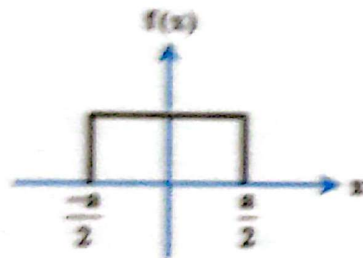


مثال ۱۰: تابع متناوب $f(x)$ در فاصله $-\pi < x < \pi$ ، به صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & ; |x| < \frac{a}{2} \\ 0 & ; \frac{a}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

تعریف شده است. با فرض این که $T = 2\pi$ ، بسط فوریه $f(x)$ در صورتی که a به سمت صفر میل کند، کدام است؟



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a} dx = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a} \cos nx dx = \left(\frac{2}{\pi a}\right) \left(\frac{1}{n} \sin \frac{na}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi a} \sin\left(\frac{na}{2}\right) \cos nx = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)}{\left(\frac{na}{2}\right)} \right] \cos nx$$

بنابراین سری فوریه $f(x)$ به صورت مقابل قابل نمایش است:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \quad \text{حال اگر } a \rightarrow 0 \text{ آنگاه عبارت داخل کروشه به سمت 1 میل خواهد کرد. لذا سری فوریه } f(x) \text{ به صورت مقابل نوشته می شود:}$$

مثال ۱۴: اگر سری فوریه $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2+1} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]$ بیان شود، آن گاه مقدار انتگرال $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos 2x + \sin 3x] dx$ کدام است؟

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{10}$$

بنابراین به ازای $n=2$ برای a_n و $n=3$ برای b_n خواهیم داشت:

$$b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 3x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{27} = \frac{1}{54} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 3x dx = \frac{\pi}{54}$$

$$I = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{54} = \frac{16\pi}{135}$$

به این ترتیب، I مجموع این دو انتگرال است:

❏ مثال ۴۳: با توجه به تعریف سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر، حاصل $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)f(x)dx$ برابر کدام گزینه است؟

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} (\pi - x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx + b_n \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right] \quad (*)$$

حاصل ۳ انتگرال را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\int_0^{2\pi} (\pi - x) dx = \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = (2\pi^2 - 2\pi^2) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \pi \cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \pi \cos(nx) - 0 = \frac{\pi}{n} [\sin nx]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \pi \sin(nx) dx - \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = 0 - \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = \left[\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{n} \cos(2n\pi) = \frac{2\pi}{n}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه‌ی (*) داریم:

$$\int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_0}{2} \times 0 + (a_n \times 0) + \frac{2\pi}{n} b_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n} b_n \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

سوال ۴۶: فرم مختلط سری فوريه تابع متناوب $f(x) = |\sin x| + 1$ در بازه $0 \leq x \leq \pi$ با دوره تناوب $T = \pi$ کدام است؟

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-rinx} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \sin x) e^{-rinx} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-rinx}}{-rin} \right]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin x) e^{-rinx} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-i(rn\pi)}}{-rin} - \frac{e^0}{-rin} \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ri} \right) e^{-rinx} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{-rin} - \frac{1}{-rin} \right] + \frac{1}{ri\pi} \int_0^\pi (e^{ix} \cdot e^{-rinx} - e^{-ix} \cdot e^{-rinx}) dx \\
&= \frac{1}{ri\pi} \int_0^\pi (e^{i(1-rn)x} - e^{-i(1+rn)x}) dx = \frac{1}{ri\pi} \left[\frac{1}{i(1-rn)} e^{i(1-rn)x} + \frac{1}{i(1+rn)} e^{-i(1+rn)x} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{ri\pi} \left[\frac{1}{i(1-rn)} (e^{i(1-rn)\pi} - 1) + \frac{1}{i(1+rn)} (e^{-i(1+rn)\pi} - 1) \right] = \frac{1}{ri\pi} \left[-\frac{r}{i(1-rn)} - \frac{r}{i(1+rn)} \right] = \frac{r}{\pi(1-rn^2)} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{re^{rinx}}{\pi(1-rn^2)}
\end{aligned}$$

۱۶- سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ به کدام صورت است؟

است که a_0 برابر صفر می‌باشد. پس a_n را حساب می‌کنیم. برای راحتی کار متغیر a_1 را به دست می‌آوریم.

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} [x \sin x + \cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

ملاحظه می‌گردد که به ازای $n=1$ مقدار جمله اول (a_1) گزینه (۲) برابر $\frac{4}{\pi}$ است.

۴۲- سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{2}$ ، $0 \leq x \leq \pi$ ، کدام است؟

با وجود این، س ...
در سری فوریه‌ی کسینوسی داریم $b_n = 0$ و a_0 و a_n را حساب می‌کنیم.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos \frac{x}{2}) dx = \frac{2}{\pi} (x + 2 \sin \frac{x}{2}) \Big|_0^{\pi} = \frac{2(\pi + 2)}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos nx + \cos \frac{x}{2} \cos nx] dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos nx + \frac{1}{2} (\cos(n + \frac{1}{2})x + \cos(n - \frac{1}{2})x)] dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2n + 1} + \frac{\sin(n - \frac{1}{2})x}{2n - 1} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{2n + 1} - \frac{(-1)^n}{2n - 1} \right] = \frac{2(-1)^n}{\pi} \frac{-2}{4n^2 - 1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi(n^2 - \frac{1}{4})}$$

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos n\pi = -(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}} \cos nx$$

۶۵- در سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ با دوره تناوب $p = 2\pi$ به صورت:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ و a_n و b_n به ترتیب عبارتند از:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow a_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos rx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{r}} \sin rx \cdot \cos rx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{r}}^0 0 \times \cos rx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin rx \cdot \cos rx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{r}} \frac{1}{r} \sin rx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} \sin rx dx = \frac{1}{r\pi} \times \left(\frac{-1}{r} \cos rx \right) \Bigg|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{r\pi} \left(\frac{-1}{r} \cos rx \right) \Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{\lambda\pi} [\cos(-\gamma\pi) - \cos(-\epsilon\pi)] - \frac{1}{\lambda\pi} [\cos\epsilon\pi - \cos 0] = \frac{-1}{\lambda\pi} [1 - 1] - \frac{1}{\lambda\pi} [1 - 1] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \gamma x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{\gamma}} \sin \gamma x \cdot \sin \gamma x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi}{\gamma}}^0 0 \times \sin \gamma x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \gamma x \times \sin \gamma x dx$$

$$\sin p \times \sin q = \frac{-1}{\gamma} [\cos(p+q) - \cos(p-q)]$$

می دانیم:

$$\Rightarrow b_\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{\gamma}} \frac{-1}{\gamma} (\cos \gamma x - \cos 0) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-1}{\gamma} (\cos \gamma x - \cos 0) dx = \frac{-1}{\gamma\pi} \left(\frac{1}{\gamma} \sin \gamma x - x \right) \Bigg|_{-\pi}^{\frac{-\pi}{\gamma}} + \frac{-1}{\gamma\pi} \left(\frac{1}{\gamma} \sin \gamma x - x \right) \Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{\gamma\pi} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \sin(-\gamma\pi) + \frac{\pi}{\gamma} \right) - \left(\frac{1}{\gamma} \sin(-\epsilon\pi) + \pi \right) \right] - \frac{1}{\gamma\pi} \left[\left(\frac{1}{\gamma} \sin \epsilon\pi - \pi \right) - \left(\frac{1}{\gamma} \sin 0 - 0 \right) \right] = \frac{-1}{\gamma\pi} \left[\frac{\pi}{\gamma} - \pi \right] - \frac{1}{\gamma\pi} [-\pi] = \left(\frac{-1}{\gamma\pi} \times \frac{-\pi}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\gamma}$$

۳- با استفاده از بسط فوریه تابع پریودیک: $f(t) = 4 - t^2$ ، $-2 \leq t \leq 2$ ، مقدار $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ چیست؟

« تابع زوج است، لذا a_n را به دست می آوریم:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (4 - t^2) \cos \frac{n\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi t}{\pi} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} t^2 \cdot \cos \frac{n\pi t}{\pi} dt$$

انتگرال گیری جزء به جزء $\rightarrow a_n = \left[-\frac{2}{n\pi} t^2 \sin \frac{n\pi t}{\pi} - \frac{4t}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi t}{\pi} + \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi t}{\pi} t \right]_0^{\pi} = -\frac{16}{n^2 \pi^2} \cos n\pi = -\frac{16(-1)^n}{n^2 \pi^2} = \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (4 - t^2) dt = \frac{1}{\pi} \left[4t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}$$

$$f(t) = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{\pi} \xrightarrow{t=0} f(0) = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \right) \xrightarrow{f(0)=4}$$

$$4 - \frac{8}{\pi} = \frac{16}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

۱: انتگرال فوريه تابع زوج

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & ; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

کدام است؟

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cdot \cos \omega x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos x \cdot \cos \omega x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(1+\omega)x + \cos(1-\omega)x] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega} + \frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{\omega} + \frac{\omega\pi}{\omega})}{1+\omega} + \frac{\sin(\frac{\pi}{\omega} - \frac{\omega\pi}{\omega})}{1-\omega} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \frac{\omega\pi}{\omega}}{1+\omega} + \frac{\cos \frac{\omega\pi}{\omega}}{1-\omega} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \frac{\omega\pi}{\omega}}{1-\omega} \right]
 \end{aligned}$$

۱- در معادله‌ی انتگرالی πX

$$\int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{e^{-x} \sin x}{x}$$

تابع $f(\omega)$ برابر است با:

$$f(\omega) = A(\omega) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{x} \cos \omega x dx$$

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{-r}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \sin \omega x dx = -\frac{r}{\pi} L\{\sin x \sin \omega x\} \Big|_{s=1} = -\frac{1}{\pi} L\{\cos(\omega-1)x - \cos(\omega+1)x\} \Big|_{s=1}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1+(\omega-1)^2} - \frac{1}{1+(\omega+1)^2} \right)$$

نمون با انتگرال گیری نسبت به ω می توانیم $f(\omega)$ را تعیین کنیم:

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} [(\tan^{-1}(\omega-1) - \tan^{-1}(\omega+1))] + c = -\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\omega-1-\omega-1}{1+\omega^2-1} \right) + c = -\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{-2}{\omega^2} \right) + c = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2}{\omega^2} \right) + c$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) \right] + c = -\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) + \left(c + \frac{1}{2} \right)$$

می توانیم $c + \frac{1}{2}$ را همان c بنامیم.

۲۳- اگر $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases}$ ، آنگاه نمایش انتگرال فوریه کسینوسی آن به صورت:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-1}(\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2} \cos \omega x d\omega$$

می باشد. مقدار $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e - (\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2} \cos \omega d\omega$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{e}(\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2} \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e - (\cos \omega - \omega \sin \omega)}{e(1 + \omega^2)} \cos \omega x d\omega$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi e} \int_0^{\infty} \frac{e - (\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2} \cos \omega x d\omega \Rightarrow \frac{\pi e}{2} f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e - (\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2} \cos \omega x d\omega$$

همان طور که ملاحظه می کنید مقدار انتگرال خواسته شده در صورت سؤال همان انتگرال سمت راست تابع $f(x)$ در $x = 1$ است و داریم:

$$\frac{\pi e}{2} f(1) = \int_0^{\infty} \frac{e - (\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2} \cos \omega d\omega$$

$$f(1) = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{0 + e^{-1}}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi e}{2} \times \frac{1}{2e} = \frac{\pi}{4}$$

حالا کافیست مقدار $f(1)$ را حساب کنیم، طبق قضیه دیریکله برای انتگرال فوریه داریم: