

مثال ۱۹: حاصل عبارت $\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ کدام است؟

$$1+i\sqrt{r} = re^{\frac{i\pi}{r}}, -1+i\sqrt{r} = re^{\frac{i2\pi}{r}} \Rightarrow \frac{(1+i\sqrt{r})^\lambda}{r^\lambda(-1+i\sqrt{r})} = \frac{(re^{\frac{i\pi}{r}})^\lambda}{r^\lambda \times re^{\frac{i2\pi}{r}}} = \frac{e^{\frac{\lambda\pi i}{r}}}{e^{\frac{2\pi i}{r}}} = e^{\frac{(\lambda-2)\pi i}{r}} = 1$$

اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادله‌ی $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند، حاصل $A = z_1^6 + z_2^6 - 3z_1^2 z_2^2$ کدام است؟

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z_1^6 + z_2^6 = 2^6 e^{i6 \times \frac{\pi}{3}} + 2^6 e^{-i6 \times \frac{\pi}{3}} = 2^6 \cos(2\pi) + i2^6 \sin 2\pi + 2^6 \cos(-2\pi) - i2^6 \sin 2\pi = 2^6 \times 1 + 2^6 \times 1 = 2 \times 2^6 = 2^7 = 128$$

$$z_1^6 + z_2^6 - 3z_1^3 z_2^3 = 128 - 3(4)^3 = 128 - 192 = -64$$

ما برایین داریم:

۱- فرض کنید z نقطه‌ای بر دایره واحد $|z|=1$ باشد. $\text{Arg}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ کدام است؟

π

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1-x-iy}{1+x+iy} = \frac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x)^2 + y^2} = \frac{1+x-iy-x-x^2+ixy-iy-ixy-y^2}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{1-x^2-2iy-y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

۲۳- گزینه «۴»

چون z روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع است لذا داریم:

$$\frac{1-z}{1+z} = -\frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}i \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \rightarrow \frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2} < 0 \Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2}i\right) = -\frac{\pi}{2} \\ y < 0 \rightarrow \frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2} > 0 \Rightarrow \text{Arg}\left(\frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2}i\right) = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تذکر: توجه شود مخرج کسر $\frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2}$ در واقع همان $|1+z|^2$ می باشد که همواره مثبت است.

۵- اگر z_1 و z_2 جواب‌های معادله $z^2 + z + 1 = i$ باشند، $|z_1 - z_2|$ کدام است؟

$$z^2 + z + 1 - i = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1-i) = 1 - 4 + 4i = 4i - 3 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4i - 3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4i - 3}}{2}$$

$$|z_1 - z_2| = \left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4i - 3}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4i - 3}}{2} \right) \right| = \left| \frac{2\sqrt{4i - 3}}{2} \right| = |\sqrt{4i - 3}| = \sqrt{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}$$

۶: مشتق تابع $f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 (x+iy)}{x^4 + y^4} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$ در نقطه صفر کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از تعریف مسبق داریم:

$$f'(\circ) = \lim_{z \rightarrow \circ} \frac{f(z) - f(\circ)}{z - \circ} \xrightarrow{f(\circ)=\infty} f'(\circ) = \lim_{z \rightarrow \circ} \frac{f(z)}{z} \Rightarrow f'(\circ) = \lim_{y \rightarrow \circ} \frac{x^2 y^6 (x + iy)}{x^4 + y^{12}} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{x^2 y^6}{x^4 + y^{12}}$$

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1 + m^2}$$

اگر روی مسیر $y^6 = mx^2$ به مبدأ نزدیک شویم آنگاه داریم:

چون حد به m وابسته است، پس حد موجود نیست.

مثال ۱۲: اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابعی تحلیلی باشد که در تساوی $\operatorname{Re}[f'(z)] = x^2 - 3xy^2 - 2x$ صدق می‌کند، آن‌گاه ضریب x^2y^2 د ضابطه‌ی $u(x,y)$ کدام است؟

پاسخ: در این صورت می‌توانیم بسوی تابع حقیقی $u(x, y)$ برابر با $u(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}xy^2 - 2x$ است.

با توجه به ضابطه قسمت حقیقی $f'(z)$ که در صورت سؤال داده شده است، داریم:

$$\operatorname{Re}[f'(z)] = x^3 - 3xy^2 - 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 - 3xy^2 - 2x$$

پس می‌توان تساوی مقابل را نتیجه گرفت:

$$u(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 - x^2 + h(y) \Rightarrow \text{ضریب } x^2y^2 = -\frac{3}{2}$$

با انتگرال گیری نسبت به x از دو طرف معادله فوق خواهیم داشت:

مثال ۱۶: می‌دانیم تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ در نقطه $z_0 = 1 - i$ تحلیلی است و $f'(z_0) = +1 + i$. در این صورت مقدار $u_r v_\theta + u_\theta v_r$ در نقطه مذکور کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به معادلات کوشی ریمان در مختصات قطبی داریم:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

بر اساس تعریف مشتق توابع مختلط در مختصات قطبی داریم: $f'(z_0) = (u_r - \frac{i}{r} u_\theta) e^{-i\theta} = 1 + i$

با جایگذاری $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ داریم:

$$f'(z_0) = (u_r - \frac{i}{r} u_\theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = u_r \cos \theta - \frac{u_\theta}{r} \sin \theta - i u_r \sin \theta - \frac{i}{r} u_\theta \cos \theta = 1 + i$$

$$\begin{cases} u_r \cos \theta - \frac{u_\theta}{r} \sin \theta = 1 \\ -u_r \sin \theta - \frac{u_\theta}{r} \cos \theta = 1 \end{cases}$$

با متحد قرار دادن عبارت‌های حقیقی و موهومی به دو رابطه مقابل می‌رسیم:

$$z_0 = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{2}, \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

از طرفی در نقطه مذکور داریم:

$$\begin{cases} u_r(\frac{\sqrt{2}}{r}) + \frac{u_\theta}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{r}) = 1 \\ u_r(\frac{\sqrt{2}}{r}) - \frac{u_\theta}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{r}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_r + \frac{\sqrt{2}}{r} u_\theta = \sqrt{2} \\ u_r - \frac{\sqrt{2}}{r} u_\theta = \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین با جایگذاری، به معادلات ساده‌تر مقابل می‌رسیم:

$$u_r + \frac{\sqrt{2}}{r} u_\theta + u_r - \frac{\sqrt{2}}{r} u_\theta = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2u_r = 2\sqrt{2} \Rightarrow u_r = \sqrt{2}, \quad u_\theta = 0$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول بالا u_r و u_θ به دست می‌آیند:

$$u_r v_\theta + u_\theta v_r = u_r(r u_r) + 0 = r u_r^2 = 2\sqrt{2}$$

در نهایت عبارت $u_r v_\theta + u_\theta v_r$ را به صورت مقابل به دست می‌آوریم:

۲۱: اگر تابع $w = x^2 + \alpha y^2 - 2xy + i(\beta x^2 - y^2 + 2xy)$ ، تحلیلی باشد، حاصل $\beta - \alpha$ برابر کدام گزینه است؟

جواب: گزینه «۲» چون f تحلیلی است باید در شرایط قضیه کوشی ریمان صدق کند، با توجه به ضابطه f داریم:

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 + \alpha y^2 - 2xy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2\alpha y - 2x \\ v &= \beta x^2 - y^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2\beta x + 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2\alpha y - 2x = -(2\beta x + 2y) \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1 \\ 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = 1 - (-1) = 2$$

سوال ۸: اگر تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ تابعی تحلیلی باشد و $v = r^2 \cos 2\theta + r \sin \theta$ ، آنگاه $u(r, \theta)$ کدام است؟

روش اول: ابتدا $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ را حساب می کنیم:

چون تابع تحلیلی است باید $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ برقرار باشد.

حال از طرفین تساوی فوق نسبت به r انتگرال می گیریم:

مجدداً از طرفین این رابطه نسبت به θ مشتق می گیریم و آن را مساوی $-r(\frac{\partial v}{\partial r})$ قرار می دهیم:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -2r^2 \sin 2\theta + r \cos \theta$$

$$\frac{1}{r}(-2r^2 \sin 2\theta + r \cos \theta) = \frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -2r \sin 2\theta + \cos \theta$$

$$u = \int (-2r \sin 2\theta + \cos \theta) dr + f(\theta) \Rightarrow u = -r^2 \sin 2\theta + r \cos \theta + f(\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r^2 \cos 2\theta - r \sin \theta + f'(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2r \cos 2\theta + \sin \theta \Rightarrow -r \frac{\partial v}{\partial r} = -2r^2 \cos 2\theta - r \sin \theta$$

$$-r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \Rightarrow -2r^2 \cos 2\theta - r \sin \theta = -2r^2 \cos 2\theta - r \sin \theta + f'(\theta)$$

$$\Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = c \Rightarrow u(r, \theta) = -r^2 \sin 2\theta + r \cos \theta + c$$

۹- اگر $u = u(x, y)$ در یک ناحیه D از صفحه xOy همساز و $z = x + iy$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$ برابر است با:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \Rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4i} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{1}{4i} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{4i^2 \partial y^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

چون u تابعی همساز است لذا $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ می باشد.

نکته: البته از متن کتاب می دانیم نمایش دیگر معادله‌ی لاپلاس بر حسب z و $\bar{z}$ به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ است.

۳۳- اگر $v(x, y)$ مزدوج همساز $u(x, y) = 2x - x^2 + 3x^2y$ باشد و $v(0, 0) = 1$ ، آنگاه $v(1, 2)$ کدام است؟

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{-\partial u}{\partial y} = + \frac{\partial v}{\partial x}$$

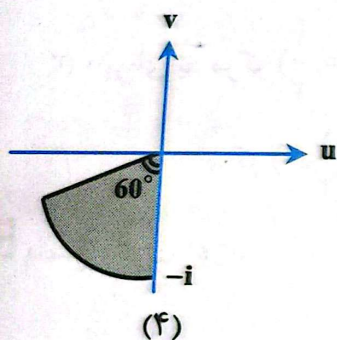
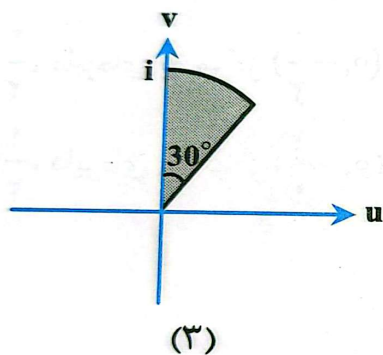
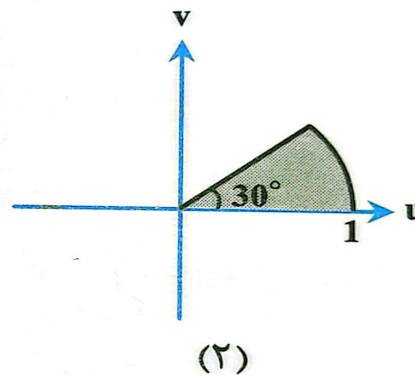
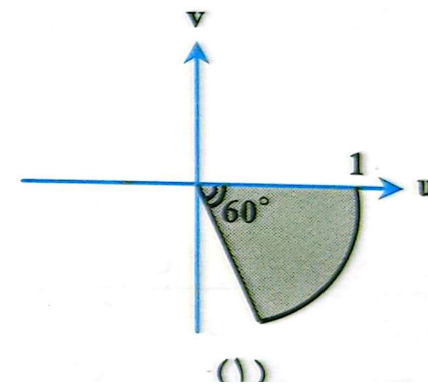
$$\frac{\partial u}{\partial x} = r - rx^r + e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\int} v = \int (r - rx^r + e_{xy}) dy \Rightarrow v = ry - rx^r y + rxy^r + h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e_{xy} + ry^r + h'(x) = \frac{-\partial u}{\partial y} = -rx^r$$

$$\Rightarrow h'(x) = +e_{xy} - rx^r - ry^r \Rightarrow h(x) = rx^r y - x^r - rxy^r + c \xrightarrow[h(0,0)=1]{v(0,0)=1} c = 1$$

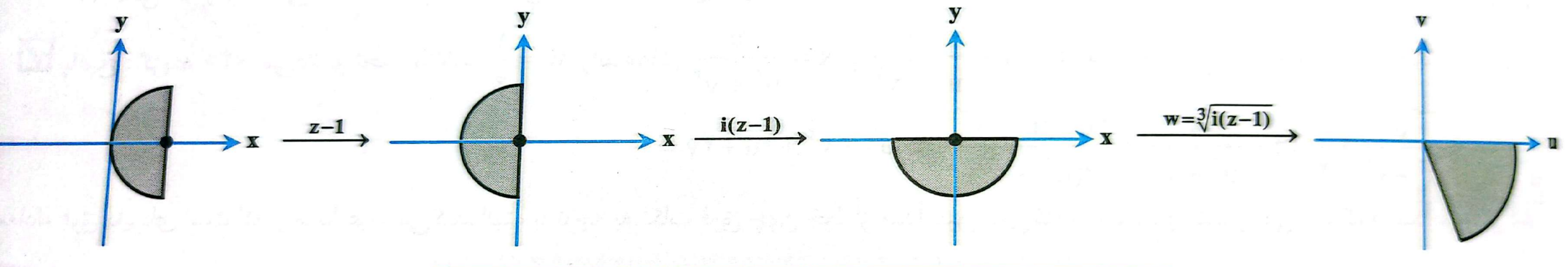
$$\Rightarrow v = ry - x^r + 1 \xrightarrow{(1,r)} v(1,r) = r - 1 + 1 = r$$

مثال ۱۴: ناحیه $D = \{z : |z - 1| \leq 1, \operatorname{Re} z \leq 1\}$ توسط نگاشت $w = \sqrt[3]{i(z - 1)}$ به کدام ناحیه تصویر می‌شود؟

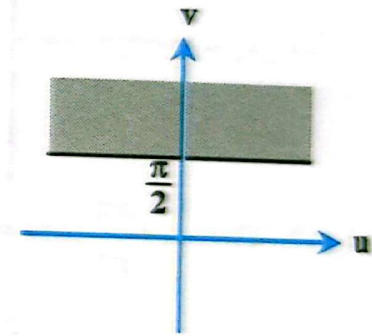
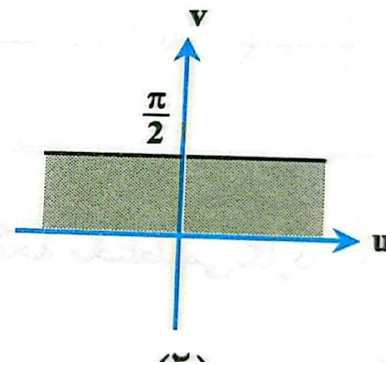
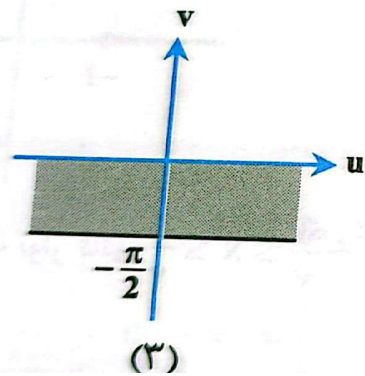
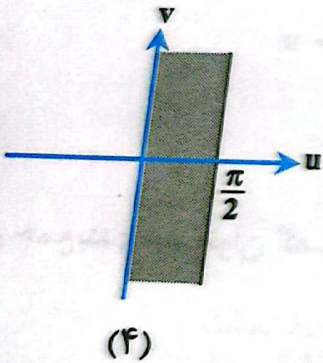


$$0 \leq |w| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \text{Arg} w \leq 0$$

سه تقسیم می کند. بنابراین داریم:



مثال ۲۴: تصویر مجموعه نقاط $y \geq 0$ و $x > 1$ توسط شاخه اصلی تابع $\text{Ln}(z-1)$ کدام ناحیه از صفحه w خواهد بود؟



(۱)

✓ پاسخ: گزینه «۲»

(۲)

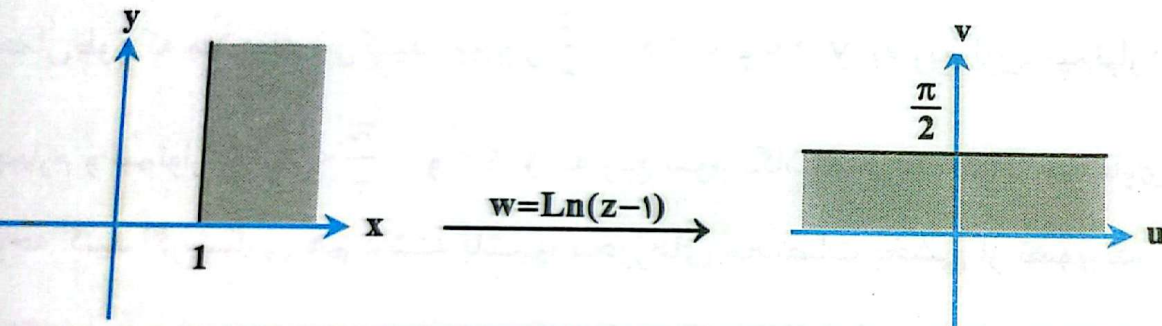
(۳)

(۴)

$$w = \text{Ln}(z-1) = \text{Ln}[(x-1) + iy] = \text{Lnr} + i\theta \Rightarrow u + iv = \text{Lnr} + i\theta \Rightarrow u = \text{Lnr}, v = \theta$$

$$r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x-1}$$

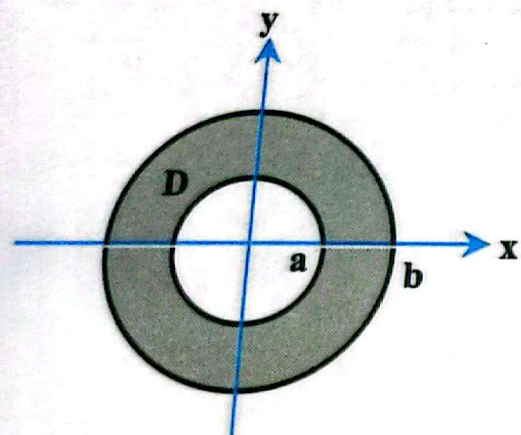
با توجه به تغییرات $x > 1$ و $y \geq 0$ ، تغییرات r بین صفر تا ∞ خواهد بود ($0 < r < \infty$) از طرفی چون $0 \leq y < \infty$ لذا $\text{Arctg} \frac{y}{x-1}$ بین صفر تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند، یعنی $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.



$$u = \text{Lnr} \xrightarrow{0 < r < \infty} -\infty < \text{Lnr} < +\infty \Rightarrow -\infty < u < +\infty$$

$$v = \theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

❏ مثال ۸: نگاشت $w = \operatorname{Ln} z$ ناحیه $D : 0 < a \leq |z| \leq b$ را به ناحیه D' در صفحه w تصویر می‌کند. مساحت D' کدام است؟ (شاخه اصلی Ln مدنظر است)



✓ پاسخ: گزینه «۴» در دستگاه قطبی داریم:
 بنابراین $u = \operatorname{Re}(w) = \ln r$ و $v = \operatorname{Im}(w) = \theta$ است. اگر ژاکوبین دستگاه قطبی را حساب کنیم، داریم:

$$J = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

ناحیه D ، بین دو دایره‌ی $r = a$ و $r = b$ قرار دارد. بنابراین $-\pi < \theta \leq \pi$ و $a \leq r \leq b$ است.

$$D' \text{ مساحت} = \iint_{D'} du dv = \iint_D \frac{1}{r} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} [\ln(r)]_a^b d\theta = 2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(۱)

(۲)

(۳)

۲۷- مبدا مثلث محدود به سه خط $y = x$ و $y = -x$ و $x = 1$ با تبدیل $w = z^2$ کدام ناحیه است؟

$$w = e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow r = e^x, \theta = y$$

$$\begin{cases} -\infty < x \leq 0 \Rightarrow e^{-\infty} < e^x \leq e^0 \Rightarrow 0 < e^x \leq 1 \Rightarrow 0 < r \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

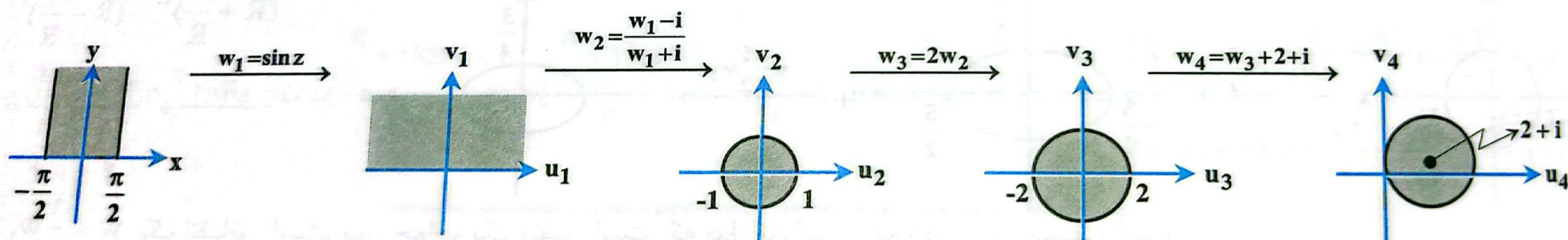
پ تست می باشد.

$$D_v = \{w : |w - 0/5| < 0/5, v > 0\} \quad (4)$$

$$D_v = \{w : |w - 0/5| < 0/5, v > 0\}$$

۵۷- کدام یک از نگاشت‌های زیر، ناحیه $\{ |x| < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \infty \}$ را بر داخل دایره به شعاع ۲ و مرکز $2+i$ تصویر می‌کند؟

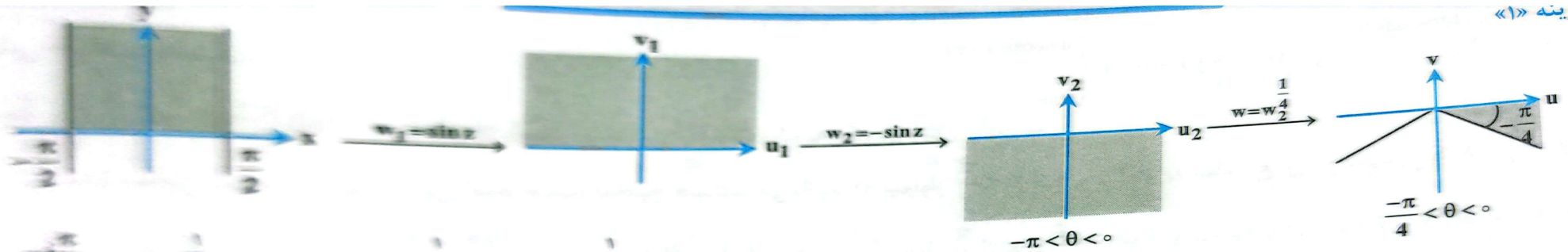
۵۷- گزینه «۲» رفتار نگاشت $w_1 = \sin z$ با نوار قائم $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0$ یک نکته‌ی معروف است. می‌دانیم که $\sin z$ این نوار را به نیم‌صفحه‌ی $\text{Im } w_1 > 0$ می‌نگارد. حال نگاشت موبیوس $w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ نیم صفحه‌ی $\text{Im } w_1 > 0$ را به درون دایره‌ی واحد یعنی $|w_2| < 1$ تصویر می‌کند. نگاشت $w_3 = 2w_2$ شعاع این دایره را دو برابر می‌کند. آنگاه $w_4 = w_3 + 2 + i$ مرکز دایره را به نقطه‌ی $2 + i$ انتقال می‌دهد.



$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad (4)$$

$$\ln(u' + v') + \tan^{-1}\left(\frac{v'}{u'}\right)$$

۱۶- تبدیل $w = e^{-i\frac{\pi}{4}} (\sin z)^{\frac{1}{4}}$ نیم نوار نامتناهی $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0$ را روی کدام ناحیه زیر تصویر می کند



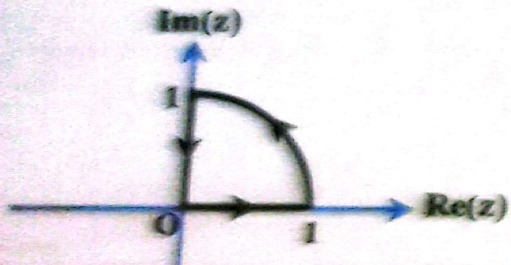
$$w = e^{-i\frac{\pi}{4}} (\sin z)^{\frac{1}{4}} = (e^{-i\pi} \sin z)^{\frac{1}{4}} = (-\sin z)^{\frac{1}{4}}$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

توضیح: تأثیر نگاشت $w_1 = \sin z$ روی نوار $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، $y > 0$ شناخته شده است. می‌دانیم که این نگاشت نیمه‌ی $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ را به ربع اول و نیمه‌ی $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ را به ربع دوم تصویر می‌کند. بنابراین نیمه‌ی بالایی صفحه‌ی w_1 بدست می‌آید. سپس نگاشت $w_2 = -w_1$ نیم‌صفحه‌ی بالایی را به نیم‌صفحه‌ی پایینی می‌آورد. در این ناحیه داریم $-\pi < \theta < 0$ و $0 \leq r < \infty$. نگاشت $w = w_2^{\frac{1}{4}}$ ؛ r را به $\sqrt[4]{r}$ و θ را به $\frac{\theta}{4}$ تبدیل می‌کند. بنابراین در صفحه‌ی w خواهیم داشت:

$$0 < r < \infty \text{ و } -\frac{\pi}{4} < \theta < 0$$

مثال ۸: اگر C ربع دایره نشان داده شده در شکل زیر باشد، آنگاه حاصل $I = \oint_C (|z| + \bar{z}) dz$ کدام است؟



- $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}(\pi - 1)i$ (۱)
- $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}(\pi + 1)i$ (۲)
- $-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}(\pi + 1)i$ (۳)
- $-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}(\pi - 1)i$ (۴)

☑ پاسخ: گزینه «۳» منحنی C از سه بخش تشکیل شده است. بخش اول بازه‌ی $[0, 1]$ روی محور x ها است که آن را C_1 می‌نامیم. روی C_1 داریم: $z = x + 0i$ و با فرض $x = t$ ، آن گاه $z(t) = t$ و چون $0 \leq x \leq 1$ ، پس $0 \leq t \leq 1$ و لذا داریم:

$$\int_{C_1} (|z| + \bar{z}) dz = \int_0^1 (|t| + t) dt = \int_0^1 2t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1$$

بخش دوم منحنی C_2 است که ربع دایره‌ای به شعاع یک و مرکز صفر است. روی آن داریم $z(t) = e^{it}$ و $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ، و لذا داریم:

$$\int_{C_2} (|z| + \bar{z}) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|e^{it}| + e^{-it}) ie^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + e^{-it}) ie^{it} dt = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{it} + 1) dt = i \left(\frac{1}{i} e^{it} + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} + i\frac{\pi}{2} - 1 = i + i\frac{\pi}{2} - 1$$

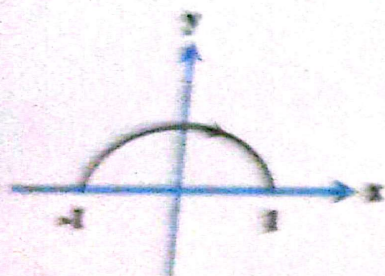
بخش سوم مسیر، پاره خط C_3 است که دارای معادله‌ی پارامتری $z(t) = ti$ است که در ابتدای آن $t = 1$ و در انتهای آن $t = 0$ است، لذا داریم:

$$\int_{C_3} (|z| + \bar{z}) dz = \int_1^0 (|it| - it) i dt = \int_1^0 (t - it) i dt = \int_1^0 (it + t) dt = (i + 1) \frac{t^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{1}{2}(1 + i)$$

$$\int_C (|z| + \bar{z}) dz = 1 + i(1 + \frac{\pi}{2}) - 1 - \frac{1}{2}(1 + i) = \frac{i}{2}(1 + \pi) - \frac{1}{2} = 0/5(1 + \pi)i - 0/5$$

بنابراین از مجموع انتگرال روی این مسیرها داریم:

۹- چنانچه در عبارت $I = \int_C \bar{z} dz$ ، C نیمه بالایی دایره $|z|=1$ از $z=-1$ تا $z=1$ باشد، مقدار I کدام گزینه است؟



۹- گزینه «۴» از تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ استفاده می کنیم.

$$|z|=1, z=e^{i\theta}, \bar{z}=e^{-i\theta}, dz=ie^{i\theta}d\theta$$

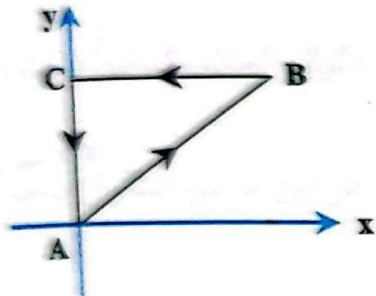
$$\int_{|z|=1} \bar{z}dz = \int e^{-i\theta} \cdot ie^{i\theta} \cdot d\theta = i \int_{+\pi}^0 d\theta = -i\pi$$

۱۲- تابع مختلط $f(z) = y - x - i3x^2$ از متغیر مختلط $z = x + iy$ مفروض است. اگر $A = 0 + i0$ و $B = 1 + i$ و $C = 0 + i$ آن گاه $\oint_{ABCA} f(z) dz$ برابر

(دکتوری بوق - دانشگاه آزاد سال ۸۷)

است با:

۱۲- گزینه «۳» کافیست مسیر انتگرال گیری را مشخص کنیم و جداگانه روی مسیر انتگرال گیری کنیم:



$$\oint_{ABCA} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CA} f(z)dz \quad (۱)$$

$$I_1 = \int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} (y - x - 3x^2i)d(x + iy) \xrightarrow[\text{در مسیر } y=x]{\text{در مسیر } y=x} I_1 = \int_0^1 -3x^2i \times d(x + ix)$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 -3x^2i(1+i)dx = -x^3(1+i)i \Big|_0^1 = -i(1+i) \quad (۲)$$

$$I_2 = \int_{BC} f(z)dz = \int_{BC} (y - x - 3x^2i)d(x + iy) \xrightarrow[\text{در مسیر } y=1]{\text{در مسیر } y=1} I_2 = \int_1^0 (1 - x - 3x^2i)d(x + i)$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^0 (1 - x - 3x^2i)dx = x - \frac{x^2}{2} - ix^3 \Big|_1^0 = -1 + \frac{1}{2} + i = i - \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$I_3 = \int_{CA} f(z)dz = \int_{CA} (y - x - 3x^2i)d(x + iy) \xrightarrow[\text{در مسیر } x=0]{\text{در مسیر } x=0} \int_1^0 yd(iy) \Rightarrow I_3 = \int_1^0 i y dy = \frac{i y^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{i}{2} \quad (۴)$$

$$\xrightarrow{(۴),(۳),(۲),(۱)} \int_{ABCA} f(z)dz = I_1 + I_2 + I_3 = -i(1+i) + i - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = -i + 1 + i - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \Rightarrow \int_{ABCA} f(z)dz = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2}(1-i)$$

مثال ۱۰: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 - 1}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{\pi i}{2}$

(۳) $-\frac{\pi i}{2}$

(۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = -1, z_4 = -i$$

نوجه شود نقاط $i, 1, -1, -i$ در داخل دایره $|z|=2$ قرار دارند و هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{(z^2 - 1)(z + i)}{z - i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \times \left(\frac{-1}{4i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \oint_{|z|=2} \frac{(z^2 + 1)(z + 1)}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \times \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

$$I_3 = \oint_{|z|=2} \frac{(z^2 + 1)(z - 1)}{z + 1} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

$$I_4 = \oint_{|z|=2} \frac{(z^2 - 1)(z - i)}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \times \left(\frac{1}{4i}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

مثال ۱۴: حاصل انتگرال $I = \int_C \frac{e^z}{(z+1)^3} dz$ که در آن C محور موهومی می باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}i$

(۲) $\frac{\pi}{3}i$

(۳) $\frac{\pi}{3e}$

(۴) $\frac{\pi}{3}ei$

✓ پاسخ: گزینه «۱» ابتدا معادله‌ی پارامتری منحنی C را می نویسیم:

$C: z = 0 + it, -\infty < t < \infty \Rightarrow dz = i dt$

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z+1)^3} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{(1+it)^3} i dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{it} dt}{(i-t)^3} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it} dt}{(i-t)^3} = i(2\pi i) \left(\frac{1}{3!} \right) \times \left(\frac{d^3}{dt^3} e^{it} \right) \Big|_{t=i} = -\frac{2\pi}{6} (-i) e^{-1} = \frac{\pi}{3e} i$$

(۴)

(مهندسی ابزار دقیق)

۲۹- مقدار انتگرال $I = \oint_C \frac{z^2 \sinh z}{(z-i)^4} dz$ وقتی که C دایره $|z|=3$ باشد، کدام است؟

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \Rightarrow \oint \frac{z^3 \sinh z}{(z-i)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} (z^3 \sinh z)^{(3)} \Big|_{z_0=i}$$

۲۹- گزینه «۳» با توجه به قضیه کوشی - گورسا داریم:

در این تست $f(z) = z^3 \sinh z$, $z_0 = i$ می باشد و با توجه به اینکه $n = 3$, لذا باید مشتق سوم f را حساب کنیم:

$$f(z) = z^3 \sinh z \Rightarrow f'(z) = 3z^2 \sinh z + z^3 \cosh z$$

$$f'(z) = 3z^2 \sinh z + 3z^2 \cosh z + 3z^2 \cosh z + z^3 \sinh z = (z^3 + 3) \sinh z + 6z^2 \cosh z$$

$$f''(z) = 3z^2 \sinh z + (z^3 + 3) \cosh z + 6 \cosh z + 6z^2 \sinh z = 9z^2 \sinh z + (z^3 + 6) \cosh z$$

$$\Rightarrow f''(i) = 9i^2 \sinh i + (i^3 + 6) \cosh i = 9i^2 \sinh i + 5 \cosh i$$

بنابر خواص توابع هذلولی که $\sinh z = -i \sin iz$, $\cosh z = \cos iz$ و فرمول کوشی - گورسا داریم:

$$I = \frac{\pi i}{3} f''(i) = \frac{\pi i}{3} [9i^2 \sinh i + 5 \cosh i] = \frac{\pi i}{3} [9i(-i) \sin(-1) + 5 \cos(-1)] = \frac{\pi i}{3} [9 \cos(1) - 5 \sin(1)]$$

(۱۱۸۷)

۳۴- فرض کنیم $I = \oint_C \frac{\cos z dz}{(z - \frac{\pi}{4})^2}$ و $C: |z - \frac{\pi}{4}| = 1$ باشد، که در جهت مثبت جهت گذاری شده است. در آن صورت مقدار I کدام است؟

(مهندسی، ابزار دقیق و اتوماسیون - مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی - سه تکه)

۳۴- گزینه «۴» بر طبق فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right)$$

در این سؤال $z_0 = \frac{\pi}{4}$ و $n = 2$ می باشد، لذا داریم:

$$\oint_C \frac{\cos z dz}{(z - \frac{\pi}{4})^3} = 2\pi i \frac{(\cos z)''}{2!} \Big|_{z=z_0} = 2\pi i \left[\frac{-\cos z_0}{2} \right]_{z_0 = \frac{\pi}{4}} = \pi i \left(-\cos \frac{\pi}{4} \right) = \pi i \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$$

مانده $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ در قطب $z = -2i$ خواهد شد:

$$\text{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \left(\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z-i)} \right) = \frac{(-i)^2 - 2(-i)}{(-i+1)^2 (-i-i)} = \frac{-4 + 4i}{-4i(-4 + 1 - 4i)} = \frac{1-i}{4-3i}$$

۱۴- مانده‌ی تابع $f(z) = e^z \sinh \frac{1}{z}$ حول $z = 0$ کدام است؟

۱۴- گزینه «۳» با توجه به اینکه $z = 0$ تکین اساسی تابع می باشد، لذا نوشتن بسط لوران بهترین روش حل تست است:

$$f(z) = e^z \sinh \frac{1}{z} = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots) (\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} + \frac{1}{z^7 7!} + \dots)$$

مانده در $z = 0$ همان ضریب $\frac{1}{z}$ است و با کمی دقت به راحتی معلوم است که $\frac{1}{z}$ از ضرب ۱ از پرانتز اول در $\frac{1}{z}$ از پرانتز دوم، $\frac{z^2}{2!}$ از پرانتز اول در $\frac{1}{z^3 3!}$ از

پرانتز دوم، $\frac{z^4}{4!}$ از پرانتز اول در $\frac{1}{z^5 5!}$ از پرانتز دوم و حاصل می شود، یعنی مانده در $\frac{1}{z}$ به صورت زیر است:

$$z = 0 \text{ مانده در } = 1 + \frac{1}{2! 3!} + \frac{1}{4! 5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$

۳۲- مانده تابع $(z-1)^5 \cos \frac{1}{z-1}$ در $z=1$ برابر است با:

$$f(z) = \cos(\pi z) - \sin(\pi z)$$

۲۲- گزینه «۲»

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \Rightarrow (z-1)^{\Delta} \cos \frac{1}{z-1} = (z-1)^{\Delta} \left[1 - \frac{1}{(z-1)^2 2!} + \frac{1}{(z-1)^4 4!} - \frac{1}{(z-1)^6 6!} + \dots \right] =$$

$$(z-1)^{\Delta} - \frac{(z-1)^{\Delta-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{\Delta-4}}{4!} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z-1} + \dots$$

پس مانده در $z=1$ برابر ضریب $\frac{1}{z-1}$ یعنی $-\frac{1}{6!}$ است.

مثال ۸: فرض کنید C معرف دایره $|z|=2$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال $\oint_C \frac{(z^2+1)}{z^6-6z^4+5z^2} dz$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) $-\frac{\pi i}{4}$ (۲) $\frac{\pi i}{4}$ (۳) 0 (۴) $\frac{\pi i}{2}$

☒ پاسخ: گزینه «۳» واضح است ابتدا باید نقاط تکین تابع تحت انتگرال را حساب کنیم، برای این منظور مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$z^6 - 6z^4 + 5z^2 = 0 \Rightarrow z^2(z^4 - 6z^2 + 5) = 0 \Rightarrow z^2(z^2 - 5)(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow z = 0, z = \pm\sqrt{5}, z = \pm 1$$

از بین نقاط فوق، فقط نقاط $z = \pm 1$ و $z = 0$ داخل دایره $|z|=2$ قرار دارند و لذا مانده در این نقاط را حساب می‌کنیم:

$$\text{مانده در } z=0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2+1}{z^6-6z^4+5z^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(z^4-6z^2+5) - (4z^3-12z)(z^2+1)}{(z^6-6z^4+5z^2)^2} = 0$$

$$\text{مانده در } z=1 = \left. \frac{z^2+1}{(z^6-6z^4+5z^2)'} \right|_{z=1} = \left. \frac{z^2+1}{6z^5-24z^3+10z} \right|_{z=1} = \frac{2}{6-24+10} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

به همین طریق مانده در $z=-1$ برابر $\frac{1}{4} +$ به دست می‌آید و لذا حاصل انتگرال برابر است با:

$$I = 2\pi i \left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

توضیح: البته نیازی به محاسبات فوق نبود. زیرا $f(z)$ زوج است و نقاط تکین داخل مرز نیز دو به دو قرینه‌ی هم یا صفر هستند، بنابراین مجموع مانده‌ها در این نقاط و حاصل انتگرال، برابر با صفر است.

(1) $-3\pi i$

(2) $-\pi i$

7. حاصل انتگرال $I = \oint \frac{z^2}{\sin z} dz$ حول مسیر $C: |z| = 8$ کدام است؟

(مهندسی برق - مس)

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

۷- گزینه «۴» ابتدا ریشه‌های مخرج را حساب می‌کنیم:

فقط نقاط $\pm 2\pi$ و $\pm \pi$ و $z = 0$ در درون ناحیه C هستند، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{z=z_k} \text{Res} f(z) &= \text{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z}\right)_{z=0} + \text{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z}\right)_{z=-\pi} + \text{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z}\right)_{z=\pi} + \text{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z}\right)_{z=-2\pi} + \text{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z}\right)_{z=2\pi} \\ &= 0 + \frac{\pi^2}{\cos \pi} + \frac{(-\pi)^2}{\cos(-\pi)} + \frac{(2\pi)^2}{\cos 2\pi} + \frac{(-2\pi)^2}{\cos(-2\pi)} = 6\pi^2 \Rightarrow I = 2\pi j \times 6\pi^2 = 12\pi^3 j \end{aligned}$$

۱۰- انتگرال $I = \int_C \frac{dz}{z^2 + z + 2}$ که در آن C دایره $|z| = 2$ در جهت عکس ساعت گرد است برابر است با: (مهندسی مکانیک)

گزینه «۲»

$$z^2 + z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{7})$$

$$\left| -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2} < 2$$

بالا باید ببینیم این دو نقطه درون دایره $|z| = 2$ قرار دارند یا نه؟

هر دو نقطه درون دایره $|z| = 2$ قرار دارند. بنابراین به جای آن‌ها می‌توانیم از مانده در $z = \infty$ استفاده کنیم. از آنجا که مخرج دو درجه بیشتر از صورت

$$I = -2\pi i \times \text{Res}(f, \infty) = 0$$

است پس مانده f در $z = \infty$ ، صفر می‌شود.

(مهند)

۲۰- مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ وقتی که $C: |z|=3$ باشد، کدام است؟ $(\sqrt{-1} = j)$

$-2\pi i$ (۱)

$$I = 2\pi j [\operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z)] = 2\pi j \left[\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z - 2} + \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z - 1} \right) \right] = 2\pi j(1 + 1) = 4\pi j$$

نیزینه «۴»

۳۸- مقدار انتگرال $\oint_C \frac{z \cos^2 z + 2 \sin^2 z}{z \sin^2 z} dz$ را حول دایره‌ی $C: |z|=2$ تعیین کنید.

$$\text{نقاط تکین: } \begin{cases} z=0 \\ \sin \sqrt{2}z=0 \rightarrow \sqrt{2}z=k\pi \rightarrow z=\frac{k\pi}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\frac{z \cos^2 z + \sqrt{2} \sin^2 z}{z \sin \sqrt{2}z} = \frac{z \cos^2 z}{z \sin \sqrt{2}z} + \frac{\sqrt{2} \sin^2 z}{z \sin \sqrt{2}z}$$

نقاط تکین داخل دایره C عبارتند از: $z=0, z=\pm \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

قسمت دوم تابعی زوج بر حسب z می باشد و لذا در بسط آن ضریب $\frac{1}{z}$ ظاهر نخواهد شد.

$$\frac{z \cos^2 z}{z \sin \sqrt{2}z} = \frac{z \cos^2 z}{\sqrt{2}z \sin z \cos z} = \frac{\cos z}{\sqrt{2} \sin z} = \frac{p}{q}, z=0 \text{ مانده در } = \frac{p}{q'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ مانده در } = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{z \cos^2 z + \sqrt{2} \sin^2 z}{\sin \sqrt{2}z + \sqrt{2}z \cos \sqrt{2}z} \bigg|_{z=\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{-\sqrt{2}}{\pi}$$

$$z = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ مانده در } = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{z \cos^2 z + \sqrt{2} \sin^2 z}{\sin \sqrt{2}z + \sqrt{2}z \cos \sqrt{2}z} \bigg|_{z=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ مانده در } = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{z \cos^2 z + \sqrt{2} \sin^2 z}{\sin \sqrt{2}z + \sqrt{2}z \cos \sqrt{2}z} \bigg|_{z=\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{-\sqrt{2}}{\pi} \\ z = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ مانده در } = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{z \cos^2 z + \sqrt{2} \sin^2 z}{\sin \sqrt{2}z + \sqrt{2}z \cos \sqrt{2}z} \bigg|_{z=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow I = \sqrt{2}\pi i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) = \pi i$$

$$-\frac{2\pi i}{9} \quad (1)$$

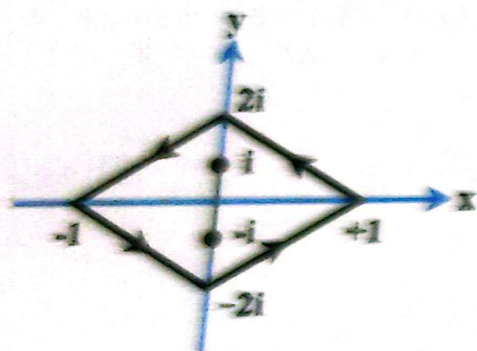
$$\frac{2\pi i}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{2\pi i}{9} \quad (1)$$

9

(مهندسی مواد -

۵۰. اگر Γ لوزی با رئوس ± 1 و $\pm 2i$ در صفحه و در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه حاصل $\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$ کدام است؟



$$\oint \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=i} \frac{\sin z}{z^2 + 1} + \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{\sin z}{z^2 + 1} \right] \Rightarrow 2\pi i \left[\frac{\sin z}{2z} \Big|_{z=i} + \frac{\sin z}{2z} \Big|_{z=-i} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i \sinh 1}{2i} + \frac{(-i \sinh 1)}{-2i} \right] = 2\pi i \sinh 1$$

۵۸- مطلوب است مقدار انتگرال مختلط داده شده در صورتی که C دایره‌ای به معادله $|z-1|=3$ باشد: $\oint_C \frac{(z+2)^2}{4z^2+z} dz$ (مهندسی)

$$-\frac{\pi i}{3} (4)$$

$$2\pi i (3)$$

$$-2\pi i (2)$$

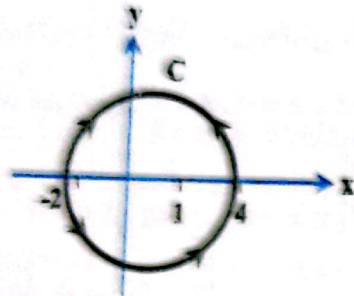
$$\frac{\pi}{2} i (1)$$

$$-\frac{\pi}{3} i (4)$$

$$-\frac{\pi}{2} i (3)$$

$$\frac{\pi}{2} i (2)$$

$$\pi$$



$$\oint_C \frac{(z+r)^r}{fz^r+z} dz$$

$$, \quad rz^r + z = 0 \Rightarrow z(rz^r + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \rightarrow \text{قطب ساده} \\ z=\frac{i}{r} \rightarrow \text{قطب ساده} \\ z=\frac{-i}{r} \rightarrow \text{قطب ساده} \end{cases}$$

$$\text{Res}f(z) = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}$$

$$\text{Res}f(z) = \frac{(0+r)^r}{1r(0)^r+1} = \frac{r}{1} = r$$

$$\text{Res}f(z) = \frac{(\frac{i}{r}+r)^r}{1r(\frac{i}{r})^r+1} = \frac{-\frac{1}{r}+r+ri}{1r(\frac{-1}{r})+1} = \frac{ri+\frac{15}{r}}{-2} = -i-\frac{15}{2}$$

$$\text{Res}f(z) = \frac{(\frac{-i}{r}+r)^r}{1r(\frac{-i}{r})^r+1} = \frac{-\frac{1}{r}+r-ri}{1r(\frac{-1}{r})+1} = \frac{-ri+\frac{15}{r}}{-2} = i-\frac{15}{2} \Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{(z+r)^r}{fz^r+z} dz = 2\pi i \sum \text{Res}f(z) = 2\pi i [r + (-i-\frac{15}{2}) + (i-\frac{15}{2})] = 2\pi i (r - \frac{15}{2}) = \frac{\pi i}{r}$$

$$\frac{1}{z^r \sin z} = \frac{1}{z^r} \left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{2!}+\dots} \right) = \frac{1}{z^r} (1 + \frac{z^2}{2!} + \dots) = \frac{1}{z^r} + \frac{1}{z^{r-2}} + \dots$$

با توجه به بسط $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ داریم:

۶۶- مقدار انتگرال $I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz$ که در آن $C: |z| = 2$ در جهت مثبت می باشد عبارت است از: (مهندسی ابزار دقیق و

(۲) $-\frac{2\pi i}{e}$

$$(۱) -\frac{2\pi i}{e}$$

$$(۳) I = \frac{\pi}{2}(2-i)$$

$$(۲) I = \frac{\pi}{e}i$$

$$(۱) I = \frac{\pi}{2}i$$

(۴) -2

۶۶- گزینه «۲» قبل از حل لازم به ذکر است که در صورت سوال به جای e^z باید از e^z استفاده شود و انتگرال بصورت مقابل خواهد بود:

$$I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2} dz$$

$$(z^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (z - 1)^2 (z + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 & \text{قطب از مرتبه دوم} \\ z = -1 & \text{قطب از مرتبه دوم} \end{cases}$$

ابتدا نقاط تکین را بدست می آوریم:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z - 1)^2 (z + 1)^2}$$

حال مانده ها را محاسبه می کنیم:

$$\text{Res}f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z - 1)^2 e^z}{(z - 1)^2 (z + 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z}{(z + 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z (z + 1)^2 - 2(z + 1)e^z}{(z + 1)^4} \right) = \frac{4e - 4e}{16} = 0$$

$$\text{Res}f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z + 1)^2 e^z}{(z - 1)^2 (z + 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{e^z}{(z - 1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{e^z (z - 1)^2 - 2(z - 1)e^z}{(z - 1)^4} \right) = \frac{4e^{-1} + 4e^{-1}}{16} = \frac{1}{2e}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \times \sum \text{Res}f(z) = 2\pi i \times \left(0 + \frac{1}{2e} \right) = \frac{\pi i}{e}$$

۹۵- مقدار انتگرال $\int_C \frac{(z^2 - 2z - 2)dz}{(z^2 + 1)^2 z}$ که در آن C منحنی $|z - i| = \frac{1}{4}$ باشد، برابر کدام است؟

(۴) $-2\pi i$

(۳) $2\pi i$

(۲) $\pi(1 + 2i)$

(۱) $\pi(1 - 2i)$

۹۵- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا قطب‌های تابع زیر انتگرال را محاسبه می‌کنیم: $z(z+i)^2(z-i)^2 = 0 \Rightarrow z=0, z=i, z=-i$

حالا باید ببینیم کدام یک از قطب‌های فوق درون ناحیه $|z-i| = \frac{1}{4}$ قرار دارند. برای این منظور به جای z در معادله‌ی داده شده مقادیر مختلف را قرار

می‌دهیم، هر کدام کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ شد، درون دایره قرار دارد:

$$z=0 \Rightarrow |0-i|=|i|=1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{4} \Rightarrow \text{درون ناحیه نیست}$$

$$z=i \Rightarrow |i-i|=|0|=0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{4} \Rightarrow \text{درون ناحیه قرار دارد.}$$

$$z=-i \Rightarrow |-i-i|=-2i=2 \Rightarrow 2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \text{درون ناحیه نیست}$$

بنابراین فقط مانده در نقطه‌ی $z=i$ باید حساب شود. اما دقت کنید $z=i$ ، قطب مرتبه دوم تابع است و لذا داریم:

$$\text{Res}f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} [(z-i)^2 \frac{z^2 - 2z - 2}{(z+i)^2(z-i)^2 z}]' = \lim_{z \rightarrow i} (\frac{z^2 - 2z - 2}{z(z+i)^2})'$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(2z-2)(z)(z+i)^2 - [2(z+i)z + 1 \times (z+i)^2](z^2 - 2z - 2)}{(z+i)^4 z^2} = \frac{(2i-2)(i)(i+i)^2 - [2(i+i)i + (i+i)^2][i^2 - 2i - 2]}{(i+i)^4 (i)^2}$$

$$= \frac{(2i-2)(i)(-4) - (-4-4)(-3-2i)}{16 \times (-1)} = \frac{8 + 8i - 24 - 16i}{-16} = \frac{-16 - 8i}{-16} = 1 + \frac{i}{2}$$

$$I = 2\pi i [\text{Res}f(z)] = 2\pi i (1 + \frac{i}{2}) = 2\pi i - \pi = \pi(2i - 1)$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل است:

احتمالاً طراح محترم جهت پیموده شدن منحنی را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته و به $\pi(1-2i)$ (یعنی گزینه ۱) رسیده است ولی این رویه معمول نیست!!

وقتی صحبتی از جهت انتگرال‌گیری در سؤال نباشد، معمولاً جهت انتگرال‌گیری مثبت (بر خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) مدنظر قرار می‌گیرد.

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ برابر کدام گزینه است؟ ($\omega > 0$)

(۱) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega} - e^{-2\omega})$ (۲) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega} - e^{-2\omega})$ (۳) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega} + e^{-2\omega})$ (۴) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega} + e^{-2\omega})$

پاسخ: گزینه «۲» برای تابع فوق $f(z) = \frac{1}{z^4 + 5z^2 + 4}$ در نظر می گیریم. ابتدا قطب های تابع را حساب می کنیم:

$$z^4 + 5z^2 + 4 = 0 \Rightarrow (z^2 + 1)(z^2 + 4) = 0 \Rightarrow z = \pm i, z = \pm 2i$$

حالا کافیت مانده $\frac{e^{i\omega z}}{z^4 + 5z^2 + 4}$ در قطب های بالای محور حقیقی حساب شود:

$$\left. \begin{aligned} z=i \text{ در مانده} &= \frac{e^{i\omega z}}{4z^3 + 10z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{i\omega(i)}}{4(i)^3 + 10(i)} = \frac{e^{-\omega}}{6i} \\ z=2i \text{ در مانده} &= \frac{e^{i\omega z}}{4z^3 + 10z} \Big|_{z=2i} = \frac{e^{i\omega(2i)}}{4(2i)^3 + 10(2i)} = -\frac{e^{-2\omega}}{12i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \text{Re} \left[2\pi i \left(\frac{e^{-\omega}}{6i} - \frac{e^{-2\omega}}{12i} \right) \right] = \frac{\pi}{6} (2e^{-\omega} - e^{-2\omega})$$

👁 مثال ۱۴: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(3x)}{(x^2+3)(x^2+1)} dx$ برابر کدام گزینه است؟

$\frac{\pi}{2}(e^{-3} - e^{-3\sqrt{3}})$ (۴)
 $\frac{\pi}{4}(e^{-3} - e^{-3\sqrt{3}})$ (۳)
 $\frac{\pi}{2}(e^{-3} + e^{-3\sqrt{3}})$ (۲)
 $\frac{\pi}{4}(e^{-3} + e^{-3\sqrt{3}})$ (۱)

✅ پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تابع زیر انتگرال باید مانده تابع $\frac{ze^{i3z}}{(z^2+3)(z^2+1)}$ را در قطب‌های آن (قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند)

حساب کنیم. قطب‌های بالای محور حقیقی فقط $z = \sqrt{3}i$ و $z = i$ هستند، لذا داریم:

$$z=i \text{ در مانده} = \left. \frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)} \right|_{z=i} = \frac{ie^{i3(i)}}{2i(i^2+1)+2i(i^2+3)} = \frac{ie^{-3}}{4i} = \frac{e^{-3}}{4}$$

$$z=\sqrt{3}i \text{ در مانده} = \left. \frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)} \right|_{z=\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}ie^{i3(i\sqrt{3})}}{2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+1]+2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+3]} = \frac{\sqrt{3}ie^{-3\sqrt{3}}}{2i\sqrt{3}(-2)} = \frac{e^{-3\sqrt{3}}}{-4}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$I = \text{Im}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{4} - \frac{e^{-3\sqrt{3}}}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{2}(e^{-3} - e^{-3\sqrt{3}})$$

مثال ۱۷: حاصل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$ ، چند برابر $\frac{\pi}{5}$ است؟

(۱) $\cos 1 - e^{-2}$ (۲) $\cos 1 + e^{-2}$ (۳) $2\cos 1 - e^{-2}$ (۴) $2\cos 1 + e^{-2}$

✓ پاسخ: گزینه «۱» ابتدا تابع $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع قطب ساده $z = 2i$ را بالاتر از محور حقیقی و $z = 1$ را روی

محور حقیقی دارد. بنابراین مانده‌ی $f(z)$ را در $z = 2i$ و $z = 1$ حساب می‌کنیم. اولی را در $2\pi i$ و دومی را در πi ضرب خواهیم کرد. دقت کنید که مسیر انتگرال‌گیری محور x ها از $-\infty$ تا $+\infty$ است. نقطه‌ی تکین $z = 1$ روی مرز قرار دارد. با یک کمان به اندازه‌ی π (نیم دایره) می‌توانیم آن را دور بزنیم به

همین خاطر مانده در $z = 1$ را در π ضرب می‌کنیم. با تجزیه‌ی مخرج داریم $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z - 2i)(z + 2i)(z - 1)}$. بنابراین:

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{iz}}{(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{e^i}{5}, \quad \text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{iz}}{(z + 2i)(z - 1)} = \frac{e^{-2}}{(4i)(2i - 1)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \frac{e^{-2}}{4i(2i - 1)} + \pi i \frac{e^i}{5} = \frac{\pi}{2e^2(2i - 1)} \times \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} + \frac{\pi i}{5} (\cos 1 + i \sin 1) = -\frac{\pi(1 + 2i)}{10e^2} + \frac{\pi}{5} (i \cos 1 - \sin 1)$$

و در نتیجه:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = -\frac{2\pi}{10e^2} + \frac{\pi}{5} \cos 1 = \frac{\pi}{5} (\cos 1 - e^{-2})$$

در نهایت می‌دانیم که:

مثال ۳۹: حاصل $I = \int_0^{\infty} \frac{\text{Ln} x}{(x^2 + 1)^2} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{4} \text{Ln} 2$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $-\frac{\pi}{4}$

(۴) $-\frac{\pi}{4} \text{Ln} 2$

پاسخ: گزینه «۳» یادآوری می‌کنیم که: $\int_0^{\infty} f(x) \text{Ln} x dx = \text{Re}[\pi i \text{ (مجموع مانده‌های } f(z) \text{Ln} z \text{ در قطب‌های بالای محور حقیقی)}]$

در این مثال $f(z) \text{Ln} z = \frac{\text{Ln} z}{(z-i)^2 (z+i)^2}$ دو قطب مرتبه‌ی دو در $z = \pm i$ دارد که فقط $z = i$ بالای محور حقیقی است.

$$\text{Res}(f(z) \text{Ln} z, i) = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[(z-i)^2 \frac{\text{Ln} z}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right]_{z=i} = \frac{d}{dz} \left[\frac{\text{Ln} z}{(z+i)^2} \right]_{z=i} = \frac{\frac{1}{i} (2i)^2 - 2(2i) \text{Ln} i}{(2i)^4} = \frac{4i - 4i(\text{Ln} 1 + i \frac{\pi}{2})}{16} = \frac{2\pi + 4i}{16}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل است:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{Ln} x}{(1+x^2)^2} dx = \text{Re} \left[\pi i \left(\frac{2\pi + 4i}{16} \right) \right] = -\frac{4\pi}{16} = -\frac{\pi}{4}$$

مثال ۴۲: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

✓ پاسخ: گزینه «۱» ابتدا خیلی خلاصه یادآوری می‌کنیم که در درس ریاضیات عمومی این سری را با تجزیه‌ی مخرج و ایجاد فرم تلسکوپی حل می‌کنند. به این صورت که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

حال ببینیم با روش جدید چگونه به جواب می‌رسیم. $f(z) = \frac{1}{4z^2 - 1}$ دارای دو قطب ساده در $z = \pm \frac{1}{2}$ است.

$$\text{Res}(f(z) \cot g\pi z, \pm \frac{1}{2}) = \frac{p(z)}{q'(z)} \Big|_{\pm \frac{1}{2}} = \frac{\cot g(\pm \frac{\pi}{2})}{\lambda(\pm \frac{1}{2})} = 0$$

$$\text{با فرض } f(z) \cot g\pi z = \frac{\cot g\pi z}{4z^2 - 1} = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = -\pi(0+0) = 0$$

در هر دو نقطه، مانده برابر با صفر است، بنابراین داریم:

$$-1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

اکنون با جدا کردن جمله‌ی $n = 0$ از سری و استفاده از زوج بودن $f(n)$ داریم:

۱- انتگرال ناسره $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ برابر است با:

روش اول:

$$1+z^4=0 \Rightarrow z=e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}}, k=0,1,2,3$$

اما فقط دو ریشه $z_1=e^{\frac{\pi i}{4}}$ و $z_2=e^{\frac{3\pi i}{4}}$ بالای محور حقیقی قرار دارند، لذا داریم:

$$I=\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, f(z)=\frac{1}{1+z^4}, I=\left[\frac{1}{2}\times 2\pi i(\text{Resf}_{z=z_1}+\text{Resf}_{z=z_2})\right]$$

چون مشتق مخرج به صورت $4z^3$ می شود، لذا داریم:

$$\text{Resf}(z)=\frac{1}{\frac{\pi i}{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}}=\frac{1}{\pi i}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \text{Resf}(z)=\frac{1}{\frac{3\pi i}{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}}}=\frac{1}{3\pi i}e^{\frac{9\pi i}{4}}$$

$$\Rightarrow I=\left[\frac{1}{2}\times 2\pi i\times\left(\frac{1}{\pi i}e^{\frac{3\pi i}{4}}+\frac{1}{3\pi i}e^{\frac{9\pi i}{4}}\right)\right]\Rightarrow I=\pi i\times\frac{1}{\pi}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$

$$I=\frac{\pi i}{\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\pi i}{\pi}\right)(-i\sqrt{2})=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۲۰- مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^4}$ عبارت است از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } z_0 > 0 \\ z=z_0}} \text{Res} f(z)$$

$$1+4z^4=0 \Rightarrow z^4 = \frac{-1}{4} = \frac{1}{4} e^{i\pi} = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^4 e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{\frac{(\pi+2k\pi)}{4}i} = \begin{cases} \xrightarrow{k=0} z = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1+i) & \text{قابل قبول} \\ \xrightarrow{k=1} z = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(-1+i) & \text{قابل قبول} \\ \xrightarrow{k=2} z = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{\frac{5\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(-1-i) & \text{غیر قابل قبول} \\ \xrightarrow{k=3} z = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{\frac{7\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1-i) & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{P(z)}{q(z)} \Rightarrow \text{Res} f(z) = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{1+4z^4} \Rightarrow \text{Res} f(z) = \frac{1}{16z_0^3}$$

$$\text{Res} f(z) = \frac{1}{16 \times \frac{1}{8}(1+i)^3} = \frac{1}{2(-2+2i)} = \frac{1}{2i-2} \times \frac{-4-4i}{-4-4i} = \frac{-4-4i}{16+16} = -\frac{1}{4}(1+i)$$

$$\text{Res} f(z) = \frac{1}{16 \times \frac{1}{8}(-1+i)^3} = \frac{1}{2(2+2i)} = \frac{1}{2+2i} \times \frac{4-4i}{4-4i} = \frac{4-4i}{16+16} = \frac{1}{4}(1-i)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \times \left(\frac{-1}{4}(1+i) + \frac{1}{4}(1-i)\right) = 2\pi i \times \left(\frac{-2}{4}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

نوجه: برای سادگی حل بهتر است انتگرال را بصورت $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}$ نوشته و سپس به حل بپردازیم. البته بهتر

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\right)$$

است مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ را نیز به خاطر بسپاریم که با این وجود حل بسیار ساده خواهد شد.