

$$\begin{cases} u_t - t^r u_{xx} - u = 0, & 0 < x \leq 1, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & u(x, 0) = \sin \pi x \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)}$$

الف) فرض کنیم $u(x, t) = F(x)G(t)$ باشد. با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم:

$$F(x)G'(t) - t^r F''(x)G(t) - F(x)G(t) = 0$$

با تقسیم جملات بر $t^r F(x)G(t)$ و مرتب کردن عبارات داریم:

$$\frac{G'(t)}{t^r G(t)} - \frac{1}{t^r} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

سمت راست تابع بر حسب x و سمت چپ تابع بر حسب t است. از تساوی آن‌ها نتیجه می‌شود که هر دو تابع با عدد ثابتی برابرند. پس داریم:

$$\frac{G'(t)}{t^r G(t)} - \frac{1}{t^r} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda$$

در ضمن شرایط مرزی $u(0, t) = 0$ و $u(1, t) = 0$ نتیجه می‌دهند که $F(0) = 0$ و $F(1) = 0$ است.

اکنون روی علامت λ بحث می‌کنیم. هرگاه $\lambda = 0$ یا $\lambda < 0$ باشد به سادگی می‌توان تحقیق کرد که جواب بدیهی $F(x) = 0$ بدست می‌آید.

هرگاه λ مثبت باشد، یعنی $\lambda = k^2 > 0$ ، آن‌گاه معادله $F''(x) + k^2 F(x) = 0$ را خواهیم داشت که معادله‌ی مشخصه‌ی آن $r^2 + k^2 = 0$ و ریشه‌هایش $r = \pm ik$ هستند. در این حالت $F(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ است. با توجه به شرط $F(0) = 0$ داریم $c_1 = 0$. پس $F(x) = c_2 \sin kx$. از

طرفی با استفاده از شرط مرزی $F(1) = 0$ داریم $\sin k = 0$ بنابراین $k = n\pi$ و در نتیجه داریم:

$$F_n(x) = \sin n\pi x, \quad \lambda_n = n^2 \pi^2 \quad (n \neq 0)$$

اکنون معادله‌ی مربوط به $G(t)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{G'(t)}{t^r G(t)} - \frac{1}{t^r} = -n^2 \pi^2 \Rightarrow \frac{G'(t)}{G(t)} = -n^2 \pi^2 t^r + 1$$

با انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\ln G(t) = -\frac{n^2 \pi^2 t^{r+1}}{r+1} + t + \ln c$$

در نتیجه $G_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{r+1} t^{r+1} + t}$ ($n \in \mathbb{N}$) جواب‌های ویژه‌ی $G(t)$ هستند. (در نوشتن جواب‌های ویژه نیازی نیست ضریب ثابت یک جمله را قید کنید.)

اکنون جواب عمومی معادله دیفرانسیل به شکل سری مقابل بدست می‌آید:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(x) G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x e^{-\frac{n^2 \pi^2}{r+1} t^{r+1} + t}$$

$$\sin \pi x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$$

پیدا کردن ضرایب c_n با استفاده از شرط اولیه‌ی ناهمگن $u(x, 0) = \sin \pi x$ انجام می‌شود. به ازای $t = 0$ خواهیم داشت:

$$u(x, t) = \sin \pi x e^{-\frac{\pi^2}{3} t}$$

از تساوی طرفین واضح است که $c_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ ، $c_n = 0$ خواهد بود. در نتیجه جواب برابر است با:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{x^r}{(t+1)^r} u_{xx} = 0, & 1 \leq x \leq r, t \geq 0 \\ u(1, t) = u(r, t) = 0, & u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (ب)$$

ب) فرض کنیم $u(x, t) = F(x)G(t)$ باشد. با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم:

$$F(x)G''(t) - \frac{x^r}{(t+1)^r} F''(x)G(t) = 0$$

با جدا کردن متغیرهای x و t از یکدیگر خواهیم داشت:

$$(t+1)^r \frac{G''(t)}{G(t)} = x^r \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda$$

همچنین از شرایط همگن $u(1, t) = u(r, t) = 0$ نتیجه می شود که $F(1) = F(r) = 0$ است. معادله دیفرانسیل $x^r F''(x) + \lambda F(x) = 0$ یک معادله کوشی - اوایلر است که با تغییر متغیر $z = \text{Ln} x$ به معادله ای با ضرایب ثابت $F''(z) - F'(z) + \lambda F(z) = 0$ تبدیل می شود.

(یادآوری: معادله ای $ax^r F''(x) + bx F'(x) + cF(x) = 0$ با تغییر متغیر $z = \text{Ln} x$ به معادله ای $aF''(z) + (b-a)F'(z) + cF(z) = 0$ تبدیل می شود.)

معادله ای مشخصه ای آن به صورت $r^2 - r + \lambda = 0$ و $r^2 - r + \lambda = 1 - 4\lambda = \Delta$ است. اکنون روی علامت Δ بحث می کنیم. اگر $\Delta = 0$ یا $\Delta > 0$ باشد، به سادگی می توان دید که جواب بدیهی $F(x) = 0$ حاصل می شود. اگر $\Delta = 1 - 4\lambda = -k^2 < 0$ منفی باشد، ریشه های معادله ای مشخصه عبارتند از $r = \frac{1 \pm ik}{2}$ و جواب

$$F = e^{\frac{1}{2}z} (c_1 \cos \frac{k}{2} z + c_2 \sin \frac{k}{2} z) = x^{\frac{1}{2}} (c_1 \cos \frac{k}{2} \text{Ln} x + c_2 \sin \frac{k}{2} \text{Ln} x)$$

عمومی آن چنین است:

$$F(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow F(x) = c_2 x^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{k}{2} \text{Ln} x)$$

اکنون شرایط مرزی را اعمال می کنیم:

$$F(r) = 0 \Rightarrow c_2 \sqrt{r} \sin(\frac{k}{2} \text{Ln} r) = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} \text{Ln} r = n\pi \Rightarrow k = \frac{2n\pi}{\text{Ln} r} \quad (n \neq 0)$$

دقت کنید که $-k^2 < 0$ است، پس k نمی تواند صفر باشد. بنابراین $F_n(x) = x^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{n\pi}{\text{Ln} r} \text{Ln} x)$ برای $(n = 1, 2, \dots)$ جواب های ویژه ای $F(x)$ را می دهد.

همچنین $1 - 4\lambda_n = -(\frac{2n\pi}{\text{Ln} r})^2 < 0$ است، پس $\lambda_n = \frac{1}{4}[1 + (\frac{2n\pi}{\text{Ln} r})^2]$ مقادیر ویژه ای این معادله هستند. اکنون به حل معادله دیفرانسیل مربوط به $G(t)$

$$(t+1)^r \frac{G''(t)}{G(t)} = -\lambda_n$$

می پردازیم:

معادله دیفرانسیل $(t+1)^r G''(t) + \lambda_n G(t) = 0$ نیز یک معادله کوشی - اوایلر است که با تغییر متغیر $z = \text{Ln}(t+1)$ به معادله ای با ضرایب ثابت $G''(z) - G'(z) + \lambda_n G(z) = 0$ تبدیل می شود. معادله ای مشخصه $r^2 - r + \lambda_n = 0$ است و $\Delta = 1 - 4\lambda_n = -(\frac{2n\pi}{\text{Ln} r})^2$ منفی است. در نتیجه ریشه های

مختلط $r = \frac{1}{2}(1 \pm i \frac{2n\pi}{\text{Ln} r})$ را داریم و جواب عمومی برابر است با:

$$G_n = e^{\frac{1}{2}z} (A_n \cos \frac{n\pi}{\text{Ln} r} z + B_n \sin \frac{n\pi}{\text{Ln} r} z) = (t+1)^{\frac{1}{2}} [A_n \cos(\frac{n\pi}{\text{Ln} r} \text{Ln}(t+1)) + B_n \sin(\frac{n\pi}{\text{Ln} r} \text{Ln}(t+1))]$$

از طرفی شرط اولیه ای $u(x, 0) = 0$ نشان می دهد که $G(0) = 0$ خواهد بود. به ازای $t = 0$ داریم: $G(0) = A_n = 0$ بنابراین داریم:

$$G_n(t) = B_n (t+1)^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{n\pi}{\text{Ln} r} \text{Ln}(t+1))$$

حال می توانیم سری جواب را بنویسیم. از آنجا که $n \neq 0$ است، جمله ای ثابت را نخواهیم داشت:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (t+1)^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{n\pi}{\text{Ln} r} \text{Ln}(t+1)) x^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{n\pi}{\text{Ln} r} \text{Ln} x)$$

شرط $F''(x) = 0$

اگر تابع $u(x, t)$ جواب مسأله $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$ باشد، آنگاه $u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ کدام است؟

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \Rightarrow u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} g(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 g(s) ds$$

توجه شود تابع $g(x)$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ به صورت $x(1-x)$ تعریف شده است و در این انتگرال به مقدار تابع $g(x)$ در فاصله $[-\frac{1}{2}, 1]$ نیاز داریم. با توجه به آن که شرط مرزی در $x=0$ به صورت $u_x(0, t) = 0$ است، تابع $g(x)$ را در این نقطه گسترش زوج می‌دهیم. (به گسترش $g(x)$ در $x=1$ نیاز نخواهیم داشت).

$$u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(s) ds \right] \Rightarrow u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[2 \int_0^{\frac{1}{2}} g(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(s) ds \right]$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 x(1-x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8}$$

روش دوم: با توجه به ضابطه $g(x)$ ، ابتدا $G(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$G(x) = \frac{1}{c} \int g(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [G^*(x+ct) - G^*(x-ct)] \Rightarrow u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[G^*\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - G^*\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [G^*(1) - G^*(-\frac{1}{2})] = \frac{1}{2} [G^*(1) + G^*(\frac{1}{2})] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) \right] = \frac{1}{8}$$

با توجه به این که شرایط مرزی در $x=0$ ، روی u_x است، لذا g گسترش زوج نسبت به $x=0$ را دارد و چون $g = G'(x)$ ، لذا $G^*(x)$ گسترش فرد نسبت به $x=0$ را داراست. لذا در محاسبات فوق $G(\frac{1}{2}) = -G(-\frac{1}{2})$ در نظر گرفته شده است.

عبارت است از:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{\gamma}, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

۷- با استفاده از روش دالامبر جواب مسأله ✓

۷- گزینه «۴» به این سؤال در قسمت «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi(x+t)}{2} + \cos \frac{\pi(x-t)}{2} \right] = \cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi t}{2}$$

در معادله داده شده $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ ، $g(s) = 0$ بنابراین داریم:

۱۲- جواب معادله $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ، $0 < x < 2$ ، $t > 0$ با شرایط مرزی زیر کدام است؟
(مهندسی هوافضا - سراسری ۹۰)

$$y(0,t)=0, y(2,t)=0, \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0 \quad \text{و} \quad y(x,0)=\begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

همان طور که قبلاً گفتیم جواب معادله موج با دو شرط مرزی $y(0, t) = 0$ و $y(l, t) = 0$ به صورت زیر است، (مقادیر ویژه به صورت $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$ هستند).

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) F_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

برای به دست آوردن $G_n(t)$ باید معادله زیر را حل کنیم:

$$G_n''(t) + c^2 \lambda_n G_n(t) = 0 \xrightarrow{c^2 = l^2} G_n''(t) + \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right) G_n(t) = 0 \Rightarrow G_n'' + (n^2 \pi^2) G_n(t) = 0$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم همگن با ضرایب ثابت بوده و می‌دانیم جواب عمومی آن به شکل مقابل است: $G_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

بنابراین جواب کلی به صورت مقابل است:

برای تعیین مقادیر A_n و B_n باید از $y(x, 0)$ و $y_t(x, 0)$ استفاده کنیم:

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-n\pi A_n \sin(n\pi t) + n\pi B_n \cos(n\pi t)] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \Rightarrow y_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(0) + B_n \times 0] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

بنابراین A_n سری فوریه سینوسی تابع $y(x, 0)$ است:

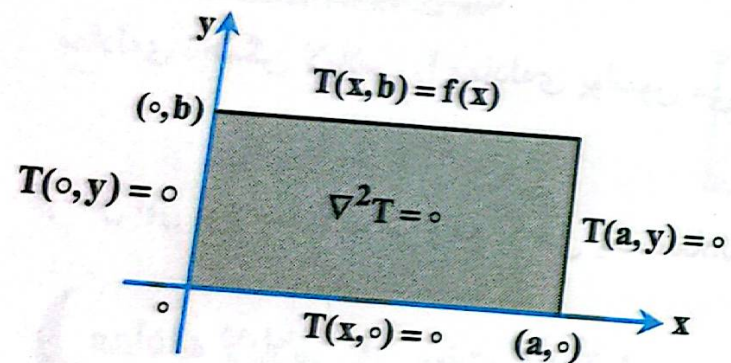
$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx + \int_1^2 (-x + 2) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \frac{\lambda}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)$$

برای اعداد زوج و فرد، A_{2n-1} و A_{2n} را جداگانه حساب می‌کنیم. $A_{2n} = \frac{\lambda}{4n^2 \pi^2} \sin n\pi = 0$ و $A_{2n-1} = \frac{\lambda}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin((2n-1)\pi) = \frac{\lambda(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2}$

$$y(x, t) = \frac{\lambda}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l} x\right) \cos((2n-1)\pi t)$$

جایگذاری در سری جواب خواهیم داشت:

(از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Harvard)



سأله مقدار مرزی زیر را در داخل یک مستطیل به طول a و عرض b حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0 ; 0 < x < a , 0 < y < b \\ T(0, y) = T(a, y) = 0 ; 0 \leq y \leq b \\ T(x, 0) = 0 , T(x, b) = f(x) , 0 \leq x < a \end{cases}$$

سمت راست، تابعی بر حسب x و سمت چپ بر حسب y است. این تساوی نشان می‌دهد که این نسبت‌ها ثابت هستند. بنابراین داریم:

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda$$

پیش از این دیدیم که جواب عمومی این معادله چنین است:

$$F_n(x) = a_n \cos \sqrt{\lambda_n} x + b_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

حال از شرط $u(0, y) = 0$ داریم $F_n(0) = 0$ و در نتیجه $F_n(x) = b_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$ سینوسی است. همچنین از شرط مرزی $u(a, y) = 0$ داریم $F_n(a) = 0$ پس $b_n \sin \lambda_n a = 0$. اگر $b_n = 0$ باشد که به جواب بدیهی $F_n(x) = 0$ می‌رسیم پس فرض کنیم $\sin \sqrt{\lambda_n} a = 0$ باشد، یعنی $\sqrt{\lambda_n} a = n\pi$ و $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ خواهد بود.

همین‌جا توجه کنید که اگر به جای متغیر x ، دو شرط همگن برای y داشتیم، معادلات دیفرانسیل را به شکل $-\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda$ می‌نوشتیم و از حل معادله $\frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda$ آغاز می‌کردیم.

حال با داشتن $\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{a}$ به حل معادله‌ی مربوط به G می‌پردازیم:

$$G'' - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} G = 0 \Rightarrow G_n(y) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

با توجه به شرط $G(0) = 0$ ، واضح است $C_n = 0$ است و لذا $G_n(y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$ است و پس جواب کلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$T_n(x, y) = F_n(x) G_n(y) = B_n D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

با فرض $E_n = B_n D_n$ داریم:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

با اعمال شرط اولیه $T(x, b) = f(x)$ داریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

به راحتی معلوم است f دارای سری فوریه نیم‌دامنه سینوسی است. لذا داریم:

بنابراین E_n برابر مقدار زیر است:

$$E_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

۲۰: در مسأله لاپلاس

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = \sin \theta, \quad u_r(2, \theta) = 0 \end{array} \right.$$

جواب نهایی $u(r, \theta)$ به کدام شکل است؟

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

به کمک روش تفکیک متغیرها، می توان چنین نوشت:

$$\nabla^2 u = F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' = 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{r^2 F'' + rF'}{F} = \frac{G''}{G}} \quad (1)$$

طرف اول رابطه فوق، تابعی از r و طرف دوم آن تابعی از θ است، بنابراین لازم است که هر دو طرف برابر مقدار ثابتی باشند. دو شرط همگن در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نشان می دهد که این عدد ثابت، منفی است. آن را $-\lambda$ می نامیم.

$$-\frac{r^2 F'' + rF'}{F} = \frac{G''}{G} = -\lambda \Rightarrow \frac{G''}{G} = -\lambda \Rightarrow G(\theta) = k_1 \sin \sqrt{\lambda} \theta + k_2 \cos \sqrt{\lambda} \theta$$

$$u(r, 0) = 0 \Rightarrow G(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \quad \text{و} \quad u(r, \pi) = 0 \Rightarrow G(\pi) = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \boxed{G(\theta) = k_1 \sin n \theta}$$

$$-\frac{r^2 F'' + rF'}{F} = -n^2, \quad r^2 F'' + rF' - n^2 F = 0 \xrightarrow{\text{معادله کوشی اویلر}}$$

با جایگذاری $\lambda = n^2$ در معادله (1) خواهیم داشت:

$$\text{چند جمله ای مشخصه} = s(s-1) + s - n^2 = 0 \Rightarrow s^2 = n^2 \Rightarrow s = \pm n \Rightarrow F(r) = k_3 r^n + k_4 r^{-n}$$

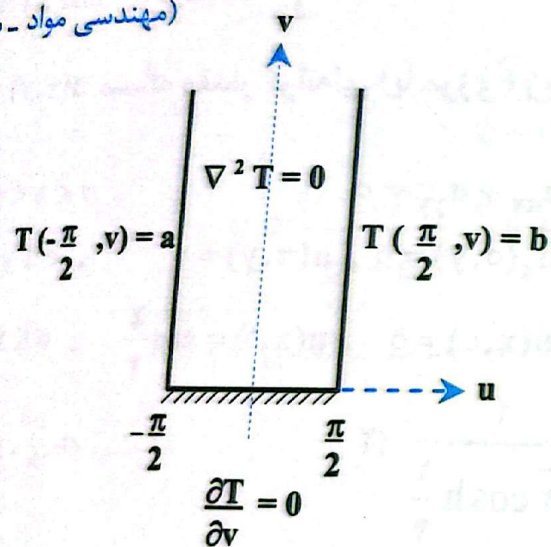
$$u_n(r, \theta) = \sum A_n F_n(r) G_n(\theta) = \sum A_n r^n \sin n \theta$$

شرط کرانداري پاسخ در $r = 0$ ايجاب می کند که: $k_4 = 0$ بنابراین داریم:

$$u(l, \theta) = f(\theta) = \sum A_n \sin n \theta \Rightarrow A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin n \theta d\theta$$

۱۷- مقدار جواب کراندار مسأله مقدار کرانه‌ای (یا مرزی) زیر بر یک نوار نیمه متناهی، با شرایط کرانه‌ای داده شده را در نقطه $(\frac{\pi}{4}, v)$ بیاید.

(مهندسی مواد - سراسری)



$$\frac{5}{4}b - \frac{a}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a \quad (2)$$

$$(\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a)e^{-v} \quad (3)$$

$$be^{-\frac{3}{4}v} + ae^{-\frac{1}{4}v} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^r T}{\partial u^r} = 0 \Rightarrow T = K_1 u + K_r \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{-\pi}{r} \Rightarrow T = a \\ u = \frac{\pi}{r} \Rightarrow T = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{b-a}{\pi} \\ K_r = \frac{a+b}{r} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{b-a}{\pi} u + \frac{a+b}{r} \Rightarrow T\left(\frac{\pi}{r}, v\right) = \frac{b-a}{\pi} \times \frac{\pi}{r} + \frac{a+b}{r} = \frac{r}{r} b + \frac{1}{r} a$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = -e^{-t}, \forall x > 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \forall x > 0 \\ u(0, t) = \mu(t), \forall t > 0 \end{cases}$$

تابع معلوم و تکه‌ای پیوسته

۱۳- تبدیل لاپلاس $U(x, s)$ جواب کراندار مسئله مقدار اولیه - مرزی:

کدام است؟

۱۳- گزینه «۱» ابتدا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) - a^2 U_{xx}(x, s) = \frac{-1}{s+1}$$

اما شرایط اولیه، همگن هستند: $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ پس داریم:

$$s^2 U - a^2 U_{xx} = -\frac{1}{s+1}$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم ناهمگن است که شامل جواب های عمومی و خصوصی است. برای محاسبه جواب عمومی معادله مشخصه زیر را تشکیل می دهیم:

$$s^2 - a^2 \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{s}{a}$$

پس جواب عمومی به شکل $U_h(x, s) = A(s)e^{\frac{s}{a}x} + B(s)e^{-\frac{s}{a}x}$ است. از طرفی $0 < x < \infty$ است پس برای کران دار ماندن جواب $A(s) = 0$ است.

جواب خصوصی معادله ی ناهمگن با توجه به طرف دوم عبارتی بر حسب s است که به شکل زیر تعیین می شود:

$$s^2 U_p(x, s) = \frac{-1}{s+1} \Rightarrow U_p(x, s) = \frac{-1}{s^2(s+1)} \Rightarrow U_p(x, s) = \frac{-1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$U(x, s) = U_h + U_p = B(s)e^{-\frac{s}{a}x} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت روبه رو است:

$$U(0, s) = \mathcal{L}(u(0, t)) = \mathcal{L}(\mu(t)) = B(s) - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \text{برای تعیین مقدار } B(s) \text{ باید شرایط مرزی و مقدار آن ها را در حوزه لاپلاس جایگذاری کنیم:}$$

$$B(s) = \mathcal{L}(\mu(t)) - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \Rightarrow U(x, s) = [\mathcal{L}(\mu(t)) - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}]e^{-\frac{s}{a}x} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1}$$

پس نتیجه می گیریم:

نکته: البته با توجه به گزینه ها فقط کافی بود، جواب قسمت خصوصی را بیابیم! یعنی عملیات تعیین $A(s)$ و $B(s)$ برای پاسخگویی به سؤال لازم نبود.