-۲۰

۸. الف) میدان اولیه ناشی از بار نقطه‌ای Q منجر به القای بار الکتریکی روی سطح هادی می‌شود. چون میدان اولیه تابعی از ρ نیست، توزیع بارهای القایی روی صفحه $z = -d$ نیز مستقل از ρ خواهد بود و فقط تابعی از r (مختصه شعاعی در دستگاه استوانه‌ای) است. میدان اولیه در نقطه دلخواه A روی سطح هادی با توجه به شکل پ-۲۰ عبارت است از:

$$E_a^A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R ; \quad \hat{a}_R = \overrightarrow{OA} \text{ بردار واحد در جهت}$$

بارهای القایی باید آن چنان میدان ثانویه‌ای به وجود آورند که در هر نقطه در درون جسم هادی میدان اولیه را به طور کامل خنثی کند. به عبارت دیگر $E_s = -E_a$ برای $z < -d$. میدان ثانویه در ناحیه

$z > -d$ قرینه میدان ثانویه در ناحیه $z < -d$ است، زیرا میدان ثانویه باید نسبت به صفحه $z = -d$ متقارن باشد. بنابراین $|E'_s| = |E_s|$ بوده و آنگاه میدان کل در نقطه A برابر است با:

$$E^A = E_a^A + E_s^A = -\gamma |E_a^A| \cos \alpha \hat{a}_n ; \cos \alpha = \frac{d}{R}$$

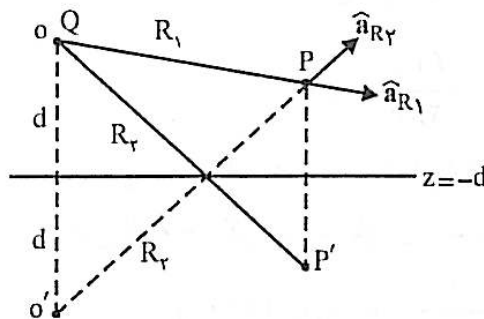
$$E^A = -\gamma \frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 R^\gamma} \frac{d}{R} \hat{a}_n ; R = (r^\gamma + d^\gamma)^{1/\gamma}$$

$$E^A = -\frac{Qd}{\gamma \pi \epsilon_0 (r^\gamma + d^\gamma)^{\gamma/\gamma}} \hat{a}_n \Rightarrow \rho_s = \epsilon_0 E^A \cdot \hat{a}_n = -\frac{Qd}{\gamma \pi (r^\gamma + d^\gamma)^{\gamma/\gamma}}$$

ب) مقدار کل بار القا شده روی سطح هادی برابر است با:

$$Q_s = \int_{\text{سطح هادی}} \rho_s dS = \int_{\varphi=0}^{\gamma\pi} \int_{r=0}^{\infty} -\frac{Qd}{\gamma \pi (r^\gamma + d^\gamma)^{\gamma/\gamma}} r dr d\varphi$$

$$= -\frac{Qd}{\gamma \pi} \int_0^{\gamma\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^\gamma + d^\gamma)^{\gamma/\gamma}} = -Qd \left[-\frac{1}{\sqrt{\gamma} (r^\gamma + d^\gamma)^{1/\gamma}} \right]_0^{\infty} = -Q$$



شکل پ-۲۱

ج) میدانهای اولیه و ثانویه را در نقطه دلخواه P واقع در ناحیه $z > -d$ به ترتیب E_a^P و E_s^P می نامیم (شکل پ-۲۱). آنگاه،

$$E^P = E_a^P + E_s^P$$

اما $E_s^{P'}$ و E_s^P دو بردار قرینه نسبت به $z = -d$ هستند و دارای اندازه های یکسانند. اما چون میدان کل در ناحیه $z < -d$ صفر است،

$$E_s^{P'} = -E_a^{P'} \Rightarrow |E_s^P| = |E_s^{P'}| = |-E_a^{P'}| = \frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 R_1^\gamma}$$

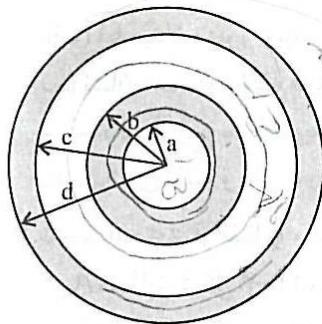
با توجه به اینکه E_s^P در جهت $-\hat{a}_{R_1}$ است (بارهای القایی منفی اند، اگر $Q > 0$ باشد)، داریم:

$$E_s^P = -\frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 R_1^\gamma} \hat{a}_{R_1} , E_a^P = \frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 R_1^\gamma} \hat{a}_{R_1}$$

پس:

$$E^P = \frac{Q}{\gamma \pi \epsilon_0 R_1^\gamma} \hat{a}_{R_1} + \frac{-Q}{\gamma \pi \epsilon_0 R_1^\gamma} \hat{a}_{R_1} , z > -d$$

رابطه مزبور نشان می‌دهد که میدان کل در هر نقطه واقع در ناحیه $z > -d$ مساوی میدانی است که بار نقطه‌ای Q (جمله اول) و تصویرش با بار $-Q$ (جمله دوم) به وجود می‌آورند.



شکل ۲۵-۳

۹. دو لایه هادی استوانه‌ای، بینهایت طویل و هم‌محور، مطابق شکل ۲۵-۳، مفروضند. مقدار خالص بار الکتریکی روی هادیهای درونی و بیرونی در واحد طول به ترتیب برابر ρ_{L1} و ρ_{L2} می‌باشد. توزیع بار الکتریکی را روی سطوح $r=a$ ، $r=b$ ، $r=c$ و $r=d$ به دست آورید. فضای بین هادیها خلأ است.

۹. بار روی سطح $r=a$: مقدار بار روی سطح $r=a$ باید برابر صفر باشد، زیرا در غیر این صورت وجود بار روی این سطح منجر به تشکیل میدان الکتریکی غیر صفر در ناحیه هادی $a < r < b$ می‌گردد. پس،

$$\rho_s = 0, \quad r=a$$

بار روی سطح $r=b$: بار موجود در استوانه درونی باید کاملاً روی سطح خارجی آن یعنی $r=b$ توزیع شود. به دلیل تقارن استوانه‌ای، توزیع بار یکنواخت خواهد بود.

$$\rho_s = \frac{\rho_{L1}}{2\pi b} = \frac{\rho_{L1}}{2\pi b}, \quad r=b$$

بار روی سطح $r=c$: توزیع بار روی سطح $r=b$ تولید میدان الکتریکی $E = \frac{\rho_{L1}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$ را در ناحیه $r > b$ می‌کند. این نتیجه را می‌توان به سادگی از قانون گوس به دست آورد. این میدان، باری روی سطح $r=c$ القا می‌کند (از طریق جابه‌جایی الکترونها آزاد در لایه بیرونی) به گونه‌ای که میدان کل در ناحیه هادی $c < r < d$ صفر شود. اگر چگالی توزیع بار روی سطح $r=c$ را ρ_{sc} بنامیم باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{\rho_{L1}}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{2\pi c \rho_{sc}}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{r} = 0, \quad c < r < d$$

$$\rho_{L1} + 2\pi c \rho_{sc} = 0 \Rightarrow \rho_s = \rho_{sc} = -\frac{\rho_{L1}}{2\pi c}, \quad r=c$$

بار روی سطح $r=d$: چون مقدار خالص بار در لایه بیرونی به ازای واحد طول باید ρ_{L2} باشد، با فرض آنکه چگالی توزیع بار روی سطح $r=d$ برابر ρ_{sd} باشد، داریم:

$$\rho_{L2} = \rho_{sd} (2\pi d) + \rho_{sc} (2\pi c) \Rightarrow \rho_{sd} = \frac{1}{2\pi d} (\rho_{L2} - \rho_{sc} (2\pi c))$$

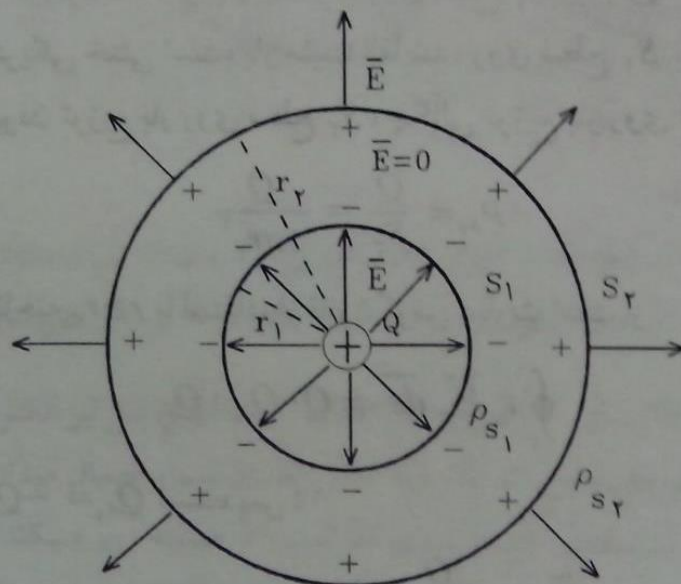
$$\rho_{sd} = \frac{1}{2\pi d} (\rho_{L2} + \rho_{L1}), \quad r=d$$

به طور خلاصه:

$$\rho_s = \begin{cases} 0 & r=a \\ \rho_{L1}/2\pi b & r=b \\ -\rho_{L1}/2\pi c & r=c \\ (\rho_{L1} + \rho_{L2})/2\pi d & r=d \end{cases}$$

۲۸. در مثال ۳-۴ نشان دهید که میدان الکتریکی در خارج محفظه کروی هادی بستگی به موقعیت بار نقطه‌ای Q در درون محفظه ندارد. به عبارت دیگر اگر بار Q در هر نقطه دلخواهی در درون محفظه کروی باشد، میدان E در خارج آن هم‌چنان برابر $\hat{a}_r (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)$ می‌باشد.

مثال (۳-۴) در مرکز یک محفظه کروی از جنس هادی و به ضخامت d بار نقطه‌ای مثبت Q ، مطابق شکل (۳-۱۱)، قرار می‌گیرد. چگالی بارهای القایی روی سطوح داخلی و خارجی محفظه کروی و میدان الکتریکی را در تمام نواحی بدست آورید.

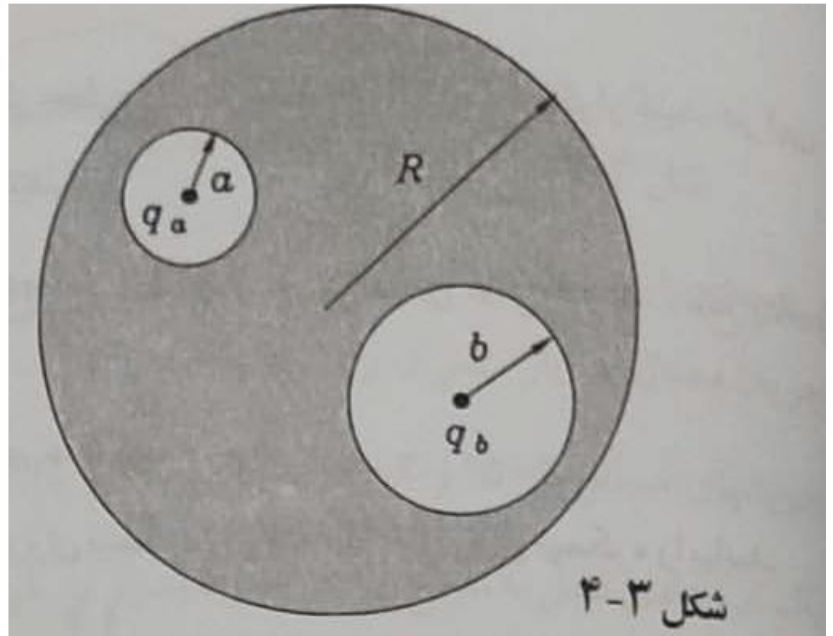


شکل (۳-۱۱) بار مثبت Q در مرکز یک محفظه کروی به ضخامت $d = r_3 - r_2$

۲۸. بار نقطه‌ای Q ، بارهای مثبت و منفی روی سطوح درونی و بیرونی محفظه کروی القا می‌کند. چگالی توزیع بار روی سطح درونی محفظه بستگی به مکان بار نقطه‌ای Q دارد، زیرا میدان ایجاد کننده این توزیع با تغییر مکان Q تغییر می‌کند. توزیع بار روی سطح خارجی، تحت تأثیر هیچ

میدانی نخواهد بود (میدان در ناحیه بین سطوح درونی و بیرونی محفظه صفر است) و به طور طبیعی به گونه‌ای یکنواخت توزیع می‌شود. میدان در خارج محفظه فقط به توزیع بار روی سطح بیرونی بستگی دارد و به دلیل تقارن این توزیع، میدان در خارج محفظه همواره برابر $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ خواهد بود. به عبارت دیگر جابه‌جایی بار Q در درون محفظه (البته به شرط آنکه به اندازه کافی آهسته انجام گیرد که بتوان از تغییرات زمانی صرف‌نظر کرد) هیچ تأثیری بر میدان در بیرون محفظه هادی نخواهد داشت!

- ۴-۳ دو حفره کروی به شعاعهای a و b در داخل یک کره هادی به شعاع R ایجاد شده است. دو بار q_a و q_b به ترتیب در مرکز حفره‌های به شعاع a و b قرار دارند (شکل ۴-۳ را ببینید).
- (الف) چگالیهای σ_a ، σ_b ، σ_c ، به ترتیب چگالی بارهای روی سه سطح کروی، را به دست آورید.
- (ب) میدان داخل حفره‌ها و بیرون کره هادی را به دست آورید.
- (ج) اگر بار سومی را به کره هادی فوق نزدیک کنیم کدام یک از جوابهای فوق تغییر می‌کند؟



۴-۳ میدان داخل حفره‌ها، به خاطر تقارن و مستقل بودن میدان درون یک جسم هادی از بارهای خارج آن، عبارت است از $E_a = q_a / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ و $E_b = q_b / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. روی سطح داخل حفره‌ها $\sigma = -\epsilon_0 E_n$ (به جهت میدان توجه کنید) پس

$$\sigma_b = -q_b / 4\pi b^2, \quad \sigma_a = -q_a / 4\pi a^2$$

برای یافتن میدان خارج کره از قانون گوس استفاده می‌کنیم و میدان را برابر $E_c = (q_a + q_b) / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ به دست می‌آوریم. روی سطح کره خارجی $\sigma = \epsilon_0 E_n$ پس

$$\sigma_c = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

با آوردن بار سوم میدانهای داخل حفره‌ها و در نتیجه چگالیهای σ_a و σ_b تغییر نمی‌کنند، ولی میدان خارج σ_c تغییر می‌کند.

۶-۳ دو صفحه هادی در $y = \pm \frac{1}{a}$ قرار دارند. بار حجمی بین این دو صفحه میدان

$$\mathbf{E} = \left(ay^2 + \frac{y}{a} \right) \hat{\mathbf{y}}$$

را ایجاد کرده است. چگالی بار و اختلاف پتانسیل بین دو صفحه را بیابید.

۶-۳ به سادگی به دست می آوریم

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \left(3ay^2 + \frac{1}{a} \right)$$

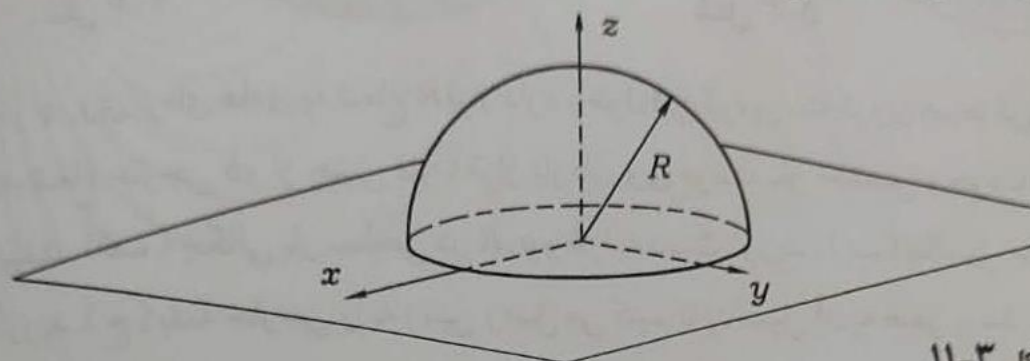
$$V = - \int_{-1/a}^{1/a} \left(ay^2 + \frac{y}{a} \right) dy = 0$$

۱۱-۳ صفحه $z = 0$ و نیمکره برجسته به شعاع a وسط آن از جنس هادی کامل هستند. تابع پتانسیل در

فضای بالای این سطح عبارت است از

$$V = -r \cos \theta + a^2 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

چگالی بار سطحی روی سطح صاف و روی نیمکره را یافته، کل بار روی نیمکره را بیابید.



شکل ۱۱-۳

۱۱-۳ ابتدا شدت میدان الکتریکی را می‌یابیم

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

شرط مرزی روی هادی کامل عبارت است از $\sigma = \epsilon_0 E_n$. مولفه عمود بر سطح روی نیمکره مولفه E_r است، و

چون روی این سطح $r = a$

$$\sigma = \epsilon_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{a^3} \right) = 3\epsilon_0 \cos \theta$$

روی سطح صاف مولفه عمود بر سطح و در جهت رو به خارج هادی E_θ است، و چون روی این سطح

$$\theta = \pi/2$$

$$\sigma = \epsilon_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$$

کل بار روی نیمکره با انتگرالگیری به دست می‌آید

$$Q = \int \sigma \, ds = \int 3\epsilon_0 \cos \theta \, a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= 3\epsilon_0 a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 3\epsilon_0 \pi a^2$$

۱. دو کره فلزی بشعاع a و $2a$ به ترتیب دارای پتانسل 45^V و 60^V هستند اگر این دو کره را با یک سیم نازک

فلزی به هم متصل کنیم پتانسیل هر کدام چقدر خواهد شد؟

$$57/5^V (4)$$

$$47/5^V (3)$$

$$52/5^V (2)$$

$$55^V (1)$$

۱. گزینه ۱) فرض کنیم بار کره کوچکتر Q_1 و بار کره بزرگتر Q_2 باشد در اینصورت داریم

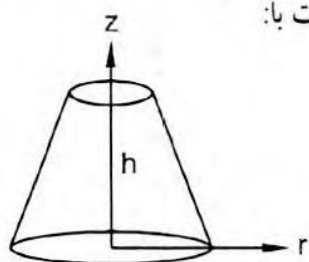
$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2a)}$$

اگر پتانسیل دو کره پس از اتصال V_0 و بار هر کدام به ترتیب Q'_1 و Q'_2 باشد در اینصورت

$$V_0 = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 (2a)} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{4\pi\epsilon_0 (3a)} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 (3a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 a V_1 + 2\pi\epsilon_0 a V_2}{4\pi\epsilon_0 (3a)}$$

$$V_0 = \frac{V_1 + 2V_2}{3} = \frac{45 + 2 \times 60}{3} = 55^V$$

۱۱. یک مخروط ناقص با ضریب هدایت $\frac{2 \times 10^{-6}}{m}$ به ارتفاع 20 cm دارای قواعد بالایی و پایینی به شعاع 0.1 mm و 1 mm می باشد مقاومت تقریبی بین قواعد بالایی و پایینی این مخروط ناقص برابر است با:



- (۱) 0.24Ω (۲) 0.32Ω
(۳) 0.41Ω (۴) 0.54Ω

۱۱. گزینه ۲ اگر استوانه ای به ارتفاع dz و شعاع r انتخاب کنیم خواهیم داشت.

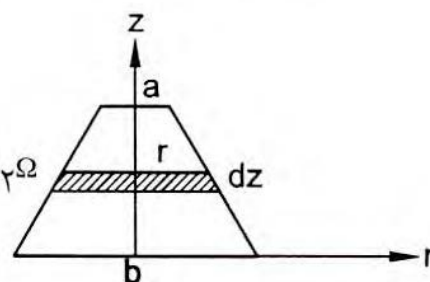
$$dR = \frac{dz}{\sigma \pi r^2}$$

که dR مقاومت استوانه به ارتفاع dz و شعاع r می باشد اگر شعاع قاعده بالا a و شعاع قاعده پایین b باشد میتوان r را بر حسب z بصورت زیر نوشت:

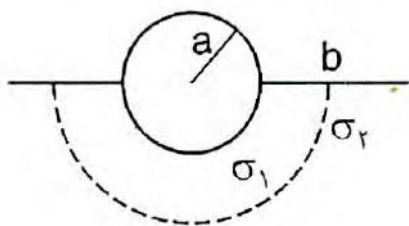
$$z = -\frac{h}{b-a} r + \frac{hb}{b-a} = \frac{h}{a-b} (r-b) \rightarrow dz = h \frac{dr}{a-b}$$

$$dR = h \frac{dr}{a-b} \times \frac{1}{\sigma \pi r^2} = \frac{h}{\sigma \pi (a-b)} \frac{dr}{r^2} \rightarrow R = \int_a^b dR$$

$$= \frac{h}{\sigma \pi (a-b)} \times \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{h}{\sigma \pi ab} = \frac{0.2}{2 \times 10^{-6} \pi \times 10^{-7}} = \frac{1}{\pi} = 0.32 \Omega$$



۱۳. کره ای از رسانای کامل به شعاع a بطور نیمه داخل زمین قرار دارد ضریب هدایت الکتریکی زمین در ناحیه $a < r < b$ برابر σ_1 و در ناحیه $b < r < \infty$ برابر σ_2 می باشد مقاومت زمین وقتی توزیع جریان یکنواخت است کدام می باشد؟



$$\frac{1}{2\pi \sigma_2} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] + \frac{1}{2\pi \sigma_1 b} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4\pi \sigma_1} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] + \frac{1}{4\pi \sigma_2 b} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\pi \sigma_1} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] + \frac{1}{2\pi \sigma_2 b} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4\pi \sigma_2} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] + \frac{1}{4\pi \sigma_1 b} \quad (4)$$

۱۳. گزینه ۳ چون جریان بصورت شعاعی است پس $J = \frac{I}{2\pi r^2}$ در نتیجه

$$E_r = \frac{J}{\sigma_1} = \frac{I}{2\pi r^2 \sigma_1}$$

$$E_r = \frac{J}{\sigma_2} = \frac{I}{2\pi r^2 \sigma_2}$$

$$V_a = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \left[\int_{\infty}^b E_r dr + \int_b^a E_r dr \right] = \frac{I}{2\pi \sigma_2 b} + \frac{I}{2\pi \sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$R = \frac{V_a}{I} = \frac{1}{2\pi \sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi \sigma_2 b}$$

۱۶. سه استوانه فلزی بلند هم محور دارای شعاعهای a و b و c می باشند استوانه داخلی و بیرونی بزمین وصل شده و روی استوانه میانی بار الکتریکی به چگالی سطحی ρ_s قرار داده می شود چگالی سطحی بار استوانه داخلی کدام است؟ ($a < b < c$)

$$\rho_s \frac{c}{b} \frac{\ln \frac{b}{c}}{\ln \frac{c}{a}} \quad (۴)$$

$$\rho_s \frac{c}{a} \frac{\ln \frac{c}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (۳)$$

$$\rho_s \frac{b}{a} \frac{\ln \frac{b}{c}}{\ln \frac{c}{a}} \quad (۲)$$

$$\rho_s \frac{a}{b} \frac{\ln \frac{b}{c}}{\ln \frac{c}{a}} \quad (۱)$$

۱۶. گزینه ۲ فرض کنیم روی استوانه داخل چگالی بار ρ_{s1} باشد در اینصورت

$$\int \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} = Q_1 \rightarrow D_1 (2\pi r l) = \rho_{s1} 2\pi a l \rightarrow E_1 = \rho_{s1} \frac{a}{\epsilon_0 r} \quad a < r < b$$

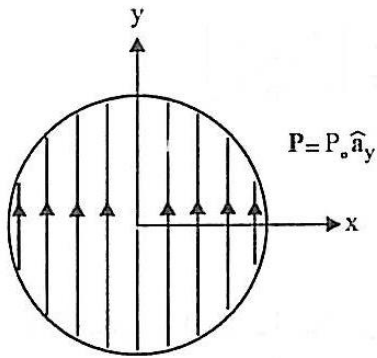
$$\int \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = Q_2 \rightarrow D_2 (2\pi r l) = \rho_{s1} 2\pi a l + \rho_{s2} 2\pi b l \Rightarrow E_2 = \rho_{s1} \frac{a}{\epsilon_0 r} + \rho_{s2} \frac{b}{\epsilon_0 r} \quad b < r < c$$

$$V_{ab} = V_{cb} \Rightarrow \int_a^b E_1 d\ell = \int_c^b E_2 d\ell \Rightarrow \rho_{s1} \frac{a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = \rho_{s2} \frac{b}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{c} + \rho_{s1} \frac{a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{c}$$

$$\rho_{s1} a \left[\ln \frac{b}{a} - \ln \frac{b}{c} \right] = \rho_{s2} b \ln \frac{b}{c} \Rightarrow \rho_{s1} a \ln \frac{c}{a} = \rho_{s2} b \ln \frac{b}{c} \Rightarrow \rho_{s1} = \rho_{s2} \frac{b}{a} \frac{\ln \frac{b}{c}}{\ln \frac{c}{a}}$$

اجسام عایق در میدان الکتریکی ساکن، چگالی بارهای مقید، چگالی شار الکتریکی

۱۰. یک ماده عایق استوانه‌ای شکل به شعاع a و به طول بینهایت، دارای پلاریزاسیون دائمی $\vec{P} = P_y \hat{a}_y$ بوده و در امتداد محور z در خلأ قرار دارد. چگالیهای سطحی و حجمی بارهای مقید القایی را در ماده عایق به دست آورید.



شکل پ-۲۲

۱۰. مطابق شکل پ-۲۲ داریم:

$$\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = P_0 \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_r ; \hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\rho_{PS} = P_0 \sin \varphi , \quad r = a$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (P_0 \hat{\mathbf{a}}_y) = 0$$

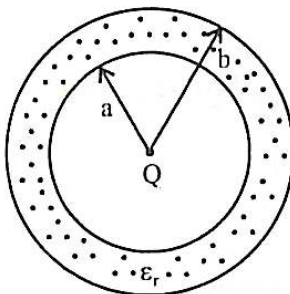
۱۱. ناحیه‌ای از فضا محدود به دو سطح کروی هم‌مرکز و به شعاعهای a و b را ماده عایقی پر می‌کند ($b > a$). بار نقطه‌ای Q را در مرکز لایه کروی مزبور قرار می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق عبارت است از:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad a < r < b$$

الف) قابلیت گذردهی ماده عایق را به دست آورید.

ب) چگالی بارهای سطحی پلاریزاسیون روی سطوح $r=a$ و $r=b$ را محاسبه نمایید.

ج) چگالی حجمی بار ناشی از پلاریزاسیون در ناحیه $a < r < b$ را به دست آورید.



شکل پ-۲۳

۱۱. الف) به دلیل وجود تقارن کروی، مطابق شکل پ-۲۳، میدانهای $\mathbf{D}$

و $\mathbf{E}$ فقط مؤلفه شعاعی داشته و فقط تابعی از r هستند.

$$\mathbf{D} = D_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r , \quad \mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r$$

با به کار بردن قانون گوس برای میدان $\mathbf{D}$ ، داریم:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \text{بار آزاد محصور در } S$$

که S سطح کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر بار Q است.

$$D_r(4\pi r^2) = Q \Rightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} , \quad 0 < r < \infty$$

پس، در ناحیه عایق داریم:

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} , \quad a < r < b$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

در نتیجه قابلیت گذردهی ماده عایق برابر با $\varepsilon \cdot \frac{b^2}{r^2}$ است.

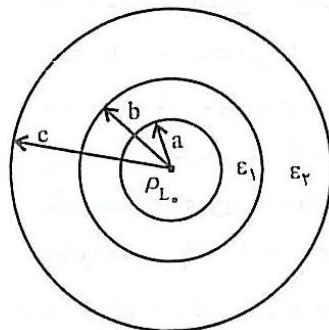
$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{Q}{4\pi b^2} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_r) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) & r=a \\ \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \cdot (\hat{\mathbf{a}}_r) = 0 & r=b \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left[\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right] \quad (\text{ج})$$

$$= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(-\frac{Qr^2}{4\pi b^2} \right) = \frac{Q}{4\pi b^2 r} \quad , \quad a < r < b$$



شکل ۳-۲۶

(۱۲) دو لایه عایق استوانه‌ای بینهایت طویل را با قابلیت‌های گذردهی ε_1 و ε_2 ، مطابق شکل ۳-۲۶، در نظر می‌گیریم. قابلیت گذردهی لایه درونی ثابت و برابر $\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \frac{c}{b}$ می‌باشد، ولی قابلیت گذردهی لایه بیرونی غیر یکنواخت و به صورت $\varepsilon_2 = \varepsilon \cdot \frac{c}{r}$ تغییر می‌کند. یک خط بار بینهایت طویل با چگالی ثابت ρ_L هم‌محور با استوانه‌های عایق قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:

(الف) میدان $\mathbf{D}$ در تمام نقاط فضا،

(ب) میدان $\mathbf{E}$ در تمام نقاط فضا،

(ج) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در هر دو عایق،

(د) چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطوح $r=a$ و $r=b$ و $r=c$.

۱۲. الف) به دلیل تقارن استوانه‌ای، میدانهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ فقط مؤلفه شعاعی داشته و فقط تابعی از r هستند. با به کار بردن قانون گوس، می‌توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S \quad \text{بار آزاد محصور در}$$

که S سطح کل استوانه‌ای به طول l ، شعاع r و هم‌محور با لایه‌های عایق است.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سطوح قاعده}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{سطح جانبی}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r (\gamma \pi r l)$$

$$S \text{ در } \rho_{L.} l = \rho_{L.} l \Rightarrow D_r (\gamma \pi r l) = \rho_{L.} l \Rightarrow D_r = \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi r}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi r} \hat{\mathbf{a}}_r, \quad 0 < r < \infty$$

ب) در هر ناحیه $\mathbf{E}$ از رابطه $\mathbf{E} = \mathbf{D} / \epsilon$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r & r < a, r > c \\ \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{\rho_{L.} b}{\gamma \pi \epsilon_0 c r} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \\ \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi \epsilon_0 c} \hat{\mathbf{a}}_r & b < r < c \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$$

(ج)

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{\rho_{L.} (c-b)}{\gamma \pi c r} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \\ \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi c} \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \hat{\mathbf{a}}_r & b < r < c \\ 0 & r < a, r > c \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{L.} (c-b)}{\gamma \pi c r} \hat{\mathbf{a}}_r \right] = 0, \quad \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi c} \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \hat{\mathbf{a}}_r \right] = -\frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi c r}$$

$$\rho_P = \begin{cases} 0 & r < b, r > c \\ \frac{\rho_{L.}}{\gamma \pi c r} & b < r < c \end{cases}$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n \quad (د)$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \frac{\rho_{L.}(c-b)}{\sqrt{\pi}ca} \hat{a}_r \cdot (-\hat{a}_r) = -\frac{\rho_{L.}(c-b)}{\sqrt{\pi}ca} & r=a \\ \frac{\rho_{L.}(c-b)}{\sqrt{\pi}cb} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r) + \frac{\rho_{L.}}{\sqrt{\pi}c} \left(\frac{c}{b} - 1 \right) \hat{a}_r \cdot (-\hat{a}_r) = 0 & r=b \\ \frac{\rho_{L.}}{\sqrt{\pi}c} \left(\frac{c}{c} - 1 \right) \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r) = 0 & r=c \end{cases}$$

به طور خلاصه:

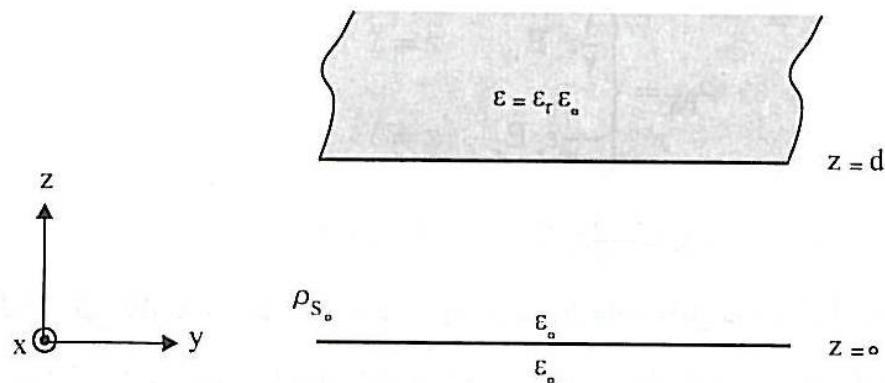
$$\rho_{PS} = \begin{cases} -\frac{\rho_{L.}(c-b)}{\sqrt{\pi}ca} & r=a \\ 0 & r=b, r=c \end{cases}$$

(۱۳) ناحیه $z > d$ از فضا را یک ماده عایق با قابلیت گذردهی $\epsilon_r = \epsilon_r$ فراگرفته، در حالی که ناحیه $z < d$ خلأ است. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت $\rho_{S.}$ ، مطابق شکل ۳-۲۷، در $z=0$ قرار داده می شود. مطلوب است محاسبه:

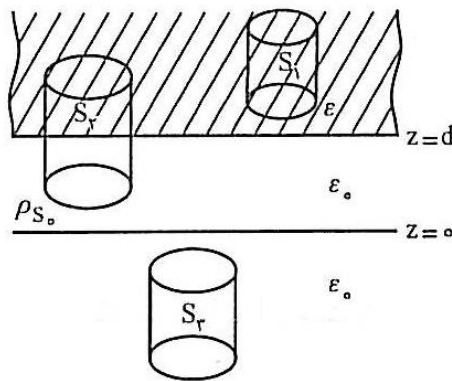
(الف) میدان D در تمام نقاط فضا،

(ب) میدان الکتریکی کل (E) در تمام نقاط فضا،

(ج) چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی مقید در ناحیه عایق.



شکل ۳-۲۷



شکل پ-۲۴

۱۳. الف) چون توزیع بار مولد میدان اولیه و نیز ناحیه عایق در امتداد محورهای x و y تا بینهایت ادامه داشته و در این امتدادها یکنواخت هستند، روشن است که کلیه کمیت‌های میدانی از قبیل P ، E ، D و چگالیهای بارهای القایی نسبت به x و y تغییراتی ندارند. از طرف دیگر، چون میدان اولیه (میدان یک صفحه بینهایت بار واقع در $z=0$) فقط مؤلفه z دارد و بر سطح ناحیه عایق عمود است. میدانهای P و E ، D نیز فقط مؤلفه z خواهند داشت. حال یک سطح گوسی استوانه‌ای در نظر می‌گیریم به طوری که محور آن موازی محور z باشد. ابتدا، سطح گوسی را کاملاً در ناحیه عایق (S_1) فرض می‌کنیم (شکل پ-۲۴). با به کار بردن قانون گوس، داریم:

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S_1 \text{ بار آزاد محصور در } S_1 = 0$$

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{قاعده بالا}} + \int_{\text{سطح جانبی}} + \int_{\text{قاعده پایین}} = S'_1 D_z(z'_1) - S''_1 D_z(z''_1) = 0$$

S'_1 سطح قاعده بالا واقع در $z=z'_1$ و S''_1 سطح قاعده پایین واقع در $z=z''_1$ است. چون $S'_1 = S''_1$ داریم:

$$D_z(z'_1) = D_z(z''_1), \quad z'_1 > z''_1 > d \Rightarrow D_z = D_0 = \text{مقدار ثابت}, \quad z > d$$

با اعمال قانون گوس روی سطح S_p ، نتیجه بالا مجدداً به دست می‌آید، به طوری که می‌توان گفت اندازه D برای ناحیه $z > 0$ (اعم از عایق و خلأ) مقدار ثابت D_0 است. بالاخره با تکرار عمل فوق برای سطح بسته S_p نتیجه مشابهی به دست می‌آید، مبنی بر اینکه بردار D در ناحیه $z < 0$ نیز یکنواخت است و اندازه ثابتی برابر D'_0 دارد. برای تعیین D_0 و D'_0 میدان ثانویه را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_r} = \mathbf{D} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \mathbf{D} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \hat{\mathbf{a}}_z \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_z) = -\frac{D_0 (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}, \quad z = d$$

میدان ثانویه حاصل از توزیع ρ_{ps} عبارت است از:

$$\mathbf{E}_s = \begin{cases} \frac{\rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z > d \\ -\frac{\rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z < d \end{cases}$$

و میدان اولیه که حاصل از صفحه بار در $z=0$ است، عبارت است از:

$$E_a = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_{S_0}}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

آنگاه میدان کل برابر است با:

$$E = E_a + E_s = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_0} + \rho_{PS}}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z < 0 \\ \frac{\rho_{S_0} - \rho_{PS}}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & 0 < z < d \\ \frac{\rho_{S_0} + \rho_{PS}}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z > d \end{cases}$$

در ناحیه $z > d$ ، از طرف دیگر $E = \frac{D_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{a}_z$ است، پس:

$$\frac{D_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_{S_0} + \rho_{PS}}{2\epsilon_0} = \frac{\rho_{S_0}}{2\epsilon_0} - \frac{D_0(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow D_0 = \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1}$$

با به کار بردن شرط مرزی در $z=0$ ، D برای $z < 0$ به دست می آید.

$$D_z(z > 0) - D_z(z < 0) = \rho_{S_0} \Rightarrow D_z(z < 0) = \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1} - \rho_{S_0} = -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1}$$

پس به طور خلاصه:

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

ب) میدان E از رابطه $E = \frac{D}{\epsilon}$ در هر ناحیه به دست می آید.

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0(\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z & z > d \\ \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_0(\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z & 0 < z < d \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0(\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

ج) قبلاً $\rho_p = 0$ را محاسبه کرده‌ایم. برای چگالی بارهای سطحی مقید داریم:

$$\rho_{PS} = -\frac{D \cdot (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} = -\left(\frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1}\right) \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right)$$

$$\rho_{PS} = -\rho_{S_0} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}, \quad z = d$$

۱۴. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ در کره‌ای از جنس عایق با قابلیت گذردهی $\epsilon_r \cdot \epsilon_0 = \epsilon$ توزیع شده است. نشان دهید که پتانسیل در مرکز این کره برابر است با $V = \rho \cdot a^2 (\epsilon_r + 1) / 6 \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ در آن شعاع کره عایق است.

۱۴. ابتدا میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \text{بار آزاد محصور در } S$$

که S سطح کره‌ای به شعاع r و هم‌مرکز با کره عایق است. از آنجا که میدان $\mathbf{D}$ فقط مؤلفه شعاعی داشته و این مؤلفه فقط تابعی از r می‌باشد، داریم:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r (4\pi r^2)$$

از طرفی:

$$Q = \int_V \rho_V dV = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) & r < a \\ \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) & r > a \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = D_r \hat{\mathbf{a}}_r = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3} \hat{\mathbf{a}}_r & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{3r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & r > a \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} \hat{\mathbf{a}}_r & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & r > a \end{cases}$$

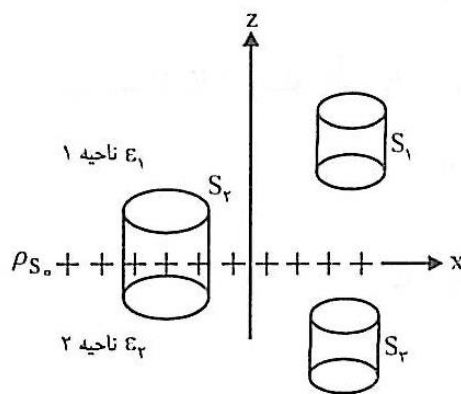
$$V(r=0) = \int_0^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^a \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} dr + \int_a^\infty \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon r^2} dr = \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon} + \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon} = \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_r \epsilon_0} (\epsilon_r + 1)$$

۱۵. ناحیه $z > 0$ از فضا را عایقی با قابلیت گذردهی ϵ_1 و ناحیه $z < 0$ را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ϵ_2 اشغال نموده است. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_{S_0} در $z = 0$ قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در $z = 0$ ،

ج) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در تمام نقاط فضا.



شکل پ-۲۵

۱۵. الف) از آنجا که توزیع بار و نواحی عایق (۱) و (۲) در امتداد محورهای x و y تا بینهایت ادامه داشته و در این امتدادها یکنواخت هستند، میدانهای حاصل تابعی از x و y نخواهند بود. بنابراین E و D همه جا فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_z$ هستند. حال مطابق شکل پ-۲۵ اگر سطح بسته استوانه‌ای شکل S_1 را در ناحیه (۱) به صورتی در نظر بگیریم که محور آن موازی محور z باشد، با به کار بردن قانون گوس روی S_1 داریم:

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S_1 \text{ بار آزاد محصور در } S_1 = 0$$

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{قاعده بالا}} + \int_{\text{قاعده پایین}} + \int_{\text{سطح جانبی}} = 0 + S_1' D_{1z}' - S_1'' D_{1z}'' = 0$$

S_1' و S_1'' به ترتیب مساحت‌های قاعده‌های فوقانی و تحتانی S_1 بوده و D_{1z}' مقدار D_z روی S_1' و D_{1z}'' مقدار D_z روی S_1'' است. چون $S_1' = S_1''$ ، داریم:

$$D_{1z}' = D_{1z}'' = D_{1z} = \text{مقدار ثابت}$$

با تکرار عمل فوق برای سطح بسته S_2 در ناحیه (۲)، به طور مشابه نتیجه می‌گیریم:

$$D_{2z}' = D_{2z}'' = D_{2z} = \text{مقدار ثابت}$$

نتایج مزبور به این مفهوم است که میدان D در هر یک از نواحی $z > 0$ و $z < 0$ مقدار ثابتی داشته و همواره در امتداد $\hat{a}_z$ برای $z > 0$ و $-\hat{a}_z$ برای $z < 0$ است. حال قانون گوس را برای سطح استوانه‌ای بسته S_2 که بخشی از توزیع بار را در بر می‌گیرد می‌نویسیم:

$$\oint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{1z} S_2' + D_{2z} S_2'' = \rho_{S_2} S_2''$$

که S_2' سطح قاعده بالا، S_2'' سطح قاعده پایین و S_2''' سطح مقطع صفحه xy و S_2 است. اما $S_2' = S_2'' = S_2'''$ ، بنابراین:

$$D_{1z} + D_{2z} = \rho_{S_2} \quad (1)$$

همچنین پایستار بودن میدان E ایجاب می‌نماید که $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ باشد. در اینجا منحنی بسته C

را محور z از $-\infty$ تا $+\infty$ انتخاب می‌کنیم (یا هر خط راستی موازی محور z). آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_z dz = \int_{-\infty}^0 -E_{2z} dz + \int_0^{\infty} E_{1z} dz = 0$$

توجه کنید که برای $z > 0$ ، $E = E_{1z} \hat{a}_z$ و برای $z < 0$ ، $E = -E_{2z} \hat{a}_z$ است. اما:

$$\int_{-\infty}^0 -E_{2z} dz = \int_0^{\infty} E_{1z} dz = - \int_{-\infty}^{\infty} E_{2z} dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_z dz = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{1z} - E_{2z}) dz = (E_{1z} - E_{2z}) \int_{-\infty}^{\infty} dz = 0$$

تساوی سمت راست بالا وقتی امکان پذیر است که:

$$E_{1z} - E_{2z} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{D_{1z}}{\epsilon_1} - \frac{D_{2z}}{\epsilon_2} = 0 \quad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲)، سرانجام D_{1z} و D_{2z} به شرح زیر به دست می آیند:

$$D_{1z} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad D_{2z} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}$$

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}, \quad E = \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{z}{|z|} \hat{a}_z, \quad -\infty < z < \infty$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases} \quad (ب)$$

$$\rho_{PS_1} = P(z > 0) \cdot \hat{a}_{n_1} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad z = 0^+$$

$$\rho_{PS_2} = P(z < 0) \cdot \hat{a}_{n_2} = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z \cdot (\hat{a}_z) = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad z = 0^-$$

$$\rho_{PS} = \rho_{PS_1} + \rho_{PS_2} = \frac{2\epsilon_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad z = 0$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = 0, \quad \text{تمام نقاط فضا} \quad (ج)$$

۱۶. مسئله ۱۵ را برای حالتی که به جای صفحه بینهایت بار، یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_l (مثلاً در امتداد محور x) قرار داده شود تکرار نمایید.

۱۶. الف) میدانهای E و D در هر یک از ناحیه های ۱ و ۲ فقط دارای مؤلفه شعاعی استوانه ای بوده و به علاوه این مؤلفه ها فقط تابعی از r خواهند بود (در هر ناحیه به تنهایی). شرط مرزی $E_{1r} = E_{2r}$ در

مرز $z=0$ ایجاب می‌کند که $E_r = E_{r_1} = E_{r_2}$ به ازای هر r باشد. بنابراین برحسب دستگاه مختصات استوانه‌ای، داریم:

$$E = E_r(r) \hat{a}_r, \quad \text{همه جا}$$

$$D = \begin{cases} \epsilon_1 E_r(r) \hat{a}_r & 0 < \varphi < \pi \quad (z > 0) \\ \epsilon_2 E_r(r) \hat{a}_r & \pi < \varphi < 2\pi \quad (z < 0) \end{cases}$$

برای تعیین E_r از قانون گوس استفاده می‌کنیم. سطح گوسی S را به صورت استوانه‌ای هم‌محور با خط بار، به طول واحد و به شعاع r در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\oint_S D \cdot dS = S \rho_{L.} = \rho_{L.}$$

$$\oint_S D \cdot dS = \int_{\text{قاعده‌های استوانه گوسی}} D \cdot dS + \int_{\text{سطح جانبی}} D \cdot dS = \int_{\text{نیمه فوقانی سطح جانبی } (z > 0)} D \cdot dS + \int_{\text{نیمه تحتانی سطح جانبی } (z < 0)} D \cdot dS$$

$$= (\epsilon_1 E_r)(\pi r) + (\epsilon_2 E_r)(\pi r) = \pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r E_r = \rho_{L.}$$

$$E_r = \frac{\rho_{L.}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \Rightarrow E = \frac{\rho_{L.}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_r, \quad 0 < r < \infty$$

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 \rho_{L.}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_r & 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < \pi \\ \frac{\epsilon_2 \rho_{L.}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_r & 0 < r < \infty, \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

توجه کنید که در پاسخهای مزبور $\frac{\hat{a}_r}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{y \hat{a}_y + z \hat{a}_z}{y^2 + z^2}$ است.

(ب) $\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{a}_n$ ، اما در $z=0$ ، $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_y$ بوده و $\hat{a}_n = \pm \hat{a}_z$ و از آنجا که $\hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$ است، بنابراین $\rho_{PS} = 0$ خواهد شد.

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_0}{r} \hat{a}_r, \quad \mathbf{P}_0 = \text{مقدار ثابت}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{P}_0}{r} \hat{a}_r \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mathbf{P}_0}{r} \right) = 0$$

■

۱۷. مسئله ۱۵ را برای حالتی که، به جای صفحه بینهایت بار، یک بار نقطه‌ای Q (مثلاً در مبدأ مختصات) قرار داده شود تکرار نمایید.

۱۷. الف) مشابه بحثی نظیر آنچه که برای مسئله ۱۶ انجام شد، میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در دستگاه مختصات کروی به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$E = E_r(r) \hat{a}_r, \quad \text{همه جا}$$

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \epsilon_1 E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (z > 0) \\ \epsilon_2 E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (z < 0) \end{cases}$$

برای تعیین E_r از قانون گوس استفاده می‌کنیم. سطح گوسی S را به صورت کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر بار Q در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{نیمه فوقانی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نیمه تحتانی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (\epsilon_1 E_r)(2\pi r^2) + (\epsilon_2 E_r)(2\pi r^2) = Q$$

(z > 0) S (z < 0) S

$$E_r = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{\mathbf{a}}_r, \quad 0 < r < \infty$$

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & 0 < r < \infty, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

ب) $\hat{\mathbf{a}}_n = \pm \hat{\mathbf{a}}_z$ ، اما در $z=0$ ، $\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$ ، $\rho_{PS} = 0$ است، $\hat{\mathbf{a}}_{rc} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 0$ ، ρ مقدار ثابتی است و $\rho = (\rho_0/r^2) \hat{\mathbf{a}}_{rc}$ که ρ مقدار ثابتی است و $\hat{\mathbf{a}}_n = \pm \hat{\mathbf{a}}_z$ چون

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\rho_0}{r^2} \right) \right] = 0 \quad (\text{ج})$$

۱۸) فضای محصور بین $z=0$ و $z=d$ را ماده عایقی فرا گرفته است. قابلیت گذردهی این ماده غیر یکنواخت بوده و طبق رابطه زیر تغییر می‌کند:

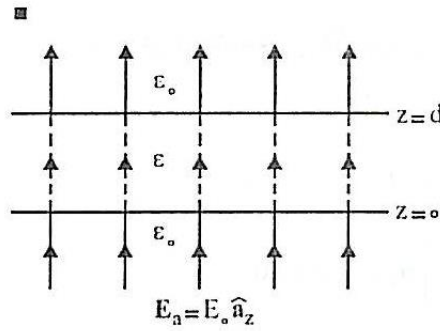
$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{(1+z/d)^2}$$

میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{a}}_z$ به این ماده اعمال می‌شود. مطلوب است محاسبه:

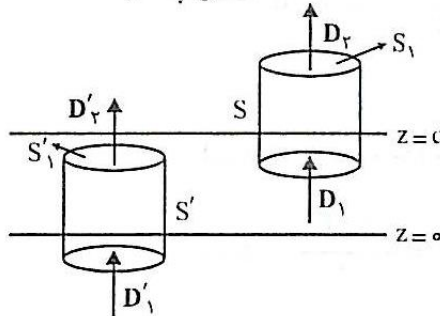
الف) میدان $\mathbf{D}$ در درون و بیرون عایق.

ب) میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{P}$ در درون عایق، چگالی سطحی ρ_{PS} روی سطوح $z=0$ و $z=d$ و نیز چگالی حجمی ρ_P در درون عایق.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{(1+z/d)^2}$$



شکل پ-۲۶



شکل پ-۲۷

الف) با توجه به اینکه جسم عایق در امتداد محورهای x و y از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد (شکل پ-۲۶) و قابلیت گذردهی جسم، تابعی از x و y نیست و بالاخره با توجه به اینکه میدان اولیه فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_z$ است، می توان استدلال نمود که میدانهای D ، E و P فقط مؤلفه $\hat{a}_z$ داشته و فقط تابعی از z هستند. حال اگر یک سطح گوسی استوانه‌ای در نظر بگیریم به طوری که محور آن موازی محور z باشد (شکل پ-۲۷)، با به کار بردن قانون گوس و توجه به اینکه بار آزاد در فضا وجود ندارد، داریم:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (D_{z_2} - D_{z_1}) S_1 = 0 \Rightarrow D_{z_2} = D_{z_1}$$

$$\oint_{S'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (D'_{z_2} - D'_{z_1}) S'_1 = 0 \Rightarrow D'_{z_2} = D'_{z_1}$$

از بحث مذکور چنین نتیجه می‌گیریم که بردار D در تمام فضا یکنواخت است، یعنی:

$$\mathbf{D} = D_0 \hat{a}_z, \quad -\infty < z < \infty$$

میدان کل در هر ناحیه از فضا از مجموع میدانهای اولیه و ثانویه حاصل می‌شود. میدان ثانویه در بیرون عایق ($z < 0$, $z > d$) عبارت است از:

$$\mathbf{E}_{s_1} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_a = \left(\frac{D_0}{\varepsilon_0} - E_0 \right) \hat{a}_z, \quad z < 0, \quad z > d$$

چون $\mathbf{E}_s$ خود یک میدان الکتریکی ساکن است، میدانی پایستار است و باید شرط $\oint_C \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{L} = 0$ را برآورده سازد. در اینجا مسیر بسته C را خط مستقیمی موازی محور z از $-\infty$ تا $+\infty$ (دایره‌ای به شعاع ∞) در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\oint_C \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{L} = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{D_0}{\varepsilon_0} - E_0 \right) dz + \int_0^d \left(\frac{D_0}{\varepsilon_0} - E_0 \right) dz + \int_d^{\infty} E_{s_{z_2}} dz = 0$$

که $E_{sz} = E_{sz} \hat{a}_z$ میدان ثانویه در ناحیه عایق است. چون E_{sz} محدود است، $\int_{-d}^d$ نیز محدود خواهد بود. حال اگر $\frac{D_z}{\epsilon_0} - E_z = 0$ باشد، انتگرالهای $\int_{-d}^0$ و $\int_0^d$ هر کدام بینهایت (با علامت یکسان) شده و صفر شدن $\oint_C$ امکان پذیر نخواهد بود. بنابراین $\frac{D_z}{\epsilon_0} - E_z = 0$ الزامی است. بدین ترتیب $D_z = \epsilon_0 E_z$ و $D_z = \epsilon_0 E_z \hat{a}_z$ ، $-\infty < z < \infty$

ب) با در دست داشتن D ، میدان E به سادگی از رابطه $E = \frac{D}{\epsilon_0}$ به دست می آید.

$$E = \begin{cases} E_0 \hat{a}_z & z < 0, z > d \\ \frac{E_0}{4} \left(1 + \frac{z}{d}\right)^3 \hat{a}_z & 0 < z < d \end{cases}$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{z}{d}\right)^3\right] \hat{a}_z, \quad 0 < z < d$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\epsilon_0 E_0}{4d} \left(1 + \frac{z}{d}\right), \quad 0 < z < d$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \epsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{d}{d}\right)^3\right] \hat{a}_z \cdot (+\hat{a}_z) = 0 & z = d \\ \epsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{0}{d}\right)^3\right] \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -\frac{3\epsilon_0 E_0}{4} & z = 0 \end{cases}$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} 0 & z = d \\ -\frac{3\epsilon_0 E_0}{4} & z = 0 \end{cases}$$

۱۹. ناحیه $1 < z < 2$ از فضا را ماده عایقی با ضریب حساسیت الکتریکی غیر یکنواخت $\epsilon = \frac{z}{4-z}$ اشغال نموده است. میدان الکتریکی یکنواخت $E_a = E_0 \hat{a}_z$ به ماده اعمال می شود. نشان دهید که چگالیهای سطحی و حجمی بارهای پلاریزاسیون از روابط زیر به دست می آیند:

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0 & z = 2 \\ -\frac{1}{4} \epsilon_0 E_0 & z = 1 \end{cases}$$

$$\rho_P = -\frac{1}{4} \epsilon_0 E_0, \quad 1 < z < 2$$

میدان الکتریکی ثانویه و میدان کل را در درون و بیرون ماده عایق به دست آورید.

۱۹. با به کار بردن روشی شبیه آنچه که در بند (الف) مسئله ۱۸ مورد استفاده قرار گرفت، نتیجه می‌گیریم که:

$$D = \varepsilon_0 E_0 \hat{a}_z, \quad -\infty < z < \infty$$

توجه کنید که نتیجه مذکور در مسئله ۱۸ مستقل از تابع تغییرات قابلیت گذردهی بر حسب z به دست آمد و بنابراین برای این مسئله نیز صادق است. حال با در دست داشتن D ، E را محاسبه می‌کنیم. در ناحیه عایق، $1 < z < 2$ ، داریم:

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0 (1 + \chi_e)} = \frac{\varepsilon_0 E_0 \hat{a}_z}{\varepsilon_0 [1 + z/(2-z)]} = \frac{E_0}{2} (2-z) \hat{a}_z, \quad 1 < z < 2$$

$$P = D - \varepsilon_0 E = [\varepsilon_0 E_0 - \frac{\varepsilon_0 E_0}{2} (2-z)] \hat{a}_z = \frac{\varepsilon_0 E_0 z}{2} \hat{a}_z, \quad 1 < z < 2$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 E_0 (1)}{2} \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -\frac{\varepsilon_0 E_0}{2} & z=1 \\ \frac{\varepsilon_0 E_0 (2)}{2} \hat{a}_z \cdot (\hat{a}_z) = \frac{\varepsilon_0 E_0}{2} & z=2 \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\varepsilon_0 E_0 z}{2} \right) = -\frac{\varepsilon_0 E_0}{2}, \quad 1 < z < 2$$

میدان کل و میدان ثانویه عبارتند از:

$$E = \begin{cases} \frac{E_0}{2} (2-z) \hat{a}_z & 1 < z < 2 \\ E_0 \hat{a}_z & z > 2, z < 1 \end{cases}$$

$$E_s = E - E_a = E - E_0 \hat{a}_z = \begin{cases} -\frac{E_0 z}{2} \hat{a}_z & 1 < z < 2 \\ 0 & z < 1, z > 2 \end{cases}$$

(۲۱) ناحیه $z < -d$ از فضا را یک ماده عایق با قابلیت گذردهی نسبی ε_r به طور یکنواخت فراگرفته است. بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات قرار داده می‌شود.

الف) نشان دهید که چگالی سطحی بارهای پلاریزاسیون القایی روی سطح عایق عبارت است از:

$$\rho_{PS} = -\frac{Q(\varepsilon_r - 1)d}{2\pi(\varepsilon_r + 1)(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

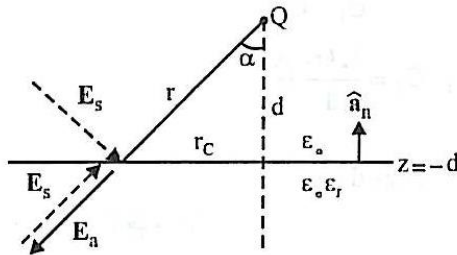
و چگالی حجمی بارهای پلاریزاسیون صفر است.

ب) نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق ($z < -d$) همانند میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای به مقدار $2Q/(\varepsilon_r + 1)$ است که در مبدأ مختصات واقع باشد.

ج) نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در ناحیه $z > -d$ همانند میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات و یک بار نقطه‌ای تصویر که مقداری برابر $-Q(\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 1)$ داشته و در نقطه $(0, 0, -2d)$ واقع باشد حاصل می‌شود.

۲۱. الف) بار نقطه‌ای Q تولید میدان اولیه $E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$ را می‌نماید (شکل پ-۲۸). این میدان جسم

عایق را قطبی می‌کند. بردار پلاریزاسیون، همانند بردار E_a با r تغییر می‌کند، یعنی $P = (P_0/r^3) \hat{a}_r$ که P_0 مقدار ثابتی است. به عبارت دیگر، چون جسم عایق از یک طرف ($z < -d$) تا بینهایت ادامه دارد، قطبی شدن همه مولکولهای جسم در امتداد میدان اولیه و متناسب با شدت آن صورت می‌پذیرد. حال چگالی بارهای مقید القایی را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:



شکل پ-۲۸

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n = \frac{P_0}{r^3} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_z) = -\frac{P_0 \cos \alpha}{r^3} = -\frac{P_0 d}{r^3} = -\frac{P_0 d}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}}, \quad z = -d$$

میدان ثانویه E_s عبارت است از:

$$E_s = E - E_a = \frac{P}{\epsilon - \epsilon_0} - E_a = \underbrace{\left(\frac{P_0}{\epsilon - \epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)}_{= E_s} \hat{a}_r, \quad z < -d$$

$$= \frac{E_s (r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z)}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}, \quad z < -d$$

با استفاده از تقارن E_s نسبت به $z = -d$ داریم:

$$E_s = \frac{E_s [r_c \hat{a}_{r_c} + (z + 2d) \hat{a}_z]}{[r_c^2 + (z + 2d)^2]^{3/2}}, \quad z > -d$$

توجه کنید که از رابطه $r = r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z$ استفاده شده است. میدان اولیه و میدان کل عبارتند از:

$$E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E = E_a + E_s = \begin{cases} E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{E_s [r_c \hat{a}_{r_c} + (z + 2d) \hat{a}_z]}{[r_c^2 + (z + 2d)^2]^{3/2}} & z > -d \\ E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{E_s (r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z)}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} & z < -d \end{cases}$$

حال شرایط مرزی را در $z=-d$ اعمال می‌کنیم. مؤلفه‌های مماسی میدان E در $z=-d$ در واقع همان مؤلفه‌های $\hat{a}_r$ به ازای $z=-d$ هستند، که همان‌طور که از عبارات سمت راست E در بالا پیدا است، با یکدیگر برابرند. اما، برای مؤلفه‌های عمودی داریم:

$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \epsilon_s E_{z1} = \epsilon E_{z2} \Big|_{z=-d}$$

$$\frac{d E_{s.}}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{-Qd}{4\pi\epsilon_s (r_c^2 + d^2)^{3/2}} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_s}\right) \left[\frac{-E_{s.}d}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{-Qd}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} \right]$$

از این رابطه $E_{s.}$ برابر است با:

$$E_{s.} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_s} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}$$

از طرفی:

$$E_{s.} = \frac{P_s}{\epsilon_s (\epsilon_r - 1)} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_s} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_s} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \Rightarrow P_s = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{2\pi(\epsilon_r + 1)}$$

$$\rho_{PS} = -\frac{P_s d}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)d}{2\pi(\epsilon_r + 1)(r_c^2 + d^2)^{3/2}}$$

ب) برای میدان کل در ناحیه $z < -d$ ، داریم:

$$E_r = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_s} + E_{s.} \right) \frac{\hat{a}_r}{r^2}, \quad z < -d$$

$$= \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_s} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_s} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right] \frac{\hat{a}_r}{r^2} = \frac{[2Q/(\epsilon_r + 1)]}{4\pi\epsilon_s r^2} \hat{a}_r$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که E_r همانند میدانی است که از یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات و به اندازه $\frac{2Q}{\epsilon_r + 1}$ کولمب به وجود آمده باشد.

ج) برای میدان کل در ناحیه $z > -d$ ، دو قسمت وجود دارد. یک قسمت شامل $\frac{Q}{4\pi\epsilon_s r^2} \hat{a}_r$ است که همانند میدانی است که از بار Q واقع در مبدأ مختصات ناشی شود. قسمت دیگر شامل

$$\frac{E_{s.} [r_c \hat{a}_r + (z + d) \hat{a}_z]}{[r_c^2 + (z + d)^2]^{3/2}} = \frac{E_{s.} R}{R^3} = \frac{E_{s.} \hat{a}_R}{R^2}$$

$$= -\frac{Q(\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 1)}{4\pi\epsilon_s R^2} \hat{a}_R; \quad R = r_c \hat{a}_r + (z + d) \hat{a}_z$$

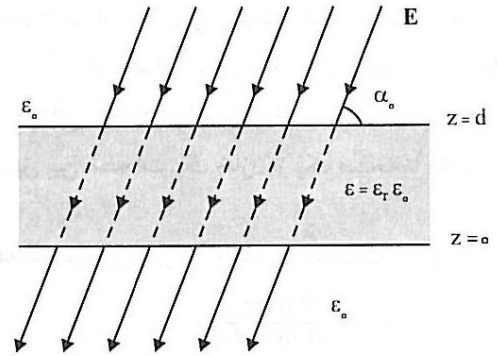
که همانند میدانی است که از بار $-\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1}$ واقع در $(x=0, y=0, z=-d)$ ناشی شود. این بار را می‌توان به منزله تصویر بار Q در ناحیه عایق تلقی کرد.

(این مسئله از نقطه نظر تصویر یک توزیع بار در مقابل یک جسم عایق دارای اهمیت است. حالت جالب دیگر مربوط به یک خط بینهایت بار به فاصله d از سطح یک نیم فضای عایق است.)

۲۷. میدان الکتریکی یکنواختی با شدت E_0 تحت زاویه α_0 ، مطابق شکل ۳-۲۹، به یک جسم عایق، محدود به صفحات $z=0$ و $z=d$ اعمال می‌گردد. قابلیت گذردهی عایق $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ است. فضای اطراف عایق خلأ می‌باشد. مطلوب است محاسبه:

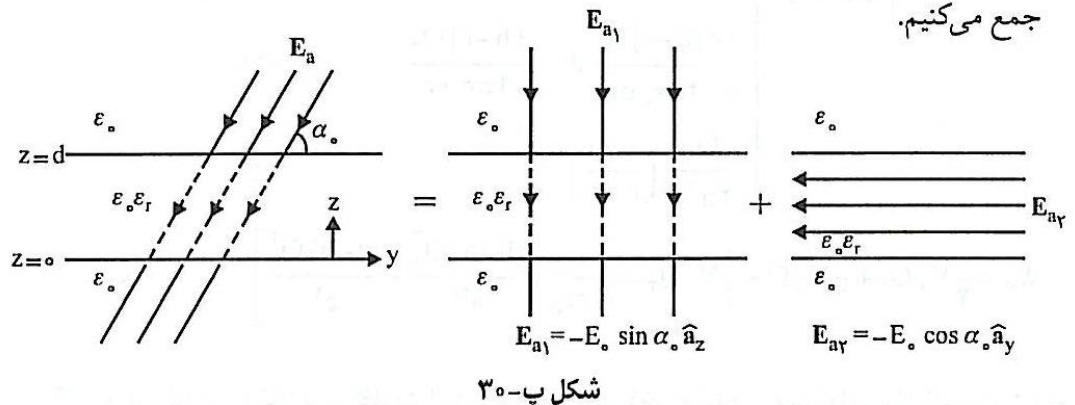
(الف) میدانهای کل D و E در تمام نقاط فضا،

(ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در $z=0$ و $z=d$.



شکل ۳-۲۹

۲۷. (الف) میدان الکتریکی E_a را به دو مؤلفه E_{a1} و E_{a2} در امتدادهای z و y ، مطابق شکل پ-۳۰، تجزیه می‌کنیم و مسئله را برای هر کدام از این مؤلفه‌ها جداگانه حل نموده و نتایج را با یکدیگر جمع می‌کنیم.



شکل پ-۳۰

(i) میدان E_{a1} جسم عایق را به طور یکنواخت در امتداد محور z قطبی می‌کند. در این حالت، وضعیت مانند مثال ۳-۳ است. بردار چگالی شار الکتریکی D_1 در تمام نقاط فضا یکسان است و در بیرون عایق میدان ثانویه پدید نمی‌آید.

$$D_1 = \epsilon_r E_{a1} = -\epsilon_r E_0 \sin \alpha_0 \hat{a}_z \quad \text{در تمام نقاط فضا}$$

$$E_1 = \begin{cases} D_1 / \epsilon_0 & z < 0, z > d \\ D_1 / \epsilon_r \epsilon_0 & 0 < z < d \end{cases}$$

(ii) میدان $E_{a\gamma}$ جسم عایق را به طور یکنواخت در امتداد محور y قطبی می‌کند. اگر بردار پلاریزاسیون را در این حالت P_γ بنامیم، می‌توان نوشت:

$$P_\gamma = -P \cdot \hat{a}_y$$

چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی مقید برای این حالت عبارتند از:

$$\rho_{P_\gamma} = -\nabla \cdot P_\gamma = 0, \quad \rho_{PS_\gamma} = P_\gamma \cdot \hat{a}_n = -P \cdot \hat{a}_y \cdot (\pm \hat{a}_z) = 0$$

بنابراین، بارهای القایی مقید در این حالت ایجاد نمی‌شوند و بنابراین میدان ثانویه‌ای نیز پدید نمی‌آید. میدان کل در این حالت همان میدان اولیه است.

$$E_\gamma = E_{a\gamma} = -E \cdot \cos \alpha \cdot \hat{a}_y, \quad D_\gamma = \begin{cases} \epsilon_0 E_\gamma & z < 0, z > d \\ \epsilon_0 \epsilon_r E_\gamma & 0 < z < d \end{cases}$$

اکنون می‌توان میدانهای D و E را به شرح زیر محاسبه کرد:

$$D = D_1 + D_\gamma$$

$$D = \begin{cases} \epsilon_0 E_{a\gamma} + \epsilon_0 E_{a1} = \epsilon_0 E_a & z < 0, z > d \\ \epsilon_0 \epsilon_r E_{a\gamma} + \epsilon_0 E_{a1} = -\epsilon_0 E \cdot (\epsilon_r \cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \sin \alpha \cdot \hat{a}_z) & 0 < z < d \end{cases}$$

$$E = E_1 + E_\gamma$$

$$E = \begin{cases} E_{a\gamma} + E_{a1} = E_a & z < 0, z > d \\ E_{a\gamma} + \frac{E_{a1}}{\epsilon_r} = -E \cdot \left(\cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \frac{\sin \alpha}{\epsilon_r} \hat{a}_z \right) & 0 < z < d \end{cases}$$

$$P = D - \epsilon_0 E = -\epsilon_0 E \cdot (\epsilon_r \cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \sin \alpha \cdot \hat{a}_z) + \epsilon_0 E \cdot \left(\cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \frac{\sin \alpha}{\epsilon_r} \hat{a}_z \right) \quad (ب)$$

$$P = -\epsilon_0 E \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \hat{a}_z + \epsilon_0 E \cdot \cos \alpha \cdot (1 - \epsilon_r) \hat{a}_y$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n = \begin{cases} P \cdot \hat{a}_z = -\epsilon_0 E \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) & z = d \\ P \cdot (-\hat{a}_z) = \epsilon_0 E \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) & z = 0 \end{cases}$$

۲۰-۳ یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای قطبش $P = k r \hat{r}$ است. میدان الکتریکی سه ناحیه $r < a$ ، $a < r < b$ ، و $r > b$ را بیابید.

۲۰-۳ بارهای قطبش عبارت‌اند از

$$\rho_b = \nabla \cdot \mathbf{P} = -3k$$

چگالی بار سطحی در $r = a$ برابر $\mathbf{P} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = -ka$ و در $r = b$ برابر $\mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{r}}) = kb$ است. تمام بارها تقارن کروی دارند، پس می‌توان با استفاده از قانون گوس E را یافت

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

در $r < a$ بار صفر است، پس $E = 0$. در $b > r > a$ بار سطحی در $r = a$ و بار حجمی در فاصله b تا r باید

به حساب آید. پس

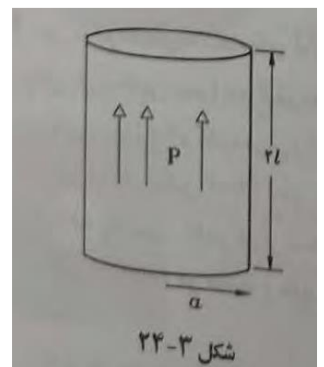
$$\begin{aligned} Q &= 4\pi a^2(-ka) + \int_a^r -3k dv \\ &= -4\pi k a^2 - 4k\pi(r^2 - a^2) = -4k\pi r^2 \\ E &= -\frac{kr}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \quad b > r > a \end{aligned}$$

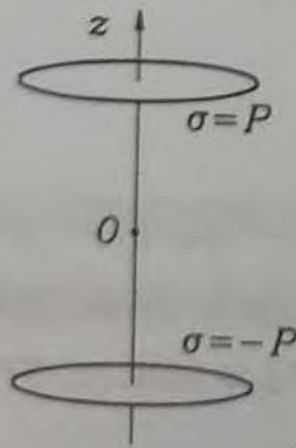
در $r > b$ دو بار سطحی داریم و

$$Q = 4\pi a^2(-ka) + \int_a^b -3k dv + 4\pi b^2(kb) = 0$$

پس در $r > b$ نیز $E = 0$.

۲۴-۳ استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع $2l$ به طور یکنواخت در امتداد محورش قطبیده شده است. پتانسیل الکتریکی V و میدان الکتریکی E روی محور استوانه را بیابید.





۲۴-۳ بار حجمی مقید ρ_b صفرست و روی سطوح بالا و پایین بارهای مقید با چگالی $\pm P$ وجود دارد. پس باید میدان ناشی از دو قرص دارای چگالیهای P و $-P$ واقع در $z = \pm l$ را بیابیم. چون روی محور قرصی با چگالی بار σ و شعاع R

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$$

شکل ح ۲۲-۳

پس

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + (z-l)^2} + 2l - \sqrt{a^2 + (z+l)^2})$$

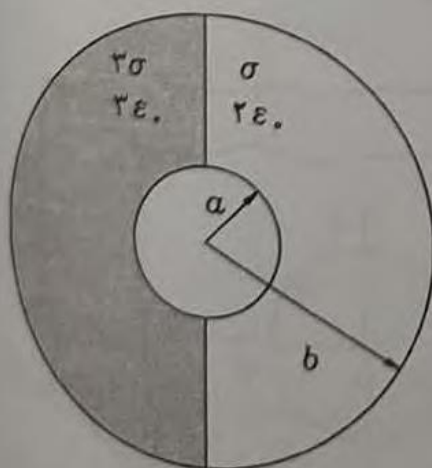
چون روی محور تنها مولفه E_z داریم

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\frac{z+l}{\sqrt{a^2 + (z+l)^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{a^2 + (z-l)^2}} \right]$$

به نحوی مشابه در $-l < z < l$ داریم

$$E = -\frac{P}{2\epsilon_0} \left[2 + \frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2 + a^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{(z+l)^2 + a^2}} \right]$$

مشترک دو عایق را بیابید.



شکل ۲۹-۳

۲۹-۳ بین دو کره هادی به شعاعهای a و $b = 3a$ دو ماده، یکی بارسانایی ویژه σ و گذردهی $2\epsilon_0$ و یکی بارسانایی ویژه 3σ و گذردهی $3\epsilon_0$ ، به صورت نشان داده شده در شکل ۲۹-۳ قرار دارد. بین دو کره اختلاف پتانسیل V_0 برقرار شده است. قطبش و چگالی جریان در دو محیط و مقاومت بین دو کره را بیابید.

۳-۲۹ میدان الکتریکی در جهت شعاعی است و برای پیوستگی مولفه مماسی E روی مرز باید داشته باشیم $E_1 = E_2$. اگر جریان بین دو کره را I_0 بنامیم داریم

$$I_0 = \int J_1 \cdot ds + \int J_2 \cdot ds \\ = 2\pi r^2 J_1 + 2\pi r^2 J_2 = 2\pi r^2 (J_1 + J_2)$$

چون $J = \sigma E$ و $E_1 = E_2$ پس $J_1 / \sigma_1 = J_2 / \sigma_2$ یا $J_2 = 3J_1$ و

$$J_1 = \frac{I_0}{4\pi r^2}$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره برابر V_0 است

$$V_0 = - \int_{3a}^a E_1 \cdot dr = - \int_{3a}^a \frac{J_1}{\sigma_1} dr = - \frac{I_0}{4\pi\sigma} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{I_0}{4\pi\sigma} \frac{2}{3a}$$

پس مقاومت عبارت است از

$$R = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{12\pi\sigma a}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{3aV_0}{2r^2} \hat{r}, \quad J_2 = 3J_1, \quad J_1 = \frac{3a\sigma V_0}{2r^2} \hat{r}$$

$$P_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{R1} - 1) E_1 = \frac{3\epsilon_0 a \sigma V_0}{2r^2} \hat{r}$$

$$P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{R2} - 1) E_2 = \frac{3\epsilon_0 a \sigma V_0}{r^2} \hat{r}$$

۳-۳۱ بار Q در داخل کره‌ای با گذردهی ϵ و شعاع a طوری توزیع شده است که میدان قطبش داخل کره در جهت شعاعی است و با $\frac{1}{r}$ متناسب است. میدانهای D ، P و E داخل کره و چگونگی توزیع بار را به دست آورید.

۳-۳۱ با توجه به شعاعی بودن میدان داریم

$$P = \frac{K}{r} \hat{r}$$

حال رابطه‌ای بین E و P به دست می‌آوریم

$$P = D - \epsilon_0 E = \epsilon E - \epsilon_0 E = (\epsilon - \epsilon_0) E$$

و نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{E} = \frac{K}{(\epsilon - \epsilon_0) r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0) r} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0) r^2}$$

تمام عبارتهای بالا بر حسب K است؛ اکنون باید K و Q را به هم ربط دهیم

$$Q = \int \rho \, dv = \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0)} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{\epsilon K \times 4\pi a}{(\epsilon - \epsilon_0)}$$

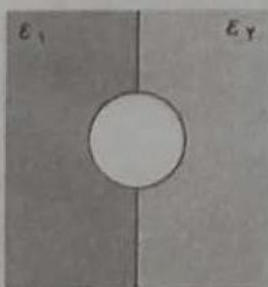
پس K عبارت است از

$$K = \frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi a \epsilon}$$

و میدانها به صورت زیر به دست می آیند

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi a r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi a \epsilon r} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a r^2}, \quad \mathbf{P} = \frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi Q \epsilon r} \hat{\mathbf{r}}$$



شکل ۳-۳۵

۳-۳۵ یک کره هادی در مرکز دو ناحیه با گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 قرار دارد، به نحوی که مرکز دو ناحیه از مرکز کره می گذرد. اگر بار q روی کره قرار داشته باشد، چگالی بار القاشده در هر طرف آن چقدر است؟

۳۵-۳ همانند مسئله ۳-۳۲ به دست می آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi r^3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{\mathbf{r}}$$

در دو محیط داریم $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$ یعنی

$$\mathbf{P}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^3} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^3} \hat{\mathbf{r}}$$

در روی کره $\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ، یعنی

$$\sigma_1 = \mathbf{P}_1 \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi R^3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

$$\sigma_2 = \mathbf{P}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi R^3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

۳۲-۳ میدان الکتریکی شعاعی می تواند جواب مسئله باشد. چون در مرز میدان الکتریکی مماسی پیوسته است نتیجه می گیریم $E_1 = E_2 = E$. در دو محیط $D_1 = \epsilon_1 E$ و $D_2 = \epsilon_2 E$. یک سطح کروی به عنوان سطح گوس در نظر می گیریم

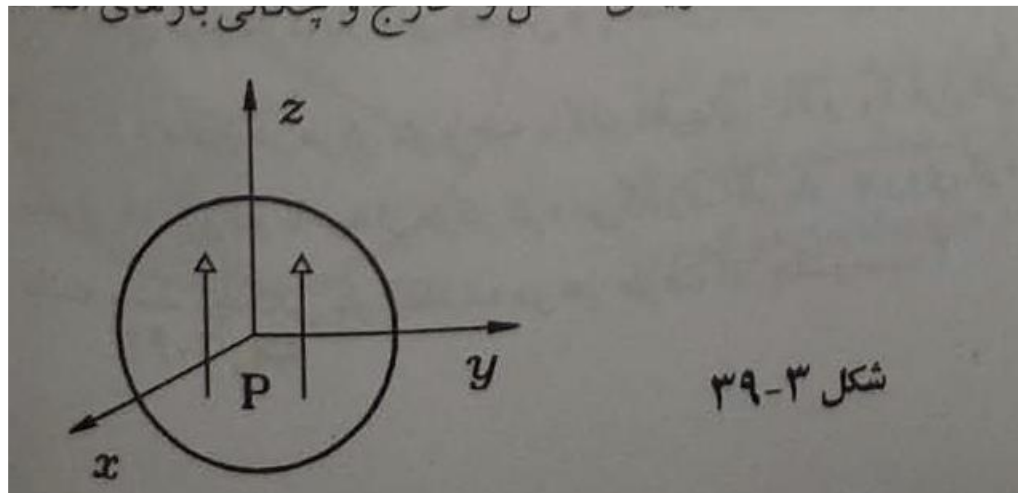
$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q = 4\pi r^2 D_1 + 4\pi r^2 D_2$$

$$q = 4\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2) E$$

پس میدان در دو محیط عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi r^3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{\mathbf{r}}$$

۳۹-۳ مرکز کره عایقی به شعاع R در مبدا مختصات قرار دارد و بردار قطبش در آن $\mathbf{P} = P_0 \hat{\mathbf{z}}$ است. پتانسیل نقاط دورن و بیرون کره را بیابید. استفاده از میدان دو قطبی ساده تر از استفاده از بارهای قطبش است؛ میدان دو قطبی عبارت است از $V = (1/4\pi\epsilon_0) [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})/R^3]$ ، حجم کره را به بخشهای کوچکی تقسیم کنید و پتانسیل بخشها را با هم جمع کنید.



۳-۳۹ حجم کره را به عناصر dv تقسیم می‌کنیم. در هر عنصر دو قطبی $P dv$ وجود دارد. پس

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{P} dv \cdot \mathbf{R}}{R^3}$$

چون $\mathbf{P}$ بردار ثابتی است می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \int \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} dv$$

اگر کره‌ای با چگالی بار $\rho = 1$ می‌داشتیم میدان الکتریکی ناشی از آن به صورت زیر به دست می‌آمد

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} dv$$

پس

$$V = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_1$$

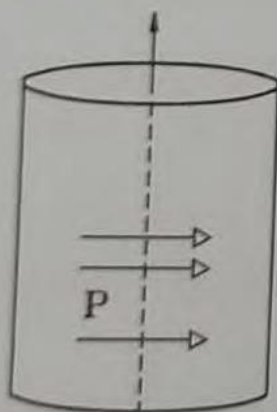
که $\mathbf{E}_1$ میدان ناشی از کره‌ای با چگالی بار یکنواخت $\rho = 1$ است. می‌دانیم برای چنین کره‌ای

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} \frac{r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} & r < a \\ \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > a \end{cases}$$

بنابراین

$$V = \begin{cases} P_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{P_0 r}{3\epsilon_0} \cos \theta = \frac{P_0 z}{3\epsilon_0} & r < a \\ P_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{a^3 P_0 \cos \theta}{3\epsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

۴۳-۳ یک استوانه بی نهایت به شعاع a به طور یکنواخت قطبیده شده و $\mathbf{P}$ عمود بر محور استوانه است.



E را در داخل استوانه بیابید و نشان دهید که در بیرون استوانه

$$E = \frac{a^2}{2\epsilon_0 R^2} [2(\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{P}]$$

که در آن $\mathbf{R}$ بردار مکان و R اندازه آن است.

شکل ۴۳-۳

۴۳-۳ به شیوه مسئله ۳-۳۹ عمل می کنیم و به دست می آوریم

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \int \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} dv$$

حاصل انتگرال و ضرب $1/4\pi\epsilon_0$ میدان الکتریکی ناشی از استوانه ای با چگالی بار $\rho = 1$ است و برای

چنین استوانه ای

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{p}} \\ \frac{a^2}{2\epsilon_0 \rho} \hat{\mathbf{p}} \end{cases}$$

چون $\mathbf{P} = P_0 \hat{\mathbf{x}}$ ، $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos \phi$ و $\rho \cos \phi = x$ ، در داخل استوانه

$$V = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{P_0}{2\epsilon_0} x$$

$$\mathbf{E}_i = -\nabla V = -\frac{P_0}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}}$$

در خارج استوانه

$$V = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{a^2}{2\epsilon_0 \rho} P_0 \cos \phi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{\cos \phi}{\rho^2} \hat{\mathbf{p}} + \frac{\sin \phi}{\rho^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right]$$

در مختصات استوانه ای روی صفحه $z = \text{ثابت}$ ، $\mathbf{R} = \rho \hat{\mathbf{p}}$ ، با کمی عملیات جبری می توان رابطه فوق را به

رابطه زیر تبدیل کرد که با رابطه داده شده در صورت مسئله یکسان است.

$$\mathbf{E} = \frac{a^2}{2\epsilon_0} [2(\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{P}]$$

۱. ناحیه $0 < z < d$ از ماده‌ای با ضریب دی الکتریک نسبی $\epsilon_r = \left(2 + \frac{z}{d}\right)^2$ پوشانیده شده است اگر این ناحیه تحت میدان خارجی یکنواخت $E = E_0 \hat{a}_z$ قرار گیرد چگالی سطحی بارهای پلاریزه در $z=0$ و $z=d$ کدام است؟ (ρ_{sb_1} در $z=0$ و ρ_{sb_2} در $z=d$)

$$\begin{aligned} \rho_{sb_1} &= -\frac{3}{4} \epsilon_0 E_0 & \rho_{sb_1} &= 0 \\ \rho_{sb_2} &= \frac{3}{4} \epsilon_0 E_0 & \rho_{sb_2} &= -\frac{\Lambda}{9} \epsilon_0 E_0 \\ \rho_{sb_1} &= 0 & \rho_{sb_1} &= -\frac{3}{4} \epsilon_0 E_0 \\ \rho_{sb_2} &= \frac{\Lambda}{9} \epsilon_0 E_0 & \rho_{sb_2} &= \frac{\Lambda}{9} \epsilon_0 E_0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

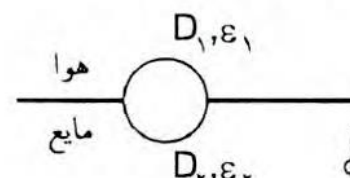
۱. گزینه (۳) چون میدان بطور عمود بر عایق قرار دارد پس پیوستگی مولفه عمودی D را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\text{عایق}} &= \epsilon_0 E_0 \hat{a}_z = \epsilon_0 E_{\text{عایق}} \Rightarrow \bar{E}_{\text{عایق}} = \frac{E_0}{\left(2 + \frac{z}{d}\right)^2} \hat{a}_z \\ \bar{P} &= \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E}_{\text{عایق}} = \epsilon_0 \left[\left(2 + \frac{z}{d}\right)^2 - 1 \right] \frac{E_0}{\left(2 + \frac{z}{d}\right)^2} \hat{a}_z \\ \rho_{sb_1} &= \bar{P} \cdot (-\hat{a}_z) \Big|_{z=0} = -\frac{3}{4} \epsilon_0 E_0 \\ \rho_{sb_2} &= \bar{P} \cdot (\hat{a}_z) \Big|_{z=d} = \frac{\Lambda}{9} \epsilon_0 E_0 \end{aligned}$$

۳. یک کره فلزی بشعاع a که دارای بار Q است در یک مایع با ضریب دی الکتریک نسبی $\epsilon_r = 4$ تا نیمه فرو رفته است در اینصورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $Q/8$ روی نیمکره داخل مایع و $Q/2$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.
- (۲) $Q/2$ روی نیمکره داخل مایع و $Q/8$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.
- (۳) $Q/75$ روی نیمکره داخل مایع و $Q/25$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.
- (۴) $Q/5$ روی نیمکره داخل مایع و $Q/5$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.

۳. گزینه (۱) بعلت پیوستگی مؤلفه مماسی E در مرز مشترک هوا و مایع E در دو محیط مساوی پس D در دو محیط یکسان نیست بنابراین معادله گوس بصورت زیر خواهد بود.



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q \Rightarrow \begin{cases} D_1 + D_2 = \frac{Q}{2\pi r^2} \\ \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow D_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

$$\rho_{s1} = D_1 \Big|_{r=a} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{2\pi a^2} \quad \rho_{s2} = D_2 \Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{2\pi a^2}$$

$$Q_1 = \rho_{s1} 2\pi a^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} Q = 0.2 Q \quad Q_2 = \rho_{s2} 2\pi a^2 = \frac{\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} Q = 0.8 Q$$

۱۲. کره فلزی بشعاع a را که دارای پتانسیل V_0 می باشد در یک محیط که ضریب دی الکتریک نسبی آن $\varepsilon_r = 1 + \frac{a}{r}$ می باشد قرار می دهیم در اینصورت پتانسیل کره چقدر خواهد بود؟
- (۱) $0.69 V_0$ (۲) $0.37 V_0$ (۳) $0.5 V_0$ (۴) $0.8 V_0$

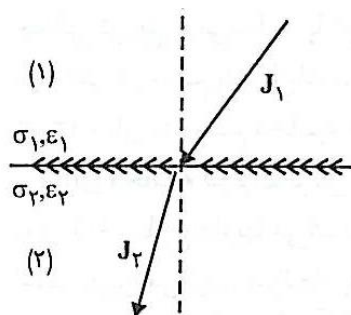
۱۲. حل: گزینه (۱) میدان در خارج کره را با استفاده از قانون گوس بدست می آوریم

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r^2} \hat{a}_r \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi r^2 (1 + \frac{a}{r}) \varepsilon_0} \hat{a}_r = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r(r+a)} \hat{a}_r$$

$$V = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^{\infty} \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r(r+a)} dr = \int_a^{\infty} \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right] \frac{1}{a} dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 a} \ln \frac{r}{r+a} \Big|_a^{\infty} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 a} \ln 2 = V_0 \ln 2 = 0.69 V_0$$

شرایط مرزی



شکل ۳-۲۳

۴. دو ناحیه با قابلیت های گذردهی ε_1 و ε_2 و رسانایی های σ_1 و σ_2 ، مطابق شکل ۳-۲۳، را در نظر بگیرید. فرض کنید یک جریان الکتریکی که چگالی آن در ناحیه ۱ برابر J_1 و در ناحیه ۲ برابر J_2 است، از ناحیه ۱ به سوی ناحیه ۲ برقرار باشد. نشان دهید که شرط مرزی برای مؤلفه های مماسی چگالی جریان به صورت $J_{t1}/\sigma_1 = J_{t2}/\sigma_2$ و برای مؤلفه های عمودی آن به صورت $J_{n1} = J_{n2}$ بیان می شود. همچنین نشان دهید که در مرز مشترک دو ناحیه باری با چگالی سطحی $\rho_s = J_n(\varepsilon_1/\sigma_1 - \varepsilon_2/\sigma_2)$ وجود دارد.

۴. بین دو ناحیه با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 شرایط مرزی همان روابطی هستند که در ۳-۶۵ و ۳-۶۶ داده شده‌اند. یعنی،

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad \epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} = \rho_S$$

اما در هر ناحیه همواره رابطه $J = \sigma E$ برقرار است. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$E_{t1} = \frac{J_{t1}}{\sigma_1} = E_{t2} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2} \Rightarrow \frac{J_{t1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2}$$

برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی چگالی جریان، از اصل پیوستگی جریان ساکن استفاده می‌کنیم. اگر عنصر سطح ΔS را در مرز مشترک دو ناحیه در نظر بگیریم، مقدار جریانی که از این عنصر سطح از ناحیه ۱ به سوی مرز می‌رود باید برابر مقدار جریانی باشد که از همین عنصر سطح وارد ناحیه ۲ می‌شود. به بیان دیگر،

$$J_{n1} \Delta S = J_{n2} \Delta S, \quad \Delta S = \Delta S \hat{a}_n \Rightarrow J_{n1} = J_{n2} = J_n$$

اکنون از این شرط مرزی در رابطه $\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} = \rho_S$ استفاده می‌کنیم.

$$J_{n1} = \sigma_1 E_{n1} \Rightarrow E_{n1} = \frac{J_{n1}}{\sigma_1}, \quad J_{n2} = \sigma_2 E_{n2} \Rightarrow E_{n2} = \frac{J_{n2}}{\sigma_2}$$

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{n1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{n2} = \rho_S \Rightarrow \rho_S = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right)$$

۳-۴۴ شرایط مرزی بردار قطبش $\mathbf{P}$ را بیابید.

۳-۴۴ داریم $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_R - 1) \mathbf{E}$ پس چون $E_{t1} = E_{t2}$

$$\frac{P_{t1}}{\epsilon_0 (\epsilon_{R1} - 1)} = \frac{P_{t2}}{\epsilon_0 (\epsilon_{R2} - 1)}$$

یا $P_{t1} (\epsilon_{R2} - 1) = P_{t2} (\epsilon_{R1} - 1)$ که به دست می‌دهد $P_{t1} \chi_2 = P_{t2} \chi_1$ همچنین داریم $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$ پس

$$\frac{\epsilon_1 P_{n1}}{\epsilon_0 (\epsilon_{R1} - 1)} = \frac{\epsilon_2 P_{n2}}{\epsilon_0 (\epsilon_{R2} - 1)}$$

$$\frac{\epsilon_{R1}}{\epsilon_{R1} - 1} P_{n1} = \frac{\epsilon_{R2}}{\epsilon_{R2} - 1} P_{n2}$$

۳-۴۷ ناحیه ۱ دارای گذردهی نسبی ۱ و ناحیه ۲ دارای گذردهی نسبی ۲ است. بردار عمود بر مرز، از ناحیه ۱ به سمت ناحیه ۲ عبارت است از $\mathbf{A} = -2\hat{x} + 5\hat{y} + 14\hat{z}$. اگر $\mathbf{E}_1 = 30\hat{x} - 15\hat{y} + 45\hat{z}$ زاویه بین هر یک از بردارهای $\mathbf{E}_1$ ، $\mathbf{D}_1$ ، $\mathbf{E}_2$ ، $\mathbf{D}_2$ و $\mathbf{A}$ را ساند.

۴۷-۳ دامنه میدان در ناحیه ۱ برابرست با $|E_1| = \sqrt{900 + 225 + 2025} = 56,12$ به همین ترتیب

پس $|A| = 15$

$$\angle A, E_1 = \cos^{-1} \frac{A \cdot E_1}{|A| |E_1|} = \cos^{-1} \frac{-60 - 75 + 630}{15 \times 56,12} = 53,9^\circ$$

چون E_1 و D_1 همراستا هستند، $\angle A, D_1 = 53,9^\circ$. میدان در ناحیه ۲ را می‌یابیم

$$E_{1n} = (E_1 \cdot \hat{a}) \hat{a} = \frac{E_1 \cdot A}{|A|} \frac{A}{|A|} = -4,4 \hat{x} + 11 \hat{y} + 30,8 \hat{z}$$

$$E_{1t} = E_1 - E_{1n} = 34,4 \hat{x} - 26 \hat{y} + 14,2 \hat{z}$$

با توجه به شرایط مرزی $E_{2t} = E_{1t}$ و

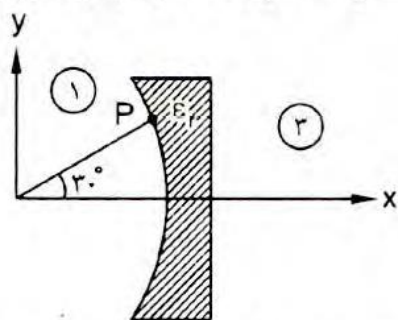
$$D_{2n} = D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 E_{1n}$$

$$E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1n}}{2\epsilon_0} = \frac{E_{1n}}{2} = -2,2 \hat{x} + 5,5 \hat{y} + 15,4 \hat{z}$$

$$E_2 = E_{2t} + E_{2n} = 32,2 \hat{x} - 20,5 \hat{y} + 29,6 \hat{z}$$

$$\angle A, E_2 = \angle A, D_2 = \cos^{-1} \frac{E_2 \cdot A}{|E_2| |A|} = 70,5^\circ$$

۴. در شکل زیر یک دی الکتریک به شکل لنز در معرض میدان $E = 4\sqrt{3} \hat{a}_R + 3\hat{a}_\phi$ در نقطه P قرار دارد. ضریب دی الکتریک نسبی دی الکتریک ϵ_r چقدر باشد تا میدان در محیط ۳ موازی محور y قرار می‌گیرد.



- | | |
|---------|---------|
| ۱/۵ (۲) | ۲/۵ (۱) |
| ۴ (۴) | ۳ (۳) |

۴. حل: گزینه ۴ پیوستگی مولفه مماسی E و عمودی D در نقطه P، در مرز مشترک محیط ۱ و دی الکتریک بصورت زیر است.

$$\epsilon_0 E_{R1} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{R2} \rightarrow E_{R2} = \frac{1}{\epsilon_r} E_{R1} = \frac{4\sqrt{3}}{\epsilon_r}$$

$$E_{\phi_2} = E_{\phi_1} \rightarrow E_{\phi_2} = 3$$

$$E_2 = \frac{4\sqrt{3}}{\epsilon_r} \hat{a}_R + 3\hat{a}_\phi = \frac{4\sqrt{3}}{\epsilon_r} (\hat{a}_x \cos 30^\circ + \hat{a}_y \sin 30^\circ) + 3[-\hat{a}_x \sin 30^\circ + \hat{a}_y \cos 30^\circ]$$

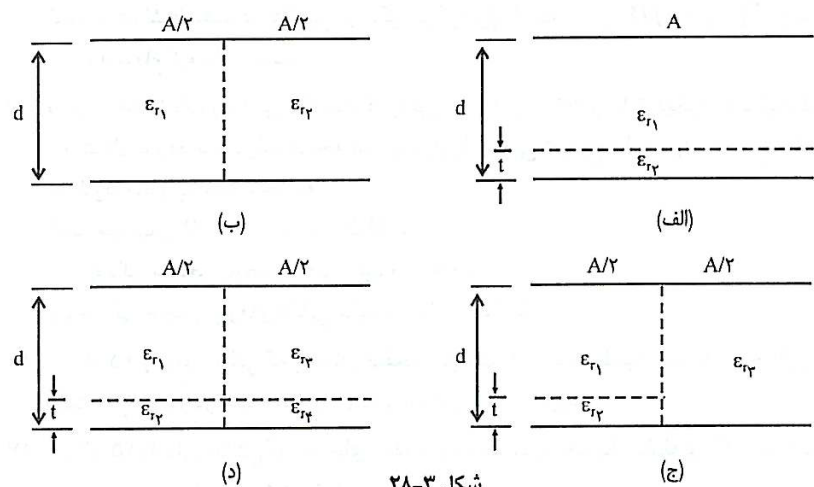
$$E_2 = \left(\frac{6}{\epsilon_r} - \frac{3}{2} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{2\sqrt{3}}{\epsilon_r} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \hat{a}_y$$

برای اینکه میدان در ناحیه ۳ موازی محور y باشد باید مولفه E_x در محیط ۲ صفر باشد.

$$\frac{6}{\epsilon_r} - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \epsilon_r = 4$$

ظرفیت، انرژی الکتریکی و نیرو

(۲۵) ظرفیت هر یک از خازنهای با صفحات موازی را که در شکل ۲۸-۳ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید. فرض کنید ضخامت عایقها از ابعاد صفحات هادی بسیار کوچکتر بوده، آنگاه میدان الکتریکی را در بین صفحات هر خازن با میدان صفحات موازی و بینهایت تقریب بزنید.



۲۵. الف) اعمال اختلاف پتانسیل V بین دو صفحه هادی، میدان الکتریکی یکنواخت D را بین صفحات به وجود می‌آورد. در این بند و سایر بندهای این مسئله، میدان هر ناحیه را که بین دو صفحه هادی محصور باشد با میدان دو صفحه هادی بینهایت تقریب می‌زنیم. اگر چگالی سطحی توزیع بار ρ_s فرض شود، داریم:

$$D = \begin{cases} -\rho_s \hat{a}_z & 0 < z < d \\ 0 & z < 0, z > d \end{cases} \Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} = \begin{cases} -\frac{\rho_s}{\epsilon_s \epsilon_r} \hat{a}_z & t < z < d \\ -\frac{\rho_s}{\epsilon_s \epsilon_r} \hat{a}_z & 0 < z < t \\ 0 & z < 0, z > d \end{cases}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\int \rho_{S_1} dS}{\int_+^- E \cdot dL} = \frac{\rho_{S_1} A}{\int_d^t -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz + \int_t^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz} = \frac{\rho_{S_1} A}{\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}} \right)} = \frac{A \epsilon_0 \epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_2} (d-t) + \epsilon_{r_1} t}$$

جالب توجه است که خازنهای دو ناحیه با یکدیگر سری هستند و به سادگی می توان نشان داد که

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} A}{d-t} \text{ و } C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} A}{t} \text{ که در آن } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

ب) در این حالت فرض می شود که اعمال اختلاف پتانسیل V_0 منجر به تشکیل توزیع باری با چگالی ρ_{S_1} روی بخش $A/2$ مربوط به ϵ_{r_1} و توزیع باری با چگالی ρ_{S_2} روی بخش $A/2$ مربوط به ϵ_{r_2} گردد.

$$\text{در ناحیه ۱: } D_1 = -\rho_{S_1} \hat{a}_z, \quad E_1 = -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} \hat{a}_z$$

$$\text{در ناحیه ۲: } D_2 = -\rho_{S_2} \hat{a}_z, \quad E_2 = -\frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} \hat{a}_z$$

اما:

$$V_0 = \int_+^- E_1 \cdot dL = \int_d^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz = \frac{\rho_{S_1} d}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}}$$

روی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۱

$$V_0 = \int_+^- E_2 \cdot dL = \int_d^0 -\frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz = \frac{\rho_{S_2} d}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}}$$

روی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۲

تساوی اختلاف پتانسیلهای محاسبه شده از طریق دو مسیر نتیجه زیر را به دست می دهد:

$$\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_{r_1}} = \frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_{r_2}}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_{S_1} \frac{A}{2} + \rho_{S_2} \frac{A}{2}}{\rho_{S_1} d / \epsilon_0 \epsilon_{r_1}} = \epsilon_0 \epsilon_{r_1} \frac{A}{2d} \left(1 + \frac{\rho_{S_2}}{\rho_{S_1}} \right)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{2d} (\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}) = C_1 + C_2; \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} A}{d} \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} A}{d} \frac{1}{2}$$

$$\text{ج) در ناحیه ۱: } D_1 = -\rho_{S_1} \hat{a}_z, \quad E_1 = \begin{cases} -(\rho_{S_1} / \epsilon_0 \epsilon_{r_1}) \hat{a}_z & 1 < z < d \\ -(\rho_{S_1} / \epsilon_0 \epsilon_{r_2}) \hat{a}_z & 0 < z < 1 \end{cases}$$

$$\text{در ناحیه ۲: } D_2 = -\rho_{S_2} \hat{a}_z, \quad E_2 = -\frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} \hat{a}_z$$

اما:

$$V_0 = \int_+^- E_1 \cdot dL = \int_d^1 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz + \int_1^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz = \frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-1}{\epsilon_{r_1}} + \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \right)$$

روی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۱

$$V_+ = \int_{-}^{+} E_+ \cdot dL = \int_d^+ -\frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} dz = -\frac{\rho_{S_+} d}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}}$$

روی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۲

از تساوی اختلاف پتانسیلهای محاسبه شده از طریق دو مسیر، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\rho_{S_1} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}} \right) = \rho_{S_+} \frac{d}{\epsilon_{r_+}} \Rightarrow \frac{\rho_{S_+}}{\rho_{S_1}} = \frac{\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}}}{\frac{d}{\epsilon_{r_+}}}$$

$$C = \frac{Q}{V_+} = \frac{\rho_{S_1} \frac{A}{\gamma} + \rho_{S_+} \frac{A}{\gamma}}{\frac{\rho_{S_+} d}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}}} = \epsilon_+ \epsilon_{r_+} \frac{A}{\gamma d} \left(1 + \frac{\rho_{S_1}}{\rho_{S_+}} \right) = \epsilon_+ \frac{A}{\gamma} \left(\frac{\epsilon_{r_+}}{d} + \frac{\epsilon_{r_1} \epsilon_{r_+}}{t \epsilon_{r_1} + (d-t) \epsilon_{r_+}} \right)$$

جالب توجه است که، $C = C_+ + \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_+}}$ که در آن:

$$C_1 = \frac{\epsilon_+ \epsilon_{r_1} A}{d-t} \frac{1}{\gamma}, \quad C_+ = \frac{\epsilon_+ \epsilon_{r_+} A}{t} \frac{1}{\gamma}, \quad C_+ = \frac{\epsilon_+ \epsilon_{r_+} A}{d} \frac{1}{\gamma}$$

$$D_1 = -\rho_{S_1} \hat{a}_z \Rightarrow E_1 = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_1}} \hat{a}_z & t < z < d \\ -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} \hat{a}_z & 0 < z < t \end{cases} \quad \text{(د) در ناحیه ۱}$$

$$D_+ = -\rho_{S_+} \hat{a}_z \Rightarrow E_+ = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} \hat{a}_z & t < z < d \\ -\frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} \hat{a}_z & 0 < z < t \end{cases} \quad \text{در ناحیه ۲:}$$

$$V_+ = \int_{-}^{+} E_+ \cdot dL = \int_d^t -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_1}} dz + \int_t^+ -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} dz = \frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}} \right)$$

روی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۱

$$V_+ = \int_{-}^{+} E_+ \cdot dL = \int_d^t -\frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} dz + \int_t^+ -\frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+ \epsilon_{r_+}} dz = \frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_+}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}} \right)$$

روی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۲

از تساوی اختلاف پتانسیلهای محاسبه شده از طریق دو مسیر نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}} \right) = \frac{\rho_{S_+}}{\epsilon_+} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_+}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V_+} = \frac{(\rho_{S_1} + \rho_{S_+}) \frac{A}{\gamma}}{V_+} = \frac{\rho_{S_1} \left(1 + \frac{\rho_{S_+}}{\rho_{S_1}} \right) \frac{A}{\gamma}}{\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_+} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_+}} \right)}$$

$$= \frac{\epsilon_s A (d-t) \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \right) + t \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} + \frac{1}{\epsilon_{r4}} \right)}{\gamma \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r3}} + \frac{t}{\epsilon_{r4}} \right) \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r1}} + \frac{t}{\epsilon_{r2}} \right)}$$

می توان نشان داد که: $C = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right)}$ که C_1 و C_2 همانند بند (ج)

بوده و $C_3 = \frac{\epsilon_s \epsilon_{r3} A}{\gamma (d-t)}$ و $C_4 = \frac{\epsilon_s \epsilon_{r4} A}{\gamma t}$ است.

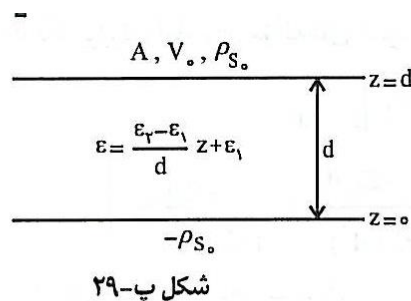
۲۲. قابلیت گذردهی عایق بین صفحات یک خازن از یک صفحه تا صفحه دیگر به طور خطی از ϵ_1 تا ϵ_2 تغییر می کند.

الف) نشان دهید که ظرفیت این خازن از رابطه زیر به دست می آید:

$$C = \frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}$$

که d فاصله دو صفحه و A مساحت هر یک از صفحات است.

ب) چگالی حجمی بار پلاریزاسیون در عایق خازن را به دست آورید.



۲۲. الف) اعمال اختلاف پتانسیل V_s به دو صفحه هادی، بارهایی با چگالی ρ_s و $-\rho_s$ روی صفحات به وجود می آورد (شکل پ-۲۹). برای میدان D و E می توان نوشت:

$$D = -\rho_s \hat{a}_z, \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{-\rho_s d}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d} \hat{a}_z$$

برای محاسبه ظرفیت C ، داریم:

$$C = \frac{Q}{V_s} = \frac{\rho_s A}{V_s}$$

$$V_s = \int_d^0 E \cdot dL = \int_d^0 -\frac{\rho_s d}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d} dz = \frac{\rho_s d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)$$

$$C = \frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}, \quad \rho_s = \frac{CV_s}{A} = \frac{V_s(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}$$

$$P = D - \epsilon E = D \left(1 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon} \right) = -\rho_s \left(\frac{\epsilon - \epsilon_s}{\epsilon} \right) \hat{a}_z \quad (ب)$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = \rho_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_s}{\epsilon} \right) = \rho_s \frac{d}{dz} \left[\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + (\epsilon_1 - \epsilon_s)d}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d} \right]$$

$$= \rho_s \frac{\epsilon_s d (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{[(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d]^2} = \frac{V_s \epsilon_s (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{\ln(\epsilon_2/\epsilon_1) [(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d]^2}, \quad 0 < z < d$$

۲۳. بار الکتریکی q در کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. نشان دهید که انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار وقتی با استفاده از روابط ۳-۸۷ و ۳-۹۴ محاسبه شود نتیجه یکسان $W_e = 3q^2 / (20\pi\epsilon_0 a)$ را می‌دهد.

۲۳. میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار در مثال ۲-۶، مطالعه شده است. کافی است چگالی توزیع بار، ρ ، را با $q / \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \right)$ در نتایج به دست آمده جایگزین کنیم. آنگاه:

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{a}_r & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > a \end{cases}$$

پتانسیل حاصل از این توزیع بار در ناحیه $r < a$ ، که در روش محاسبه انرژی نیاز است، برابر است با:

$$V(r) = \int_r^\infty E \cdot dL = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^a \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} dr + \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad r \leq a$$

(i) محاسبه انرژی با استفاده از رابطه ۳-۸۷:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV = \frac{1}{2} \int \frac{q}{4\pi a^3} \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{3q^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \int_0^a r^2 \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right) dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

(ii) محاسبه انرژی با استفاده از رابطه ۳-۹۴:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \right)^2 \int_0^a r^4 dr + \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} \right] \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

۲۴. از سه سطح کروی هادی هم‌مرکز، کره بیرونی به شعاع c و کره درونی به شعاع a زمین شده‌اند و روی کره میانی به شعاع b بار q قرار داده شده است. نشان دهید که انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم برابر است با:

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$$

۲۴. چون کره‌های به شعاع a و به شعاع c زمین شده‌اند، پتانسیل هر دوی آنها صفر است. اما کره میانی به شعاع b دارای بار غیر صفر بوده و در نتیجه پتانسیل غیر صفری، مثلاً برابر V_b ، دارد. وجود پتانسیل V_b بین کره میانی و کرات درونی و بیرونی مستلزم وجود میدان الکتریکی بین کره میانی و دو کره دیگر است. اما وجود میدان بین کره درونی و کره میانی فقط در صورت موجود بودن مقداری بار روی کره درونی میسر است. این بار از زمین تأمین می‌شود. از آنجا که خطوط میدان در فاصله کره میانی و کره درونی باید به طرف کره درونی باشند، بار کره درونی منفی خواهد بود. این بار را $-q_1$ می‌نامیم. به علاوه، وجود میدان غیر صفر در فاصله بین کره میانی و کره بیرونی مقداری بار روی کره بیرونی القا می‌کند که باز مقدارش منفی است و آن را $-q_2$ می‌نامیم. اکنون میدان الکتریکی را در نواحی مختلف به شرح زیر می‌نویسیم:

$$E = \begin{cases} E_1 = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ E_2 = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & b < r < c \\ E_3 = \frac{q - q_1 - q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > c \end{cases}$$

چون پتانسیل در ناحیه $r \geq c$ باید صفر باشد (زیرا پتانسیل کره بیرونی صفر است)، لازم است که $E_r = 0$ باشد. آنگاه:

$$q - q_1 - q_2 = 0 \quad (1)$$

برای تعیین رابطه دیگری بین q_1 و q_2 از تساوی $V_{bc} = V_{ba}$ استفاده می‌کنیم.

$$V_{ba} = \int_b^a E_1 \cdot dL = \int_b^a -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V_{bc} = \int_b^c E_2 \cdot dL = \int_b^c \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

از حل معادلات (1) و (2) خواهیم داشت:

$$q_1 = q \frac{a(c-b)}{b(c-a)}, \quad q_2 = q \frac{c(b-a)}{b(c-b)}$$

حال با داشتن پتانسیلهای هر یک از کره‌ها و بارهای آنها انرژی ذخیره شده در سیستم را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_S V dS$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_a} \rho_{Sa} V_a dS + \frac{1}{2} \int_{S_b} \rho_{Sb} V_b dS + \frac{1}{2} \int_{S_c} \rho_{Sc} V_c dS$$

اما $V_a = V_c = 0$ است.

$$V_b = V_{ba} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S_b} \rho_{Sb} V_b dS = \frac{1}{2} V_b \int_{S_b} \rho_{Sb} dS = \frac{1}{2} V_b q = \frac{1}{2} q \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

پس از جایگزینی q_1 بر حسب q ,

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$$

۲۵. از سه کره هادی هم‌مرکز، کره میانی به شعاع b زمین گردیده، روی کره درونی به شعاع a بار مثبت Q_1 و روی کره بیرونی به شعاع c بار منفی $-Q_2$ قرار داده شده است. فضای اطراف کره‌ها در همه جا خلأ است. مطلوب است محاسبه:

الف) محاسبه پتانسیل در تمام نقاط فضا،

ب) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم.

۲۵. الف) فرض می‌کنیم بار Q روی کره میانی پدید آید. آنگاه با استفاده از قانون گوس، داریم:

$$E = \begin{cases} E_1 = [Q_1 / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{a}_r & a < r < b \\ E_2 = [(Q_1 + Q) / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{a}_r & b < r < c \\ E_3 = [(Q_1 + Q - Q_2) / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{a}_r & r > c \end{cases}$$

برای تعیین Q از تساوی $V_c = V_{cb}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_c^\infty E_3 \cdot dL = \int_c^b E_2 \cdot dL \Rightarrow \int_c^\infty \frac{Q_1 + Q - Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \int_c^b \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$(Q_1 + Q - Q_2) \left(\frac{1}{c} \right) = (Q_1 + Q) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow Q = -Q_1 + \frac{b}{c} Q_2$$

$$E = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ \frac{b Q_2}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \hat{a}_r & b < r < c \\ \frac{(b-c) Q_2}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \hat{a}_r & r > c \end{cases}$$

$$V = \int E \cdot dL = \begin{cases} \int_r^b \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a \leq r \leq b \\ \int_r^b \frac{b Q_2}{4\pi\epsilon_0 c r^2} dr = \frac{b Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & b \leq r \leq c \\ \int_r^\infty \frac{(b-c) Q_2}{4\pi\epsilon_0 c r^2} dr = \frac{(b-c) Q_2}{4\pi\epsilon_0 c r} & r \geq c \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & r \leq a \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2} V_a Q_1 + \frac{1}{2} V_b Q - \frac{1}{2} V_c Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(b-a) Q_1^2}{ab} + \frac{(c-b) Q_2^2}{c^2} \right] \quad (\text{ب})$$

۲۶. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_s روی یک سطح کروی به شعاع a توزیع شده است. چه مقدار کار باید انجام گیرد تا توزیع بار متراکم شده، و روی سطح کره‌ای به شعاع b ($b < a$) قرار گیرد؟ توزیع جدید یکنواخت فرض می‌شود.

۲۶. مقدار کار مورد نیاز برابر تفاوت انرژیهای الکتریکی ذخیره شده در میدانهای E_a ناشی از توزیع بار روی کره به شعاع a و E_b ناشی از توزیع بار روی کره‌ای به شعاع b است. میدانهای E_a و E_b به سادگی با استفاده از قانون گوس به دست می‌آیند.

$$E_a = E_{ar}(r) \hat{a}_r$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = S \quad \text{,} \quad \text{سطح کره‌ای به شعاع } r \text{ و هم مرکز: } S$$

بار آزاد محصور در S ،
با کره بار به شعاع a

$$\epsilon_0(E_{ar})(4\pi r^2) = \begin{cases} 4\pi a^2 \rho_{S_0} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases} \Rightarrow E_a = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0} a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

به طور مشابهی می‌توان نشان داد:

$$E_b = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0} a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > b \\ 0 & r < b \end{cases}$$

$$E_a \text{ در میدان } = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int E_a^2 dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_{S_0} a^2}{\epsilon_0} \right)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} = W_a$$

$$E_b \text{ در میدان } = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int E_b^2 dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_{S_0} a^2}{\epsilon_0} \right)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^\infty \frac{dr}{r^4} = W_b$$

$$W_a = \frac{4\pi a^2 \rho_{S_0}^2}{\epsilon_0} \quad , \quad W_b = \frac{4\pi a^2 \rho_{S_0}^2}{\epsilon_0 b}$$

$$\Delta W = W_b - W_a = \frac{4\pi a^2 (a-b) \rho_{S_0}^2}{\epsilon_0 b}$$

۲۹. سیستمی مرکب از دو هادی کامل که فضای بین آنها را ماده‌ای با قابلیت گذردهی ϵ و رسانایی σ پر کرده باشد، مطابق شکل ۳-۱۸، را در نظر بگیرید. چنین سیستمی هم دارای مقاومت و هم دارای ظرفیت است. نشان دهید که رابطه زیر بین مقاومت R و ظرفیت C برقرار می‌باشد. ϵ و σ مقادیر ثابتی فرض می‌شوند.

$$RC = \epsilon / \sigma$$

$$C = \frac{\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}, \quad R = \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad ۲۹$$

اگر ϵ و σ مقادیر ثابتی باشند داریم:

$$RC = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

۳۰. بار الکتریکی Q روی سطح یک کره هادی به شعاع a توزیع شده است. مطلوب است محاسبه نیرویی که سعی در منبسط نمودن کره هادی دارد. آیا مثبت یا منفی بودن بار Q تأثیری در جهت این نیرو دارد؟

۳۰. انرژی ذخیره شده در میدان ناشی از توزیع باری روی سطح کره‌ای به شعاع a عبارت است از:

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}, \quad r=a$$

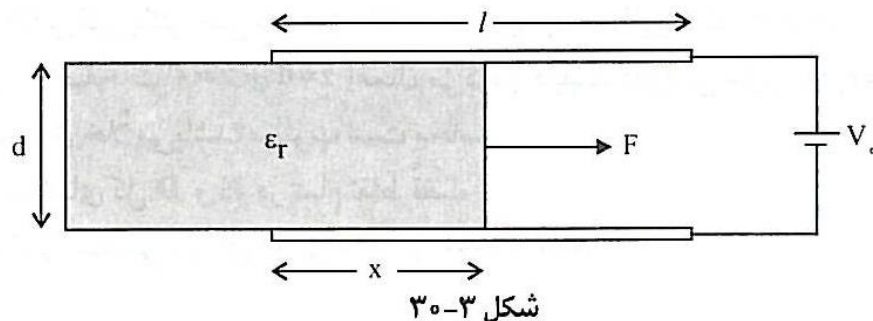
$$\mathbf{F} = -\nabla W_e \Big|_{r=a} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

چون F متناسب با Q^2 است، مثبت یا منفی بودن Q تأثیری در جهت این نیرو ندارد.

(۳۱) در یک خازن با صفحات موازی، به نحوی که در شکل ۳-۳۰ نشان داده شده است، بخشی از عایق بیرون از ناحیه بین دو صفحه قرار داده می شود. به خازن اختلاف پتانسیل ثابت V_0 اعمال می شود. نشان دهید که به جسم عایق نیرویی برابر F اعمال می گردد که عبارت است از:

$$F = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) a V_0^2}{2d}$$

در این رابطه d ضخامت، a عرض و ϵ_r قابلیت گذردهی نسبی عایق می باشد.



$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad C = \frac{a}{d} [\epsilon_0 \epsilon_r x + \epsilon_0 (l-x)] \quad ۳۱$$

$$Q = CV_0 = \frac{a V_0}{d} [\epsilon_0 \epsilon_r x + \epsilon_0 (l-x)]$$

$$F = -\nabla W_e = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) \hat{a}_x = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{a} \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{[\epsilon_0 \epsilon_r x + \epsilon_0 (l-x)]^2} \hat{a}_x$$

با جایگزین نمودن Q ، داریم:

$$F = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) a V_0^2}{2d} \hat{a}_x$$

۳۲. یک خازن متشکل از دو سطح هادی کروی هم مرکز و به شعاعهای a و b مفروض است. فضای بین دو کره هادی محدود به $a < r < c$ را عایقی با قابلیت گذردهی $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ اشغال کرده است. بقیه فضای بین دو کره محدود به $c < r < b$ خلأ فرض می شود. بارهای Q و $-Q$ روی هادیها قرار داده می شوند. نیرویی که به هادی بیرونی وارد می شود را محاسبه کنید.

۳۲. ابتدا انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه می‌کنیم. میدان D در ناحیه $a < r < b$ عبارت است از:

$$\oint_S D \cdot dS = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r, \quad a < r < b$$

$$D = 0, \quad r < a, r > b$$

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{a}_r & a < r < c \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & c < r < b \\ 0 & r < a, r > b \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V E \cdot D \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_a^c \frac{Q^2 dr}{(4\pi)^2 \epsilon r^4} + \int_c^b \frac{Q^2 dr}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r^4} \right] \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_0} \right) \right] \frac{Q^2}{16\pi^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_0 c} \right) \right] - \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 b}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{= W_e}$$

جهت تفهیم استخراج گرادیان، W_e را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$W_e = W_e - \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 r} \Big|_{r=b}$$

$$F = -\nabla W_e = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{a}_r \Big|_{r=b} = -\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 b^2} \hat{a}_r$$

۱-۴ میدان الکترواستاتیک $V = 1000\sqrt{r}$ داده شده است. انرژی ذخیره شده در کره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدا مختصات را پیدا کنید.

۱-۴ میدان الکتریکی عبارت است از

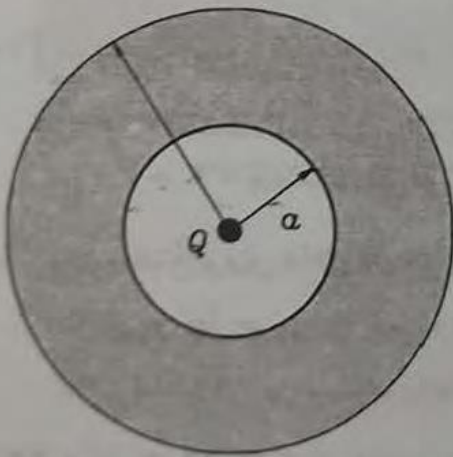
$$E = -\nabla V = -500 r^{-\frac{1}{2}} \hat{r}$$

چگالی انرژی و انرژی ذخیره شده در کره را به صورت زیر می‌یابیم

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |E|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \times 25 \times 10^4 r^{-1} = \frac{125000}{r} \epsilon_0$$

$$W = \int w r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = 125000 \epsilon_0 \int_0^1 r \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 6.95 \times 10^{-6} \, J$$

۱۱-۴ یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b از عایقی با گذر دهی ϵ ساخته شده است. باز نقطه‌ای Q در مرکز این پوسته قرار دارد. انرژی ذخیره شده در پوسته را به دست آورید.



شکل ۱۱-۴

۱۱-۴ با استفاده از قانون گوس و با توجه به تقارن کروی مسئله به دست می‌آوریم

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

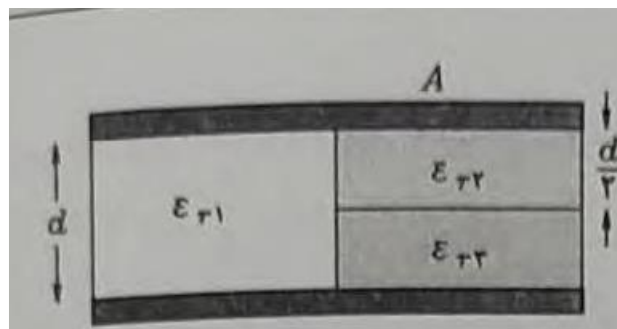
$$w = \frac{1}{2\epsilon} D^2 = \frac{1}{2\epsilon} \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon r^4}$$

$$W = \iiint w \, dv = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon} \iiint \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_a^b \frac{1}{r^2} dr$$

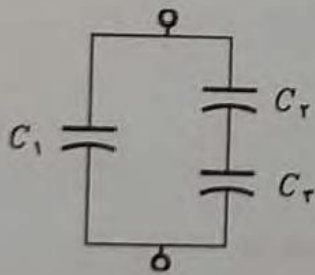
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

۱۶-۴ ظرفیت خازن شکل ۱۶-۴ را بیابید.



شکل ۱۶-۴

۱۶-۴ خازن داده شده را می توان ترکیبی از سه خازن به صورت شکل ح ۴-۱۶ در نظر گرفت که



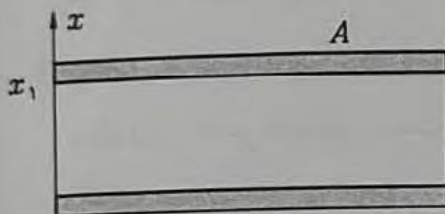
شکل ح ۴-۱۶

$$C_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \frac{A}{2d}$$

$$C_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \frac{A/2}{d/2} = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$C_3 = \epsilon_{r3} \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$C = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \left(\frac{\epsilon_{r1}}{2} + \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_{r3}}{\epsilon_{r2} + \epsilon_{r3}} \right)$$



شکل ۴-۱۸

۱۸-۴ دو سطح هادی به موازات هم قرار دارند و

مساحت صفحات A است. گذردهی عایق

ناهمگن بین هادیها به صورت $\epsilon = \epsilon_0 (a + bx^2)$

تغییر می کند. ظرفیت خازن حاصل را بیابید.

۱۸-۴ اگر بار هادی بالایی را Q و بار هادی پایینی را $-Q$ فرض کنیم، چگالی بار روی سطح بالایی

$\sigma = Q/A$ و میدان D در عایق $D = -\sigma \hat{x}$ خواهد بود. پس

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{-Q}{A \epsilon_0 (a + bx^2)} \hat{x}$$

اختلاف پتانسیل بین صفحات عبارت است از

$$V = - \int E \cdot dl = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \int_0^{x_1} \frac{dx}{a + bx^2}$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0 A} \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{Q}{\epsilon_0 A \sqrt{ab}} \tan^{-1} \left(x_1 \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

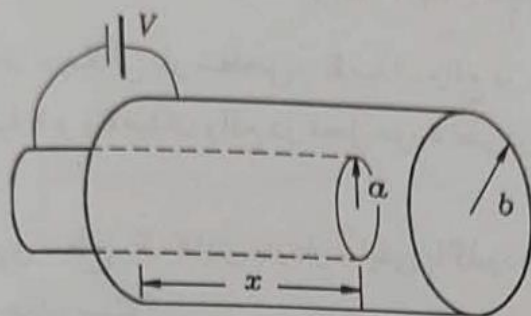
و سرانجام

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A \sqrt{ab}}{\tan^{-1} x_1 \sqrt{b/a}}$$

۲۵-۴ یک بار نقطه ای مثبت در نزدیکی سطح مایع دی الکتریکی قرار دارد. سطح مایع بالا می آید یا پایین می رود؟ اگر بار نقطه ای منفی باشد چطور؟

۲۵-۴ چه بار مثبت باشد چه منفی سطح مایع بالا می آید.

۲۹-۴ یک خازن متغیر به صورت شکل ۴-۲۹ از دو استوانه هم محور ساخته شده است. جهت و مقدار نیروی وارد بر استوانه داخلی را، هنگام اتصال اختلاف پتانسیل V به این خازن، پیدا کنید.



شکل ۴-۲۹

۲۹-۴ ظرفیت خازن عبارت است از

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 x}{\ln(b/a)}$$

به ازای ولتاژ ثابت نیرو عبارت است از

$$F_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

۳۳-۴ یک خازن مسطح را پر می کنیم تا انرژی آن به $Q^2 / 2C$ برسد. سپس با گذاشتن میکا ($\epsilon_r = 6$) در داخل خازن ظرفیت آن را شش برابر می کنیم. بار تغییری نمی کند بنابراین انرژی ذخیره شده به $Q^2 / 12C$ می رسد. بقیه انرژی چه شده است؟

۳۳-۴ انرژی تلف شده $Q^2 / 12C - Q^2 / 2C = 5Q^2 / 12C$ است. این انرژی صرف قطبیدن میکا شده است. چگالی انرژی قطبش $\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ است. در خازن

$$E = \frac{Q}{A\epsilon} = \frac{Q}{6A\epsilon_0}$$

$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$ و در این مورد $\epsilon_r = 6$ پس $\mathbf{p} = 5\epsilon_0 \mathbf{E}$ و $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = 5Q^2 / 36A^2\epsilon_0$ کل انرژی

قطبش حاصلضرب حجم خازن ($A d$) در چگالی انرژی است.

$$W_p = \frac{1}{2} A d \frac{5Q^2}{36A^2\epsilon_0} = \frac{5Q^2 d}{72A\epsilon_0}$$

و چون $C = A\epsilon / d = 6\epsilon_0 A / d$

$$W_p = \frac{5Q^2}{72A\epsilon_0 / d} = \frac{5Q^2}{12C}$$

که همان انرژی تلف شده است.

۱۶. کابل هم محوری منطبق بر محور x مفروض است شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b می باشد فضای بین a و b از عایق با ضریب دی الکتریک $\epsilon = \epsilon_0 e^{-|x|}$ پر شده است ظرفیت خازنی چنین کابلی با طول بی نهایت را محاسبه کنید؟

$$\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (۱) \quad \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (۲) \quad 2\pi\epsilon_0 \ln \frac{b}{a} \quad (۳) \quad 2\pi\epsilon_0 \ln \frac{b}{a} \quad (۴)$$

۱۶. گزینه (۲) ظرفیت طول dx از کابل برابر است با:

$$dC = \frac{2\pi\epsilon dx}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 e^{-|x|} dx}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dc = 2 \int_0^{\infty} dc = 2 \int_0^{\infty} \frac{2\pi\epsilon_0 e^{-x}}{\ln \frac{b}{a}} dx = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

در حقیقت جزء خازنها با هم موازی هستند (تغییرات ϵ در جهت موازی با سطوح هم پتانسیل است)

آموزشیار: کرامتی

موفق باشید، افصحی