

۱-۲ چگالی بار $\rho = \frac{1}{r} \mu \text{ C/m}^3$ را در نظر بگیرید. چگالی بار در مبدا و کل بار موجود در کره‌ای به شعاع ۱ mm و به مرکز مبدا را بیابید.

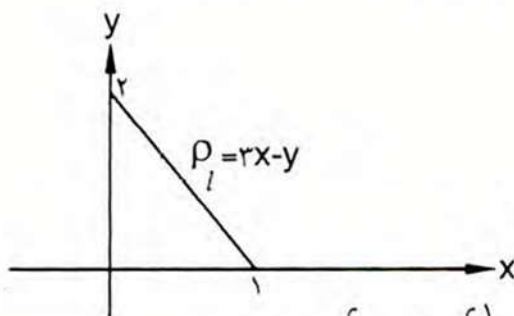
۱-۲ در $r = 0$ ، $\rho = \infty$. ولی به رغم این چگالی بار نامحدود، در کره مورد نظر بار محدودی قرار دارد.

$$Q = \int \rho \, dv = \int \rho \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{1/1000} \frac{1}{r} r^2 \, dr \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi d\phi = 6/28 \, \mu\text{C}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad |\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}| \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad |\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho| \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

مثال ۳: میله‌ای مطابق شکل در صفحه xy قرار دارد و دارای بار الکتریکی به چگالی $\rho_l = 3x - y$ می‌باشد کل بار توزیع شده روی میله را بدست آورید.



معادله میله: $y = 2 - 2x \Rightarrow dy = -2dx$

$$\rho_l = 3x - y = 3x - (2 - 2x) = 5x - 2$$

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (-2dx)^2} = \sqrt{5} dx$$

$$q = \int \rho_l d\ell = \int_0^1 (5x - 2) \sqrt{5} dx = \left[\frac{5\sqrt{5}}{2} x^2 - 2\sqrt{5} x \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

با توجه به معادله $(5-2)$ میدان الکتریکی ناشی از یک میله با چگالی بار طولی ρ_l با استفاده از رابطه $(3-2)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

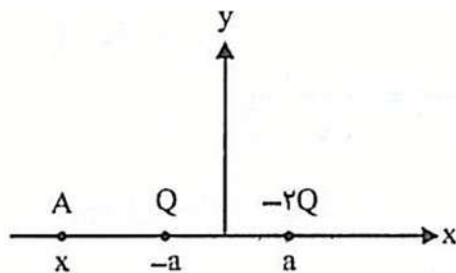
$$\vec{E} = \int_L \frac{\rho_l d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (6-2)$$

در رابطه $(6-2)$ انتگرال روی طول میله گرفته می‌شود و بردار $\vec{R}$ بردار فاصله یک عنصر بطول $d\ell$ از میله تا نقطه‌ای است که میدان را باید در آن نقطه حساب کنیم.

واضح است که اگر توزیع بار روی میله یکنواخت باشد بعبارت دیگر ρ_l ثابت باشد در اینصورت میتوان ρ_l را با رابطه $\rho_l = \frac{q}{L}$ بدست آورد که q کل بار میله و L طول میله می‌باشند.

شدت میدان الکتریکی

۲. بار الکتریکی $+Q$ در نقطه $(-a, 0, 0)$ و بار $-2Q$ در نقطه $(a, 0, 0)$ قرار دارد. نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که در آن شدت میدان الکتریکی حاصل از دو بار فوق صفر باشد.



شکل پ-۵

۲. اگر A نقطه‌ای باشد که در آن شدت میدان الکتریکی صفر است، این نقطه باید در امتداد خطی باشد که بارهای $-2Q$ و Q را به یکدیگر وصل می‌کند و نیز باید در سمت چپ بار Q قرار گیرد. با توجه به این نکات نقطه A را مطابق شکل پ-۵ در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$E = \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0(-x+a)^2}\hat{a}_x + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(-x-a)^2}\hat{a}_x = 0$$

$$\frac{2}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a+x)^2} = 0 \Rightarrow 2(a+x)^2 = (a-x)^2 \Rightarrow \sqrt{2}(a+x) = \pm(a-x)$$

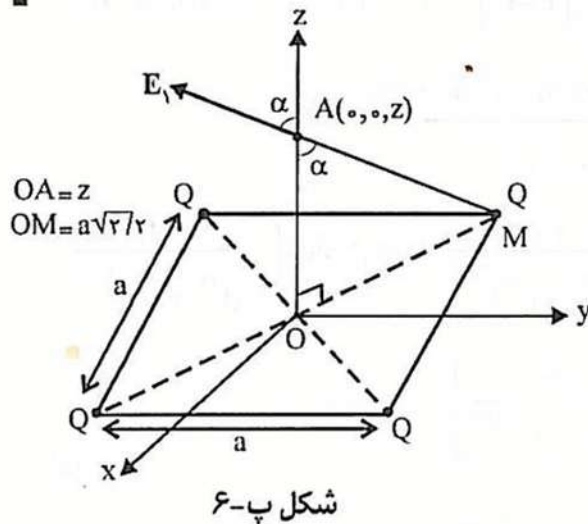
$$+ \text{ غیر قابل قبول، } \sqrt{2}(a+x) = a-x \Rightarrow x = -(3-2\sqrt{2})a > 0$$

$$- \text{ با علامت -، } \sqrt{2}(a+x) = -(a-x) \Rightarrow x = -(3+2\sqrt{2})a < 0$$

$$x \cong -5.82a$$

بنابراین، میدان در نقطه $(-5.82a, 0, 0)$ صفر است.

۳. چهار بار نقطه‌ای مساوی و هر یک به اندازه Q در چهار رأس یک مربع به ضلع a قرار دارند. میدان الکتریکی E را در نقطه‌ای روی محور این مربع محاسبه نمایید. محور مربع را منطبق بر محور z فرض کنید.



۳. به دلیل تقارن توزیع بارها، میدان کل در نقطه $A(0,0,z)$ فقط مؤلفه z خواهد داشت (شکل پ-۶).

$$E_{tot} = 4 |E_1| \cos \alpha \hat{a}_z$$

$$|E_1| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 AM^2}$$

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 = z^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = z^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2/2}}$$

$$E = \frac{Qz}{\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2/2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

۴. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_L روی نیمه مثبت محور z ($z > 0$) توزیع شده است. میدان الکتریکی E را در نقطه $A(r, \varphi, 0)$ روی صفحه xy به دست آورید.

$$E = \int_C \frac{\rho_L (r - r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3} \quad .4$$

$$r = r \hat{a}_r, \quad r' = z' \hat{a}_z, \quad dL' = dz', \quad r - r' = r \hat{a}_r - z' \hat{a}_z, \quad |r - r'|^3 = (r^2 + z'^2)^{3/2}$$

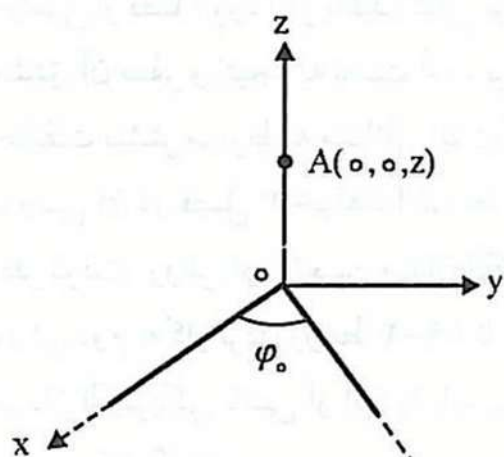
$$E = \int_0^\infty \frac{\rho_L (r \hat{a}_r - z' \hat{a}_z) dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[r \hat{a}_r \int_0^\infty \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} - \hat{a}_z \int_0^\infty \frac{z' dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \right]$$

با استفاده از:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$E(r, \varphi, 0) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r} (\hat{a}_r - \hat{a}_z)$$



شکل ۲-۲۸

۵. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_L در امتداد دو نیم خط که زاویه بین آنها φ است توزیع شده است. دو نیم خط بار را، مطابق شکل ۲-۲۸، در صفحه xy و یکی را منطبق بر محور x فرض می کنیم.

الف) میدان الکتریکی E را در نقطه $A(0, 0, z)$ روی محور z محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که نتیجه به دست آمده به ازای $\varphi = \pi$ به میدان الکتریکی ناشی از یک خط بینهایت بار، ساده می گردد.

۵. الف) میدان الکتریکی کل در نقطه A از حاصل جمع میدانهای دو نیم خط بار به دست می آید. ابتدا میدان حاصل از نیم خط باری را که با محور x زاویه φ می سازد به دست می آوریم. این میدان را E_1 می نامیم، آنگاه:

$$E_1 = \int_{C_1} \frac{\rho_L (r-r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|^3}$$

که در آن C_1 نیم خط باری است که با محور x زاویه φ می سازد. در این مسئله r ، r' و dL' عبارتند از:

$$r = z\hat{a}_z, \quad r' = r'\hat{a}_r = r'\cos\varphi\hat{a}_x + r'\sin\varphi\hat{a}_y$$

$$r - r' = -r'\cos\varphi\hat{a}_x - r'\sin\varphi\hat{a}_y + z\hat{a}_z \Rightarrow |r - r'| = (r'^2 + z^2)^{1/2}, \quad dL' = dr'$$

$$\begin{aligned} E_1(0, 0, z) &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{-r'\cos\varphi\hat{a}_x - r'\sin\varphi\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[-\cos\varphi\hat{a}_x \int_0^\infty \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} - \sin\varphi\hat{a}_y \int_0^\infty \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + z\hat{a}_z \int_0^\infty \frac{dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

اما:

$$\int_0^\infty \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \left[-\frac{1}{(r'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{z^2}} = \frac{1}{|z|}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \left[\frac{r'}{z^2(r'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{z^2}$$

آنگاه:

$$E_1(0,0,z) = \frac{\rho_{L.}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} (-\cos\varphi_0 \hat{a}_x - \sin\varphi_0 \hat{a}_y) + \frac{1}{z} \hat{a}_z \right]$$

میدان حاصل از نیم خط بار منطبق بر محور x را می‌توان از عبارت میدان E_1 به ازای $\varphi_0 = 0$ به دست آورد. این میدان را E_2 می‌نامیم.

$$E_2(0,0,z) = E_1(0,0,z) \Big|_{\varphi_0=0} = \frac{\rho_{L.}}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{|z|} \hat{a}_x + \frac{1}{z} \hat{a}_z \right)$$

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{\rho_{L.}}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1 + \cos\varphi_0}{|z|} \hat{a}_x - \frac{\sin\varphi_0}{|z|} \hat{a}_y + \frac{2}{z} \hat{a}_z \right]$$

(ب) به ازای $\varphi_0 = \pi$ داریم:

$$E = \frac{\rho_{L.}}{2\pi\epsilon_0 z} \hat{a}_z$$

می‌دانیم که میدان الکتریکی حاصل از یک خط بینهایت بار با چگالی ثابت $\rho_{L.}$ در نقطه‌ای به

فاصله R از خط بار از رابطه $E = \frac{\rho_{L.}}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{a}_R$ به دست می‌آید (رابطه ۲-۲۴). در اینجا $\hat{a}_R$ بردار

واحد در امتداد R و از خط بار به سمت نقطه‌ای که میدان در آن مورد نظر است می‌باشد. برای خط باری که روی محور x واقع باشد، فاصله نقطه‌ای روی محور z از خط همان $|z|$ است. اما $\hat{a}_R$ برابر

$\hat{a}_z$ است اگر $z > 0$ و برابر $-\hat{a}_z$ است اگر $z < 0$ باشد. پس، می‌توان نوشت: $E = \pm \frac{\rho_{L.}}{2\pi\epsilon_0 |z|} \hat{a}_z$ ، که با حذف علامت قدر مطلق، سرانجام داریم:

$$E = \frac{\rho_{L.}}{2\pi\epsilon_0 z} \hat{a}_z$$

۶. بار الکتریکی با توزیع غیر یکنواخت بر روی پاره‌خطی در امتداد محور z قرار دارد. مطلوب است

محاسبه شدت میدان الکتریکی در نقطه $A(r,\varphi,z)$ برای چگالیهای توزیع زیر:

$$\rho_L = \begin{cases} z & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \rho_L = \begin{cases} |z| & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$E = \int_C \frac{\rho_L(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dL'}{\epsilon \pi \epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{\gamma}} ; \rho_L = \begin{cases} |z| & |z| < a \\ \cdot & |z| > a \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{a}}_r + z \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r}' = z' \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}' = r \hat{\mathbf{a}}_r + (z-z') \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{\gamma} = [r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}, \quad dL' = dz'$$

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left\{ \int_{-a}^a \frac{\rho_L(z') [r \hat{\mathbf{a}}_r + (z-z') \hat{\mathbf{a}}_z]}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}} dz' \right\}$$

$$= \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left\{ (r \hat{\mathbf{a}}_r + z \hat{\mathbf{a}}_z) \underbrace{\int_{-a}^a \frac{|z'| dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}}}_{=I_1} - \hat{\mathbf{a}}_z \underbrace{\int_{-a}^a \frac{z' |z'|}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}}}_{=I_2} \right\}$$

$$I_1 = \int_{-a}^{\cdot} \frac{-z' dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}} + \int_{\cdot}^a \frac{z' dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}}$$

اما:

$$\int \frac{z' dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}} = \frac{z z' - (r^{\gamma} + z^{\gamma})}{r^{\gamma} \sqrt{r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}}} = f(r, z, z')$$

$$I_1 = f(r, z, a) + f(r, z, -a) - \gamma f(r, z, \cdot)$$

$$I_2 = \int_{-a}^{\cdot} \frac{-z'^{\gamma} dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}} + \int_{\cdot}^a \frac{z'^{\gamma} dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}}$$

ليكن:

$$\int \frac{z'^{\gamma} dz'}{[r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}]^{\gamma/\gamma}} = \frac{z^{\gamma} (z'-z) - r^{\gamma} (z'+z)}{r^{\gamma} \sqrt{r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}}} + \ln \left[\sqrt{r^{\gamma} + (z-z')^{\gamma}} - (z-z') \right]$$

$$= g(r, z, z')$$

$$I_2 = g(r, z, a) + g(r, z, -a) - \gamma g(r, z, \cdot)$$

سرانجام:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left\{ (r \hat{\mathbf{a}}_r + z \hat{\mathbf{a}}_z) [f(r, z, a) + f(r, z, -a) - \gamma f(r, z, \cdot)] \right. \\ \left. - \hat{\mathbf{a}}_z [g(r, z, a) + g(r, z, -a) - \gamma g(r, z, \cdot)] \right\}$$

$$\rho_L = \begin{cases} z & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

به نحو مشابهی می توان نشان داد که در این حالت،

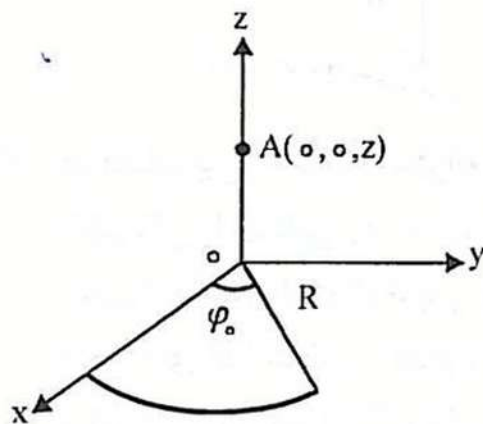
$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ (r\hat{a}_r + z\hat{a}_z) [f(r, z, a) - f(r, z, -a)] - \hat{a}_z [g(r, z, a) - g(r, z, -a)] \right\}$$

روی صفحه xy ، یعنی وقتی که $z=0$ است، نتایج مزبور به میزان زیادی ساده می شوند. خلاصه این نتایج عبارتند از:

$$E(r, \varphi, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \hat{a}_r \quad \text{(الف)}$$

$$E(r, \varphi, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} - \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + r^2}}{r} \right) \hat{a}_z \quad \text{(ب)}$$

■



شکل ۲-۲۹

۷. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_L در امتداد قوسی از یک دایره به شعاع R و محدود به $0 < \varphi < \varphi_0$ ، مطابق شکل ۲-۲۹، توزیع شده است. میدان الکتریکی E را در نقطه ای روی محور z محاسبه نمایید. توجه کنید که نتیجه به ازای $\varphi_0 = 2\pi$ به رابطه ۲-۲۸ ساده می شود.

$$E = \int_C \frac{\rho_L (r - r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3} \quad \text{.۷}$$

$$r = z\hat{a}_z, \quad r' = R\hat{a}_r = R(\cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y), \quad dL' = R d\varphi'$$

$$r - r' = z\hat{a}_z - R(\cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y) \Rightarrow |r - r'|^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$$

$$E(0, 0, z) = \int_0^{\varphi_0} \frac{R\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} (-R \cos \varphi' \hat{a}_x - R \sin \varphi' \hat{a}_y + z\hat{a}_z) d\varphi'$$

$$= \frac{R\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \left[-R \hat{a}_x \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi' d\varphi' - R \hat{a}_y \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi' d\varphi' + z\hat{a}_z \int_0^{\varphi_0} d\varphi' \right]$$

$$E(0, 0, z) = \frac{R\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} [-R \sin \varphi_0 \hat{a}_x + R(\cos \varphi_0 - 1) \hat{a}_y + z\varphi_0 \hat{a}_z]$$

۸. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_s روی یک سطح استوانه‌ای که محور آن بر محور z منطبق و شعاعش برابر a است و از $z = -h$ تا $z = +h$ امتداد دارد توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور z به دست آورید.

$$E = \int_S \frac{\rho_s (r-r') dS'}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|^3} \quad .8$$

$$r' = a \hat{a}_r + z' \hat{a}_z, \quad r = z \hat{a}_z, \quad r-r' = (z-z') \hat{a}_z - a \hat{a}_r = (z-z') \hat{a}_z - a (\cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y)$$

$$|r-r'|^3 = [(z-z')^2 + a^2]^{3/2}, \quad dS' = a d\varphi' dz'$$

$$E(\cdot, \cdot, z) = \frac{a\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-h}^h \left[\hat{a}_z \int_0^{2\pi} \frac{(z-z') d\varphi'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{a}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \left(\hat{a}_x \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' + \hat{a}_y \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' \right) \right] dz' \right\}$$

$$E(\cdot, \cdot, z) = \frac{a\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_z \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-h}^h \frac{(z-z') dz'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}}$$

با توجه به اینکه،

$$\int_{-h}^h \frac{(z-z') dz'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} \right]_{-h}^h$$

سرانجام:

$$E(\cdot, \cdot, z) = \frac{a\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z-h)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+h)^2 + a^2}} \right] \hat{a}_z$$

۹. مسئله ۸ را برای حالتی که توزیع بار روی بخشی از سطح استوانه‌ای محدود به $0 < \varphi < \varphi_0$ باشد تکرار نمایید.

۹. بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ مساوی بردارهای نظیر در مسئله ۸ هستند. پس:

$$E(0,0,z) = \frac{a\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{\mathbf{a}}_z \int_0^{\varphi_0} d\varphi' \int_{-h}^h \frac{(z-z') dz'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} - \int_{-h}^h \frac{a dz'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \left[\hat{\mathbf{a}}_x \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi' d\varphi' + \hat{\mathbf{a}}_y \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi' d\varphi' \right] \right\}$$

$$E(0,0,z) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left\{ - \left[\frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2 + a^2}} - \frac{z+h}{\sqrt{(z+h)^2 + a^2}} \right] [\sin \varphi_0 \hat{\mathbf{a}}_x + (1 - \cos \varphi_0) \hat{\mathbf{a}}_y] + a \varphi_0 \left[\frac{1}{\sqrt{(z-h)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+h)^2 + a^2}} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \right\}$$

۱۰. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_s روی $\frac{1}{a}$ سطح کره‌ای به شعاع a ، که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود، توزیع شده است. فرض کنید توزیع بار در ناحیه‌ای از فضا باشد که $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات، $E(0,0,0)$ ، به دست آورید.

$$E(0,0,0) = \int_S \frac{\rho_s (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad ۱۰$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{r}' = a \hat{\mathbf{a}}_r = a (\sin \theta' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + \cos \theta' \hat{\mathbf{a}}_z)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a \quad , \quad dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

$$E(0,0,0) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{-a^2 \rho_s \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 a^3} (\sin \theta' \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y + \cos \theta' \hat{\mathbf{a}}_z)$$

$$= -\frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left[\hat{\mathbf{a}}_x \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta' d\theta' \int_0^{\pi/2} \cos \varphi' d\varphi' + \hat{\mathbf{a}}_y \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta' d\theta' \int_0^{\pi/2} \sin \varphi' d\varphi' + \hat{\mathbf{a}}_z \int_0^{\pi/2} \sin \theta' \cos \theta' d\theta' \int_0^{\pi/2} d\varphi' \right]$$

با توجه به اینکه،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta' d\theta' = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \sin \theta' \cos \theta' d\theta' = \frac{1}{2} \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \sin \varphi' d\varphi' = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi' d\varphi' = 1$$

سرانجام داریم:

$$E(0,0,0) = -\frac{\rho_s}{16\epsilon_0} (\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z)$$

۱۱. با استفاده از میدان الکتریکی یک صفحه بینهایت بار با توزیع یکنواخت، مندرج در رابطه ۲-۳۶، میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای بار زیر را به دست آورید:

$$\rho_V = \begin{cases} a - |z| & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \rho_S = \begin{cases} \rho_{S_0} & z = a \\ -\rho_{S_0} & z = -a \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$E_1: \text{میدان بار در صفحه } z = a = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z > a \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z < a \end{cases} \quad (\text{الف ۱۱})$$

$$E_2: \text{میدان بار در صفحه } z = -a = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z > -a \\ \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z < -a \end{cases}$$

z	-a	a
E_1	$(-\rho_{S_0}/\epsilon_0) \hat{a}_z$	$(\rho_{S_0}/\epsilon_0) \hat{a}_z$
E_2	$(\rho_{S_0}/\epsilon_0) \hat{a}_z$	$(-\rho_{S_0}/\epsilon_0) \hat{a}_z$
$E_1 + E_2$	0	0

$$E = E_1 + E_2 = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \hat{a}_z & -a < z < a \\ 0 & z < -a, z > a \end{cases}$$

ب) در محل $z = z'$ ، لایه باری به ضخامت dz' را می‌توان به منزله یک صفحه بار بینهایت در نظر گرفت که چگالی آن برابر $\rho_S = (a - |z'|) dz'$ است. میدان حاصل از این لایه بار برابر است با:

$$dE = \begin{cases} \left[\frac{a - |z'|}{\epsilon_0} \right] dz' \hat{a}_z & z > z' \\ \left[-\frac{a - |z'|}{\epsilon_0} \right] dz' \hat{a}_z & z < z' \end{cases}$$

$$E = \int dE = \begin{cases} \int_{-a}^a \frac{a-|z'|}{\gamma \epsilon_0} dz' \hat{a}_z = \int_{-a}^a \frac{a-z'}{\epsilon_0} dz' \hat{a}_z & z > a \\ -\int_{-a}^a \frac{a-|z'|}{\gamma \epsilon_0} dz' \hat{a}_z = -\int_{-a}^a \frac{a-z'}{\epsilon_0} dz' \hat{a}_z & z < -a \\ \int_{-a}^z \frac{a-|z'|}{\gamma \epsilon_0} dz' \hat{a}_z - \int_z^a \frac{a-|z'|}{\gamma \epsilon_0} dz' \hat{a}_z & -a < z < a \end{cases}$$

$$\int_{-a}^a \frac{a-z'}{\epsilon_0} dz' = \frac{a^2}{\gamma \epsilon_0}$$

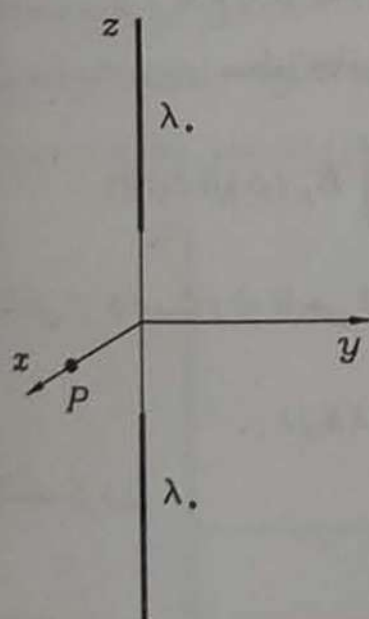
$$\int_{-a}^z \frac{a-|z'|}{\gamma \epsilon_0} dz' - \int_z^a \frac{a-|z'|}{\gamma \epsilon_0} dz' =$$

$$\begin{cases} \int_{-a}^0 \frac{a+z'}{\gamma \epsilon_0} dz' + \int_0^z \frac{a-z'}{\gamma \epsilon_0} dz' - \int_z^a \frac{a-z'}{\gamma \epsilon_0} dz' = \frac{1}{\epsilon_0} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) & 0 < z < a \\ \int_{-a}^z \frac{a+z'}{\gamma \epsilon_0} dz' - \int_z^0 \frac{a+z'}{\gamma \epsilon_0} dz' - \int_0^a \frac{a-z'}{\gamma \epsilon_0} dz' = \frac{1}{\epsilon_0} \left(az + \frac{z^2}{2} \right) & -a < z < 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه + و - متناظر با $z > 0$ و $z < 0$ را می توان به صورت $\frac{z}{|z|}$ نوشت، به طور خلاصه داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{a^2 |z|}{\gamma \epsilon_0 z} \hat{a}_z & |z| > a \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left(az - \frac{z^2}{2|z|} \right) \hat{a}_z & |z| < a \end{cases}$$

۲-۲ روی محور z باری با چگالی λ در $|z| > 5$ و با چگالی صفر در $|z| < 5$ قرار دارد. E را در $P(2, 0, 0)$ بیابید.



شکل ۲-۲

۲-۲ از رابطه $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl' \mathbf{R}}{R^3}$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$R^2 = (2 + z'^2)^{3/2}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = 2\hat{x} - z'\hat{z}, \quad dl' = dz'$$

پس

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda_0 dz' (2\hat{x} - z'\hat{z})}{(2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2\lambda_0 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dz'}{(2 + z'^2)^{3/2}} - \frac{\lambda_0 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{z' dz'}{(2 + z'^2)^{3/2}}$$

انتگرالی دومی انتگرال تابعی فرد روی فاصله متقارنی حول مبدا، و بنابراین صفرست.

$$E = \frac{2\lambda_0 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{-5} \frac{dz'}{(2 + z'^2)^{3/2}} + \int_0^{\infty} \frac{dz'}{(2 + z'^2)^{3/2}} \right)$$

$$= \frac{2\lambda_0 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\left. \frac{z'}{2\sqrt{2 + z'^2}} \right|_{-\infty}^{-5} + \left. \frac{z'}{2\sqrt{2 + z'^2}} \right|_0^{\infty} \right)$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{5}{\sqrt{27}} \right) \hat{x}$$

۸-۲ بر روی مخروط $\theta = \frac{\pi}{\epsilon}$ ، $0 < r < 2$ ، باری با چگالی $\sigma = k r \text{ C/m}^2$ قرار دارد. شدت میدان را در مبدا مختصات بیابید.

۸-۲ چون نقطه مشاهده $r = 0$ است داریم $\mathbf{R} = -\mathbf{r}' = -r' \hat{\mathbf{r}}'$. عنصر سطح روی مخروط نیز $ds' = r' \sin \theta dr' d\phi'$ است که در آن $\theta = \frac{\pi}{\epsilon}$. پس $ds' = \frac{1}{\epsilon} r' dr' d\phi'$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma ds' \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{k r' r' dr' d\phi' (-r')}{r'^3} \hat{\mathbf{r}}' \\ &= \frac{-k}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dr' d\phi' \hat{\mathbf{r}}' \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال فوق باید $\hat{\mathbf{r}}'$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنیم
 $\hat{\mathbf{r}}' = \sin \theta' \cos \phi' \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{z}}$
 چون $\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$ ، در جهتهای $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ شدت میدان صفرست و

$$E_z = \frac{-k}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^2 dr \cos \theta$$

$$\mathbf{E} = -\frac{k\sqrt{3}}{4\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

۱۴-۲ روی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع a باری با چگالی غیر یکنواخت $\sigma = k \cos \theta$ قرار دارد. میدان الکتریکی را روی محور z و در خارج کره بیابید.

۱۴-۲ در رابطه میدان الکتریکی ناشی از توزیع

بار سطحی داریم $\mathbf{r} = z \hat{\mathbf{z}}$ ، $\mathbf{r}' = a \hat{\mathbf{r}}'$ و

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{\mathbf{z}} - a (\sin \theta' \cos \phi' \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{z}})$$

همچنین $|\mathbf{R}|^2 = z^2 + a^2 - 2az \cos \theta'$ ، $\sigma = k \cos \theta'$ و $ds = a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{k \cos \theta' \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

تقارن نشان می‌دهد که مولفه‌های $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ میدان صفر است. پس

$$E_z = \frac{k a^2}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{(z - a \cos \theta') \cos \theta' \sin \theta'}{(z^2 + a^2 - 2az \cos \theta')^{3/2}} d\theta' d\phi'$$

انتگرال نسبت به ϕ' برابر 2π است. برای محاسبه انتگرال نسبت به θ' تغییر متغیر می‌دهیم. $R^2 = z^2 + a^2 - 2az \cos \theta'$ پس $2az \sin \theta' d\theta' = -2R dR$ ، همچنین $az \cos \theta' = \frac{z^2 + a^2 - R^2}{2}$ و $2z(z - a \cos \theta') = R^2 + z^2 - a^2$ پس

$$E_z = \frac{k a^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R^2 + z^2 - a^2}{2z} \frac{R^2}{2az} \frac{R dR}{a z} \frac{1}{R^3}$$

$$= \frac{k}{8\pi z^2 \epsilon_0} \int \frac{z^2 - (a^2 - R^2)^2}{R^3} dR$$

حدود انتگرال از $z - a$ تا $z + a$ است.

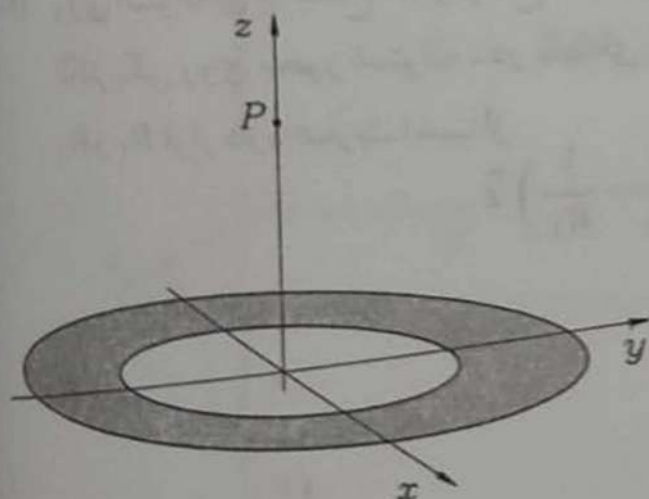
$$E_z = \frac{k}{8\pi z^2 \epsilon_0} \int_{z-a}^{z+a} \left(2a^2 - R^2 + \frac{z^2 - a^2}{R^2} \right) dR$$

که انتگرالی عادی است و پس از کمی عملیات ریاضی به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3} \frac{k a^3}{\epsilon_0 z^3} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

۱۵-۲ روی و اشتری به شعاع داخلی ۱ cm و شعاع خارجی ۲ cm بار سطحی با چگالی $\sigma = \frac{100}{\rho} \mu C/m^2$ قرار دارد. E را روی محور قرص به دست آورید.



شکل ۱۵-۲

۱۵-۲ در رابطه E داریم $R = z \hat{z} - \rho' \hat{\rho}'$ ، $|\mathbf{R}|^2 = z^2 + \rho'^2$ ، $\sigma = 100/\rho'$ ، و $ds = \rho' d\rho' d\phi'$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{100}{\rho'} \frac{\rho' d\rho' d\phi' \mathbf{R}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

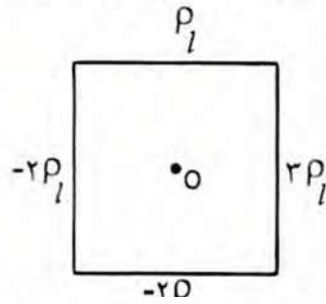
برای محاسبه انتگرال فوق باید R را در دستگاه مختصات قائم بیان کنیم

$$\mathbf{R} = z \hat{z} - \rho' (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})$$

مولفه های $\hat{x}$ و $\hat{y}$ میدان صفرند (به علت تقارن یا با توجه به صفر بودن انتگرال $\cos \phi$ و $\sin \phi$ روی یک دوره تناوب). پس

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{100z}{4\pi\epsilon_0} \hat{z} \int_1^2 \frac{d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= \frac{50z}{\epsilon_0} \hat{z} \left[\frac{\rho'}{z\sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right]_1^2 = \frac{50}{\epsilon_0} z \left(\frac{2}{\sqrt{z^2 + 4}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

۱. چهار میله بطول a مطابق شکل با چگالی بار طولی داده شده مفروض هستند میدان الکتریکی در نقطه O (مرکز مربع) کدام است؟ ($a = 14 \text{ cm}$ و $\rho_\ell = -2\pi\epsilon_0$)



$$(1) \quad 30 \hat{a}_x + 50 \hat{a}_y \quad (2) \quad 50 \hat{a}_x + 30 \hat{a}_y$$

$$(3) \quad -50 \hat{a}_x - 30 \hat{a}_y \quad (4) \quad \text{صفر}$$

۱. گزینه (۲) طبق معادله (۲-۱۵) چون نقطه O روی عمود منصف میله‌های می باشد میدان الکتریکی مولفه موازی با میله‌ها ندارد لذا میدان ناشی از میله‌ها افقی در جهت Y و میدان ناشی از میله‌های عمودی در جهت X خواهد بود.

$$E_{\text{میل‌های افقی}} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{2}} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) (-\hat{a}_y) + \frac{-2\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{2}} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \hat{a}_y$$

$$\alpha_1 = 45^\circ \quad \alpha_2 = 135^\circ \rightarrow \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = \sqrt{2} = 1/4$$

$$E_{\text{میل‌های افقی}} = \frac{-4\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 \times 0.14} (-1/4) \hat{a}_y + \frac{1\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 \times 0.14} (1/4) \hat{a}_y = 30 \hat{a}_y$$

$$E_{\text{میل‌های عمودی}} = \frac{-2\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{2}} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) (\hat{a}_x) + \frac{3\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{2}} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) (-\hat{a}_x)$$

$$E_{\text{میل‌های عمودی}} = \frac{1\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 \times 0.14} (1/4) \hat{a}_x + \frac{-12\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 \times 0.14} (1/4) (-\hat{a}_x) = 50 \hat{a}_x$$

$$E = E_{\text{میل‌های افقی}} + E_{\text{میل‌های عمودی}} = 50 \hat{a}_x + 30 \hat{a}_y$$

۷. یک لوله استوانه‌ای شکل بشعاع a و طول L دارای بار الکتریکی با چگالی بار سطحی متغیر $\rho_s = \rho_{s0} Z$ می باشد قاعده بالایی استوانه در صفحه $Z = \frac{L}{2}$ و صفحه پائین در $Z = -\frac{L}{2}$ قرار گرفته است میدان الکتریکی

روی محور استوانه در نقطه $Z=0$ چقدر است (محور استوانه محور Z می باشد) ($L=2a$)

$$(1) \quad -0.24 \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} \hat{a}_z \quad (2) \quad -0.34 \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} \hat{a}_z \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4) \quad -0.17 \frac{\rho_{s0} a}{\epsilon_0} \hat{a}_z$$

۲۱-۲ در مختصات استوانه‌ای میدان الکتریکی به صورت $\hat{\rho} - \rho \sin^2 \phi \hat{\phi}$ داده شده است. معادله خط نیروی گذرنده از نقطه $(2, 30^\circ, 0)$ را بیابید.

۲۱-۲ معادله دیفرانسیل خطوط نیرو در صفحه $z = \text{ثابت}$ دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\frac{E_\rho}{E_\phi} = \frac{d\rho}{\rho d\phi} = \frac{\rho \cos^2 \phi}{-\rho \sin^2 \phi} = -\cotan^2 \phi$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\phi}{\tan^2 \phi}$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم

$$\ln \rho = -\frac{1}{2} \ln \sin^2 \phi + C$$

$$\rho = \frac{C_1}{\sqrt{\sin^2 \phi}}$$

$$\rho^2 = \frac{C_2}{\sin^2 \phi}$$

چون خط از نقطه $(2, 30^\circ, 0)$ می‌گذرد C_2 برابر $2\sqrt{3}$ به دست می‌آید.

مثال ۷: یک میله طویل دارای بار الکتریکی به چگالی طولی $\rho_\ell = 2\pi\epsilon_0$ می‌باشد منظور است معادله خطوط میدان.

حل: می‌دانیم میدان ناشی از یک میله بی نهایت بزرگ عبارتست از $\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{a}_R$ که R فاصله میله تا نقطه‌ای است

که میدان در آن نقطه حساب می‌شود همانطوریکه ملاحظه می‌شود میدان تنها یک مولفه E_R دارد بنابراین نمی‌توان از رابطه (۲-۲۶) استفاده کرد لذا باید میدان را از دستگاه مختصات استوانه‌ای به قائم تبدیل کرد.

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{a}_R = \frac{1}{R} \hat{a}_R = \frac{1}{R} (\hat{a}_x \cos \phi + \hat{a}_y \sin \phi)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{R} \left(\hat{a}_x \frac{x}{R} + \hat{a}_y \frac{y}{R} \right) = \hat{a}_x \frac{x}{x^2 + y^2} + \hat{a}_y \frac{y}{x^2 + y^2}$$

با تبدیل میدان به دستگاه قائم می‌توان از رابطه (۲-۲۴) استفاده کرد

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} \rightarrow \frac{dy}{\frac{y}{x^2 + y^2}} = \frac{dx}{\frac{x}{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \ln y = \ln cx \rightarrow y = cx$$

قانون گاوس

۱۳. با استفاده از قانون کوس، میدان الکتریکی ناشی از توزیعیهای بار الکتریکی زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، را به دست آورید:

$$\rho_V = \begin{cases} \rho \cdot \frac{r}{a} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \rho_S = \begin{cases} \rho_S & r = a \\ -\frac{a}{b} \rho_S & r = b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

۱۳. الف) سطح گوسی S را به صورت استوانه‌ای به شعاع r، طول l و محوری منطبق بر محور z در نظر می‌گیریم. روشن است که چون توزیع بار تابعی از φ و z نیست میدان ایجاد شده نیز تابعی از φ و z نخواهد بود. به علاوه میدان فقط دارای مؤلفه شعاعی است. به طور خلاصه:

$$\mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\text{بار محصور در } S) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\oint_{\text{سطح قاعده}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\text{سطح جانبی}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}_{=0 \text{ (چون } \mathbf{E} \perp d\mathbf{S})} = E_r (\forall \pi r l)$$

$$Q = \begin{cases} 0 & r < a \\ \forall \pi a l \rho_S & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

ب) در این حالت نیز میدان الکتریکی تمام ویژگیهای بند (الف) را دارا خواهد بود. سطح گوسی نیز عیناً مانند حالت (الف) است. پس، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r, \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r (\forall \pi r l) = \frac{Q}{\epsilon_0}; \quad Q: \text{ بار محصور در } S$$

$$Q = \int_V \rho_V dV' = \int_V \rho_V (r' dr' d\varphi' dz')$$

$$= \frac{\rho}{a} \int_0^l dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \begin{cases} \int_0^r r'^2 dr' & r < a \\ \int_0^a r'^2 dr' & r > a \end{cases} = \begin{cases} \frac{\forall \pi \rho \cdot l}{3a} r^3 & r < a \\ \frac{\forall \pi \rho \cdot l}{3a} a^3 & r > a \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\forall \pi \epsilon_0 r l} \hat{\mathbf{a}}_r = \begin{cases} \frac{\rho \cdot r^2}{3\epsilon_0 a} \hat{\mathbf{a}}_r & r < a \\ \frac{\rho \cdot a^2}{3\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r & r > a \end{cases}$$

۱۴. مسئله ۱۳ را برای توزیعهای بار الکتریکی زیر، که در دستگاه مختصات کروی بیان شده‌اند، تکرار نمایید:

$$\rho_V = \begin{cases} \rho_0 (1 - r^2/a^2) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \rho_S = \begin{cases} \rho_{S_1} & r = a \\ -\frac{a^2}{b^2} \rho_{S_1} & r = b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

۱۴. الف) سطح گوسی S را به صورت کره‌ای به شعاع r و به مرکز مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. روشن است که میدان فقط مؤلفه شعاعی داشته و این مؤلفه فقط تابعی از r است. با نوشتن قانون گوس، داریم:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q \text{ بار محصور در } S) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_r(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} 0 & r < a \\ 4\pi a^2 \rho_{S_1} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < a, r > b \\ \frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \end{cases}$$

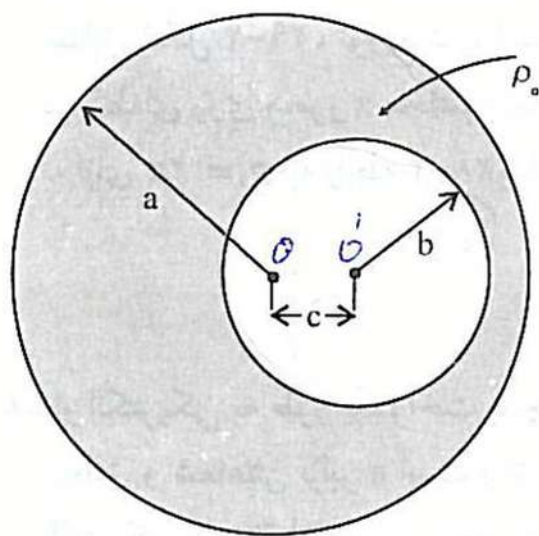
ب) سطح گوسی S را به صورت بند (الف) و بار محصور در آن را با Q نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r, \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_r(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_V dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{cases} \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' & r < a \\ \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' & r > a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} r^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) & r < a \\ \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^2}{15} & r > a \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) \hat{\mathbf{a}}_r & r < a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^2}{15} \hat{\mathbf{a}}_r & r > a \end{cases}$$

■



شکل ۳۰-۲

۱۵. در فضای بین دو سطح استوانه‌ای به طول بینهایت، بار الکتریکی با چگالی ρ_0 به طور یکنواخت توزیع شده است. شعاعهای استوانه‌ها برابر a و b بوده و فاصله بین محورهای آنها مساوی مقدار ثابت c است که $c < a - b$ فرض می‌شود. میدان الکتریکی را در درون استوانه به شعاع b محاسبه نمایید. شکل ۲-۳۰ سطح مقطع توزیع بار را نشان می‌دهد.

راهنمایی: با استفاده از قانون گوس ابتدا میدان الکتریکی حاصل از یک استوانه بینهایت طویل بار با چگالی توزیع $\rho_v = \rho_0$ را به دست آورید و سپس از اصل جمع آثار استفاده نمایید.

۱۵. توزیع بار بین دو استوانه را می‌توان مجموع دو توزیع بار دانست: یک توزیع حجمی با چگالی ρ_0 در استوانه‌ای به شعاع a و یک توزیع حجمی با چگالی $-\rho_0$ در استوانه‌ای به شعاع b . میدان در نقطه دلخواه A در درون استوانه به شعاع b را می‌توان مجموع میدانهای حاصل از دو توزیع مذکور دانست. میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله d از محور استوانه‌ای حاوی بار با چگالی ρ_0 (نقطه در درون استوانه فرض می‌شود) عبارت است از:

$$E = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \hat{a}_r$$

رابطه بالا را می‌توان به سادگی از قانون گوس نتیجه گرفت:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (S \text{ بار محصور در } S); \quad \mathbf{E} = E_r(r) \hat{a}_r, \quad S = l \text{ و طول } d \text{ به شعاع } d$$

$$E_r(2\pi dl) = \frac{1}{\epsilon_0} (\pi d^2 l \rho_0) \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}$$

با به کار بردن این نتیجه برای دو استوانه بار به شعاعهای a و b مذکور، داریم[‡]:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_A^a + \mathbf{E}_A^b = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \overrightarrow{OA} - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \overrightarrow{O'A} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O'A}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \overrightarrow{OO'}$$

$$\mathbf{E}_A = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \mathbf{C}; \quad \mathbf{C} = \overrightarrow{OO'}$$

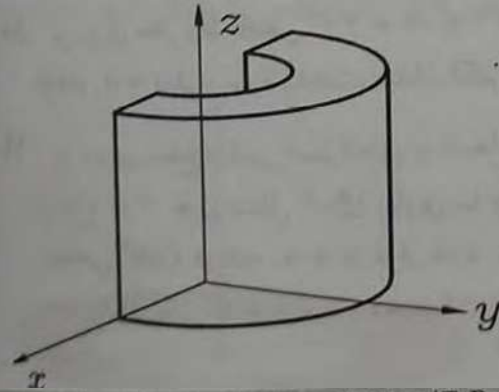
چون $\mathbf{C} = \overrightarrow{OO'}$ بردار ثابتی است، میدان الکتریکی در درون استوانه به شعاع b یکنواخت است.

[‡] O و O' به ترتیب محل تقاطع محورهای دو استوانه به شعاعهای a و b و صفحه عمود بر آنها است که از نقطه A بگذرد.

۲۴-۲ در ناحیه $0 \leq z \leq 2/5$ ، $0 \leq \phi \leq \pi$ ، $1 \leq \rho \leq 2$ چگالی شار الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{D} = \frac{20}{\rho} \cos \frac{1}{4} \phi \hat{\phi}$$

کل بار موجود در این ناحیه را به دو روش بیابید.



شکل ۲۴-۲

۲۴-۲ روش اول انتگرالگیری از چگالی بار است

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{10}{\rho^2} \sin \frac{\phi}{4}$$

$$Q = \int \rho \, dv = \int_0^{2/5} \int_0^\pi \int_1^2 \left(-\frac{10}{\rho} \sin \frac{\phi}{4} \right) d\rho \, d\phi \, dz = -50 \ln 2$$

روش دوم استفاده از قانون گوس است. $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ تنها روی سطح $\phi = 0$ مقدار دارد. روی این سطح $d\mathbf{s} = d\rho \, dz \, (-\hat{\phi})$

$$Q = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^{2/5} \int_1^2 \frac{20}{\rho} d\rho \, dz = -50 \ln 2$$

۲۹-۲ توزیع باری به صورت $\rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ در $r < a$ و $\rho = 0$ در $r > a$ داده شده است. شدت میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گوس به دست آورید.

۲۹-۲ به خاطر تقارن بار میدان مولفه‌ای در جهت ϕ یا θ ندارد. سطح گوس را کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم.

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dv$$

چون E روی تمام سطح کره بر آن عمودست و مقدار ثابتی دارد، انتگرال سمت چپ حاصلضرب مساحت کره در مقدار شدت میدان است. اگر شعاع کره کوچکتر از a باشد

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^r \left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right) r'^2 \, dr' \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{5 a^2} r^5 \right] \Big|_0^r = \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5 a^2} \right) \\ E &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5 a^2} \right) \end{aligned}$$

اگر شعاع کره بزرگتر از a باشد $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ تغییری نمی‌کند، ولی چون تنها تا شعاع $r = a$ بار داریم، در $\int \rho \, dv$ بین 0 تا a است و

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r^2} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5} \right) = \frac{2\rho_0 a^3}{15 \epsilon_0 r^2}$$

۱. کره‌ای به شعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی حجمی $\rho = \frac{\rho_0}{r}$ می‌باشد در اینصورت میدان الکتریکی در داخل کره کدام است؟

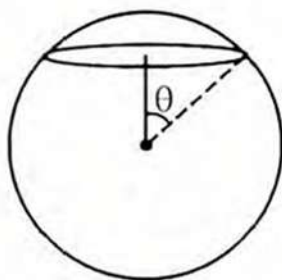
(۱) بی نهایت $\frac{\rho_0}{2\epsilon_0}$ (۲) $\frac{\rho_0}{2\epsilon_0}$ (۳) صفر (۴) $\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}$

۱. گزینه (۲) از قانون گوس استفاده می‌کنیم

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \rho dv \rightarrow D(4\pi r^2) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_0}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = \int_0^r \rho_0 4\pi r dr$$

$$D(4\pi r^2) = 4\pi \rho_0 \frac{1}{2} r^2 \rightarrow D = \frac{\rho_0}{2} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \hat{a}_r$$

۴. روی کره‌ای که در مرکز آن بار الکتریکی 1^C قرار دارد و شعاع آن 2^m است یک حلقه بشعاع 1^m قرار می‌دهیم شار الکتریکی خارج شونده از حلقه کدام است؟



(۱) 0.45 (۲) 0.85
(۳) 0.14 (۴) 0.75

۴. گزینه (۴) $\Psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q}{4\pi r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{2} (1 - \cos\frac{\pi}{2})$

با توجه به ابعاد داده شده زاویه θ برابر $\frac{\pi}{2}$ است
 $\Psi = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3}) \simeq 0.75$

پتانسیل الکتریکی

۱۷. یک عرقچین کروی به شعاع R و زاویه θ_0 دارای بار الکتریکی با چگالی ρ_s و توزیع سطحی یکنواخت است. نشان دهید که پتانسیل در نقطه‌ای روی محور عرقچین و به فاصله r از مرکز آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V(r) = \frac{\rho_s R}{\epsilon_0 r} \left[(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta_0)^{1/2} - |r - R| \right]$$

۱۷. با توجه به شکل پ-۱۱ پتانسیل در نقطه A برابر است با:

$$V(r) = \int_S \frac{\rho_s dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{a}}_z, \quad \mathbf{r}' = R \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta')^{1/2} = AB$$

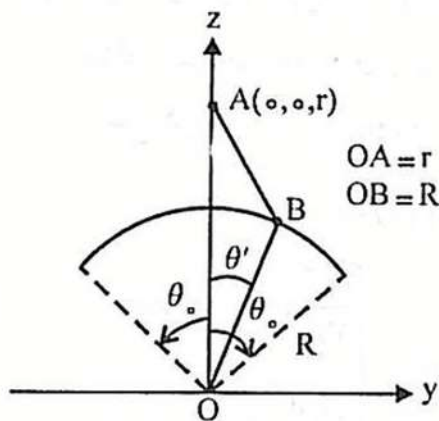
$$V(0,0,r) = \int_S \frac{\rho_s R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta')^{1/2}}$$

با استفاده از $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{a + b \cos x}} = -\frac{1}{b} \sqrt{a + b \cos x}$ داریم:

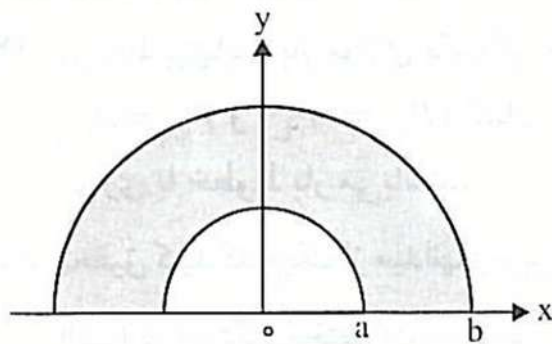
$$V(0,0,r) = \frac{\rho_s R^2}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}}$$

$$= \frac{\rho_s R^2}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{Rr} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'} \right]_0^{\theta_0}$$

$$= \frac{\rho_s R}{\epsilon_0 r} \left[\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta_0} - |R - r| \right]$$



شکل پ-۱۱



شکل ۳۱-۲

۱۸. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_s روی سطحی محصور بین دو نیم‌دایره به شعاعهای a و b ، مطابق شکل ۳۱-۲، توزیع شده است. پتانسیل را در مبدأ مختصات به دست آورید. توزیع بار در صفحه xy فرض می‌شود.

$$r = 0, \quad r' = r' \hat{a}_r, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r', \quad dS' = r' dr' d\varphi' \quad ۱۸$$

$$V = \int_S \frac{\rho_s dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_{r'=a}^b \int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{\rho_s r' dr' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 r'} \\ = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b dr' \int_0^{\pi} d\varphi' = \frac{\rho_s (b-a)}{4\epsilon_0}$$

۱۹. برای توزیع بار الکتریکی مسئله ۱۰، پتانسیل را در مبدأ مختصات محاسبه کنید. بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی ρ_s روی $\frac{1}{4}$ سطح کره‌ای به شعاع a ، که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود، توزیع شده است. فرض کنید توزیع بار در ناحیه‌ای از فضا باشد که $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ است.

$$V(0,0,0) = \int_S \frac{\rho_s dS'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad ۱۹$$

$$r = 0, \quad r' = a \hat{a}_r, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a, \quad dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

$$V(0,0,0) = \frac{\rho_s a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta' d\theta' \int_0^{\pi/2} d\varphi' = \frac{\rho_s a}{8\epsilon_0}$$

۲۰. بار الکتریکی با چگالی ρ به طور یکنواخت در کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه پتانسیل حاصل از این توزیع بار در تمام نقاط فضا به دو روش زیر:

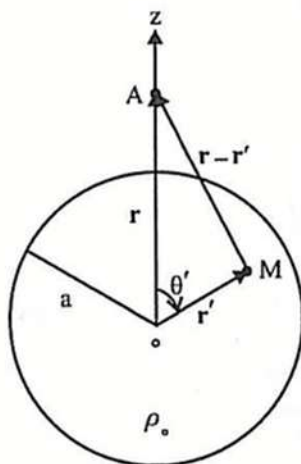
(الف) محاسبه میدان الکتریکی E (مثلاً با استفاده از قانون گوس) و به کار بردن رابطه ۲-۸۶،
(ب) مستقیماً با استفاده از رابطه ۲-۹۳.

۲۰. الف) میدان الکتریکی E را با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم. روشن است که E فقط مؤلفه شعاعی داشته و این مؤلفه فقط تابعی از r می‌باشد، زیرا توزیع بار مستقل از θ و φ است. سطح گوسی S را به صورت کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (S \text{ بار محصور در } S), \quad \mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r(r) (4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) & r < a \\ \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) & r > a \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_r & r < a \\ \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & r > a \end{cases}$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \begin{cases} - \int_{\infty}^r \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r'^2} dr' & r > a \\ - \int_{\infty}^a \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r'^2} dr' - \int_a^r \frac{\rho \cdot r'}{3\epsilon_0} dr' & r < a \end{cases} = \begin{cases} \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{\rho \cdot (3a^3 - r^3)}{6\epsilon_0} & r < a \end{cases}$$



شکل پ-۱۲

(ب) بدیهی است که به دلیل تقارن کروی توزیع بار، پتانسیل تابعی از θ و φ نخواهد بود. بنابراین، اگر ضمن محاسبه پتانسیل مقدار معینی برای θ ، مثلاً $\theta = 0$ ، در نظر بگیریم به عمومیت مسئله هیچ لطمه‌ای وارد نمی‌آید. پتانسیل نقطه A روی محور z (به منزله یک نقطه عام)، مطابق شکل پ-۱۲، را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$V(r) = \int_V \frac{\rho \cdot dV'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}| = MA = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}$$

$$V(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}} \right] r'^2 dr'$$

اما:

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}} = \left[\frac{1}{rr'} (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2} \right]_0^\pi = \frac{1}{rr'} [(r+r') - |r-r'|]$$

برای $r > a$ ، همواره $r' < r$ بوده و $|r - r'| = r - r'$ ، بنابراین:

$$V(r) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_s r} \int_0^a r' [(r + r') - (r - r')] dr' = \frac{\rho_s}{2\epsilon_s r} \int_0^a r'^2 dr' = \frac{\rho_s a^3}{3\epsilon_s r}$$

برای $r < a$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$V(r) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_s r} \left[\int_0^r r' [(r + r') - (r - r')] dr' + \int_r^a r' [(r + r') - (r' - r)] dr' \right]$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_s r} \left[\int_0^r r'^2 dr' + \int_r^a r r' dr' \right] = \frac{\rho_s}{2\epsilon_s} \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right)$$

به طور خلاصه،

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_s a^3}{3\epsilon_s r} & r > a \\ \frac{\rho_s (3a^2 - r^2)}{6\epsilon_s} & r < a \end{cases}$$

۲۱. پتانسیل ناشی از توزیعهای بار الکتریکی در مسائل ۱۱، ۱۳ و ۱۴ را به دست آورید. اگر بینهایت را بتوان به عنوان نقطه مبنا در نظر گرفت، نقطه مبنا مناسبی را خود انتخاب کنید (پتانسیل نقطه مبنا صفر فرض می‌شود).

راهنمایی: چون میدان الکتریکی برای این توزیعها قبلاً محاسبه شده است، از رابطه ۲-۸۶ برای تعیین پتانسیل استفاده کنید.

۲۱. برای بند (الف) مسئله ۱۱ داریم:

$$E = \begin{cases} -\frac{\rho_s}{\epsilon_s} \hat{a}_z & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases}, \quad V = \int_z^\infty E \cdot dL, \quad E = E_z \hat{a}_z, \quad dL = dz \hat{a}_z$$

$$V = \int_z^\infty E_z dz = \begin{cases} \int_z^\infty (0) dz = 0 & z > a \\ 0 + \int_z^a -\frac{\rho_s}{\epsilon_s} dz = -\frac{\rho_s}{\epsilon_s} (z - a) & a > z > -a \\ \int_{-a}^a -\frac{\rho_s}{\epsilon_s} dz + \int_{-\infty}^{-a} (0) dz = -\frac{2\rho_s a}{\epsilon_s} & -a > z \end{cases}$$

برای بند (ب) مسئله ۱۱، نمی‌توان ∞ را به عنوان مبنا در نظر گرفت، زیرا تابع پتانسیل نامحدود می‌شود. از این رو $z=0$ را به عنوان مبنا انتخاب می‌کنیم.

$$E = \begin{cases} \frac{a^2}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z > a \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) \hat{a}_z & a > z > 0 \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left(az + \frac{z^2}{2} \right) \hat{a}_z & 0 > z > -a \end{cases}$$

برای $z > 0$ داریم:

$$V = \begin{cases} \int_z^0 \frac{1}{\epsilon_0} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) dz = -\frac{z^2}{2\epsilon_0} \left(a - \frac{z}{2} \right) & 0 < z < a \\ \int_z^a \frac{a^2}{2\epsilon_0} dz + \int_a^0 \frac{1}{\epsilon_0} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{a^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} - z \right) & z > a \end{cases}$$

برای $z < 0$ داریم:

$$V = \begin{cases} \int_z^0 \frac{1}{\epsilon_0} \left(az + \frac{z^2}{2} \right) dz = -\frac{z^2}{2\epsilon_0} \left(a + \frac{z}{2} \right) & -a < z < 0 \\ \int_z^{-a} \frac{-a^2}{2\epsilon_0} dz + \int_{-a}^0 \frac{1}{\epsilon_0} \left(az + \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{a^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} + z \right) & z < -a \end{cases}$$

به طور خلاصه:

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{z^2}{2\epsilon_0} \left(a - \frac{|z|}{2} \right) & |z| < a \\ \frac{a^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} - |z| \right) & |z| > a \end{cases}$$

برای بند (الف) مسئله ۱۳ داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \hat{a}_r & a < r < b \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

در این مسئله نیز نمی‌توان ∞ را به عنوان مبنا در نظر گرفت. برای سادگی $r=0$ را به منزله مبنا در نظر می‌گیریم.

$$E = E_r \hat{a}_r, \quad dL = dr \hat{a}_r, \quad E \cdot dL = E_r dr$$

$$V = \begin{cases} \int_r^0 (.) dr = 0 & r \leq a \\ 0 + \int_r^a \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0} \frac{a}{r} dr = \frac{\rho_{S_0} a}{\epsilon_0} (\ln a - \ln r) = \frac{\rho_{S_0} a}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{r} & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho_{S_0} a}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{b} + \int_\infty^b 0 \cdot dr = \frac{\rho_{S_0} a}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{b} & r \geq b \end{cases}$$

در بند (ب) مسئله ۱۳ داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_s \cdot r^\gamma}{\gamma \epsilon_s a} \hat{a}_r & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s r} \hat{a}_r & r \geq a \end{cases}$$

همانند حالت قبل مبنا را در $r=0$ فرض می‌کنیم.

$$V = \begin{cases} \int_r^0 \frac{\rho_s \cdot r^\gamma}{\gamma \epsilon_s a} dr = -\frac{\rho_s \cdot r^\gamma}{\gamma \epsilon_s a} & 0 \leq r \leq a \\ \int_a^0 \frac{\rho_s \cdot r^\gamma}{\gamma \epsilon_s a} dr + \int_r^a \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s r} dr = -\frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s} \left(\frac{1}{\gamma} - \ln \frac{a}{r} \right) & r \geq a \end{cases}$$

برای مسئله ۱۴، انتخاب ∞ به عنوان مبنا اشکالی ندارد. برای بند (الف) داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\epsilon_s \cdot r^\gamma} \hat{a}_r & a < r < b \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

$$E \cdot dL = (E_r \hat{a}_r) \cdot (dr \hat{a}_r) = E_r dr$$

$$V = \begin{cases} \int_r^\infty (\cdot) dr = \cdot & r \geq b \\ \cdot + \int_r^b \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\epsilon_s \cdot r^\gamma} dr = \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\epsilon_s} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\epsilon_s} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \int_r^a \cdot dr = \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\epsilon_s} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & r \leq a \end{cases}$$

برای بند (ب) مساله ۱۴ داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_s}{\epsilon_s} \left(\frac{r}{\gamma} - \frac{r^\gamma}{\gamma a^\gamma} \right) \hat{a}_r & r < a \\ \frac{\gamma \rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s \cdot r^\gamma} \hat{a}_r & r > a \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \int_r^\infty \frac{\gamma \rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s \cdot r^\gamma} dr = \frac{\gamma \rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s \cdot r} & r \geq a \\ \frac{\gamma \rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s \cdot a} + \int_r^a \frac{\rho_s}{\epsilon_s} \left(\frac{r}{\gamma} - \frac{r^\gamma}{\gamma a^\gamma} \right) dr = \frac{\rho_s \cdot a^\gamma}{\gamma \epsilon_s} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{r^\gamma}{a^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{r^\gamma}{a^\gamma} \right) & r \leq a \end{cases}$$

۲۲. توزیع بار الکتریکی را در شکل ۲-۲۹ مجدداً در نظر بگیرید.

الف) پتانسیل را در نقطه‌ای روی محور z برای توزیع مذکور به دست آورید.

ب) پتانسیل را برای حالت $\varphi_0 = 2\pi$ تعیین کنید و سپس با استفاده از رابطه $E = -\nabla V$ میدان الکتریکی را محاسبه کنید. نتیجه باید همانند رابطه ۲-۲۸ باشد.

ج) میدان الکتریکی را برای حالت کلی، یعنی وقتی که φ_0 مقدار دلخواهی دارد، مجدداً از رابطه $E = -\nabla V$ به دست آورید. ملاحظه می‌کنید که مقدار حاصل با مقداری که در مسئله ۷ به دست آمده است یکسان نیست. علت تناقض چیست و چگونه می‌توان آن را برطرف کرد؟

ب) برای $\varphi_0 = 2\pi$ ، داریم:

$$V = \frac{\rho_L R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \Rightarrow E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z = \frac{\rho_L R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z = -\frac{d}{dz} \left[\frac{\rho_L R \varphi_0}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{a}_z = \frac{\rho_L R \varphi_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{a}_z \quad (ج)$$

$$\neq \frac{\rho_L R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} [-R \sin \varphi_0 \hat{a}_x + R (\cos \varphi_0 - 1) \hat{a}_y + z \varphi_0 \hat{a}_z]$$

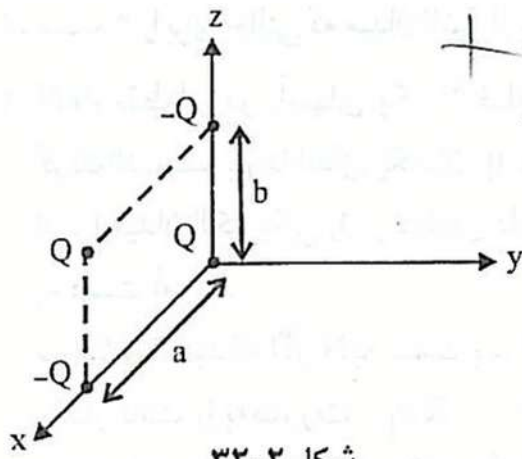
همان طور که ملاحظه می‌شود فقط مؤلفه z به درستی به دست آمده است و مؤلفه‌های x و y با روش مزبور برابر صفر شده‌اند. علت تناقض این است که معمولاً،

$$E(0, 0, z) = -\nabla V(x, y, z) \Big|_{x=y=0} \neq -\nabla V(0, 0, z)$$

البته در حالت خاص $\varphi_0 = 2\pi$ این تناقض ظاهر نمی‌شود. برای رفع این تناقض باید V را در یک نقطه دلخواه به مختصات (x, y, z) محاسبه کرد و سپس گرادیان آن را استخراج نمود و آنگاه مقادیر مورد نظر را جایگزین کرد.

۳۳. برای چهارقطبی نشان داده شده در شکل ۳۲-۲ تحقیق

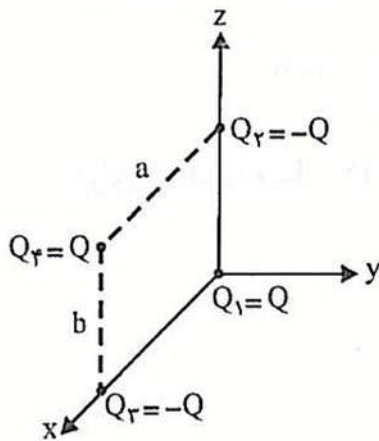
کنید که تابع پتانسیل در نقاط دور ($r \gg b$ و $r \gg a$) از رابطه زیر به دست می آید:



شکل ۳۲-۲

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{\gamma abQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

۳۳. با استفاده از رابطه ۹۷-۲ و شکل پ-۱۳ داریم:



شکل پ-۱۳

$$V(r) = \frac{\sum_{j=1}^4 Q_j}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum_{j=1}^4 Q_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\sum_{j=1}^4 Q_j [\gamma(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_j)^2 - (r r'_j)^2]}{8\pi\epsilon_0 r^5} + \dots$$

$$\begin{cases} Q_1 = Q \\ \mathbf{r}'_1 = \mathbf{0} \end{cases}, \begin{cases} Q_2 = -Q \\ \mathbf{r}'_2 = b \hat{\mathbf{a}}_z \end{cases}, \begin{cases} Q_3 = -Q \\ \mathbf{r}'_3 = a \hat{\mathbf{a}}_x \end{cases}, \begin{cases} Q_4 = Q \\ \mathbf{r}'_4 = a \hat{\mathbf{a}}_x + b \hat{\mathbf{a}}_z \end{cases}$$

$$K_1 = \sum_{j=1}^4 Q_j = Q - Q - Q + Q = 0$$

$$K_2 = \sum_{j=1}^4 Q_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_j = Q \mathbf{0} \cdot \mathbf{r} - Q \mathbf{r} \cdot b \hat{\mathbf{a}}_z - Q \mathbf{r} \cdot a \hat{\mathbf{a}}_x + Q \mathbf{r} \cdot (a \hat{\mathbf{a}}_x + b \hat{\mathbf{a}}_z) = 0$$

$$K_3 = \sum_{j=1}^4 Q_j [\gamma(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_j)^2 - (r r'_j)^2]$$

$$= Q [\gamma(\mathbf{r} \cdot \mathbf{0})^2 - (r \cdot 0)^2] - Q [\gamma(\mathbf{r} \cdot b \hat{\mathbf{a}}_z)^2 - (r b)^2]$$

$$- Q [\gamma(\mathbf{r} \cdot a \hat{\mathbf{a}}_x)^2 - (r a)^2] + Q [\gamma(\mathbf{r} \cdot (a \hat{\mathbf{a}}_x + b \hat{\mathbf{a}}_z))^2 - (r \sqrt{a^2 + b^2})^2]$$

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = r \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = r \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = r \cos \theta$$

بنابراین:

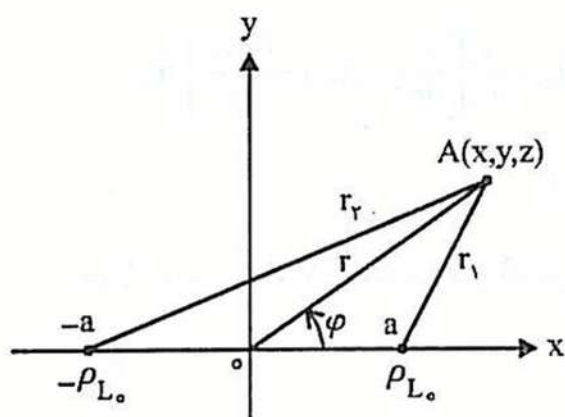
$$K_3 = -Q (r b)^2 [\gamma \cos^2 \theta - 1] - Q (r a)^2 [\gamma \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1]$$

$$+ Q [\gamma r^2 (a \sin \theta \cos \varphi + b \cos \theta)^2 - r^2 (a^2 + b^2)]$$

$$= 6 ab Q r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

$$V(r) = \frac{K_3}{8\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{\gamma abQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \quad r \gg a, \quad r \gg b$$

۲۴. دو خط بینهایت بار موازی یکدیگر بوده و دارای چگالیهای توزیع مساوی و ناهمنام هستند (یعنی $\rho_{L_1} = \rho_{L_2}$ و $\rho_{L_1} = -\rho_{L_2}$). نشان دهید که سطوح همپتانسیل به صورت سطوح استوانه‌ای شکل موازی با خطوط بار می‌باشند.



شکل پ-۱۴

۲۴. دو خط بار را در $x = a, y = 0$ و $x = -a, y = 0$ مطابق شکل پ-۱۴ در نظر می‌گیریم. پتانسیل خط بار ∞ با چگالی ثابت از رابطه ۲-۱۰ به دست می‌آید. با انتخاب مبنای پتانسیل مشترک $r_1 = r_2 = a$ برای هر خط بار (در واقع محور z مبنای مورد نظر با پتانسیل صفر است) پتانسیل کل حاصل از هر خط بار عبارت است از:

$$V = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{a} + \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{a} = \frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

روی سطوح همپتانسیل، $V = k$ است، که k مقدار ثابتی است، بنابراین:

$$\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = k \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = k', \quad k' = \exp(2\pi\epsilon_0 k / \rho_{L_0})$$

اما:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = k' \Rightarrow \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = k'$$

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k'^2 \Rightarrow \left(x - \frac{k'^2 + 1}{k'^2 - 1} a \right)^2 + y^2 = \frac{4k'^2 a^2}{(k'^2 - 1)^2}$$

که معادله یک دسته سطوح استوانه‌ای به شعاع $\left| \frac{2k' a}{k'^2 - 1} \right|$ و به محوری واقع در $y = 0$ و $x = \frac{k'^2 + 1}{k'^2 - 1} a$ است.

۲۶. توزیع بار الکتریکی (ρ_V) را که منجر به تولید هر یک از پتانسیلهای الکتریکی زیر گردیده است به دست آورید:

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی :

$$V = V_0 e^{-y} \sin y \sinh x$$

ب) در دستگاه مختصات کروی :

$$V = V_0 \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^2}$$

۲۶. الف) $V = V_0 e^{-y} \sin y \sinh x$

$$\rho_V = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \epsilon_0 \nabla \cdot (-\nabla V) = -\epsilon_0 \nabla^2 V$$

$$= -\epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_0 e^{-y} \sin y \cosh x \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_0 e^{-y} \sin y \sinh x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = V_0 \sinh x e^{-y} (\cos y - \sin y) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_0 \sinh x (-2e^{-y} \cos y)$$

$$\rho_V = -\epsilon_0 [V_0 e^{-y} \sin y \sinh x - 2V_0 e^{-y} \cos y \sinh x]$$

$$\rho_V = V_0 \epsilon_0 \sinh x e^{-y} (2 \cos y - \sin y)$$

ب) می توان نشان داد که برای این تابع پتانسیل مقدار $\nabla^2 V$ همواره برابر صفر است، مگر در $r=0$ که پتانسیل تعریف نشده است. بنابراین، توزیع بار، هر چه که باشد، در مبدأ مختصات قرار دارد. برای اینکه به ماهیت این توزیع بار پی ببریم کافی است توجه کنیم که $\sin \theta \cos \varphi$ را می توان نتیجه ضرب داخلی $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_x$ دانست:

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = (\sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_x = \sin \theta \cos \varphi$$

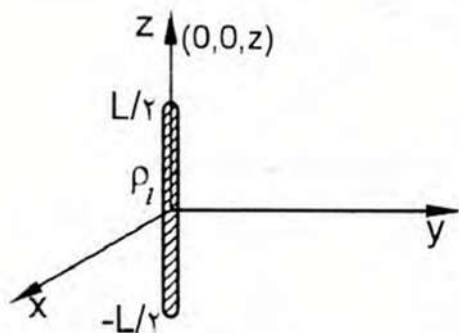
بنابراین:

$$V = V_0 \frac{\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x}{r^2} = \frac{V_0 \mathbf{r} \cdot \hat{a}_x}{r^3} = \frac{(V_0 \hat{a}_x) \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

با مراجعه به رابطه ۲-۹۹، می دانیم که $V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ پتانسیل یک دو قطبی با گشتاور $\mathbf{p}$ است.

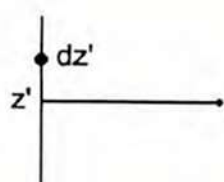
مقایسه این تابع با نتیجه بالا نشان می دهد که پتانسیل $V = \frac{V_0 \hat{a}_x \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ باید از یک دو قطبی با گشتاور $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 V_0 \hat{a}_x$ حاصل شده باشد.

۳. پتانسیل الکتریکی بر روی محور Z در نقطه‌ای (Z و ۰ و ۰) وقتی $Z > \frac{L}{2}$ است برای یک توزیع بار الکتریکی خطی یکنواخت بطول L و چگالی بار ρ_l شکل زیر کدام است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z - \frac{L}{2}}{z + \frac{L}{2}} \\ (2) \quad & \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - \frac{L}{2}}{z + \frac{L}{2}} \\ (3) \quad & \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{z - \frac{L}{2}} \right] \\ (4) \quad & \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \frac{L}{2}}{z - \frac{L}{2}} \end{aligned}$$

۳. گزینه (۴) با توجه به تعریف پتانسیل و شکل مقابل داریم.



$$V = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 (z - z')} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln [z - z'] \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \frac{L}{2}}{z - \frac{L}{2}}$$

۱۲. یک پوسته کروی بشعاع داخلی a و شعاع خارجی ۲a دارای بار الکتریکی به چگالی حجمی $\rho = \rho_0 \frac{1}{r^2 a}$ می‌باشد بار

نقطه‌ای Q در مرکز پوسته قرار می‌دهیم اگر پتانسیل در خارج پوسته ثابت باشد در اینصورت Q چقدر باید باشد.

$$\begin{aligned} (1) \quad & Q = -2\pi\rho_0 \\ (2) \quad & Q = -4\pi\rho_0 \\ (3) \quad & Q = 0 \\ (4) \quad & Q = \frac{-\rho_0}{\pi} \end{aligned}$$

۱۲. گزینه (۲) اگر بخواهیم پتانسیل در $r > 2a$ ثابت باشد باید میدان در $r > 2a$ صفر باشد و چون میدان شعاعی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[Q + \int_a^{2a} \rho_0 \frac{1}{r^2 a} 4\pi r^2 dr \right] = 0$$

$$\Rightarrow Q + \rho_0 4\pi \frac{\pi}{a} (2a - a) = 0 \rightarrow Q = -4\pi\rho_0$$

۳۸-۲ بار خطی $\lambda = 10 \pi \epsilon_0 \text{ C/m}$ در امتداد محور x و بار نقطه‌ای $Q = 40 \pi \epsilon_0 \text{ C}$ در نقطه $(2, -4, -1)$ در فضای آزاد قرار دارند. نقاط $A(1, -1, 2)$ ، $B(4, 0, 5)$ و $C(-2, -5, 3)$ را در نظر گرفته V_{AB} و V_C (به ازای $V_B = 0$ و به ازای $V_A = 20 \text{ V}$) را بیابید.

۳۸-۲ بارها در تولید پتانسیل به صورت مستقل عمل می‌کنند. پس

$$V_{AB} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A} + \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

که در آن r_A و r_B فاصله نقاط A و B تا محل بار نقطه‌ای و ρ_A و ρ_B فاصله شعاعی تا بار خطی است.

$$V_{AB} = \frac{10 \pi \epsilon_0}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{40 \pi \epsilon_0}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+25+9}} - \frac{1}{\sqrt{4+16+36}} \right) = 4 / 38 \text{ V}$$

در قسمت دوم داریم

$$V_C = V_{CB} = 5 \ln \frac{\rho_B}{\rho_C} + 10 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right)$$

$$= 5 \ln \frac{5}{\sqrt{34}} + 10 \left(\frac{1}{\sqrt{113}} - \frac{1}{\sqrt{56}} \right) = -1 / 164 \text{ V}$$

و در قسمت سوم

$$V_C = V_{CA} + V_A = 20 + 5 \ln \frac{\rho_A}{\rho_C} + 10 \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= 20 + 5 \ln \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{34}} + 10 \left(\frac{1}{\sqrt{113}} - \frac{1}{\sqrt{35}} \right) = 14 / 46 \text{ V}$$

۳۹-۲ میدان الکتریکی زیر در فضای آزاد داده شده است

$$\mathbf{E} = 50 z \sin \phi \hat{\rho} + 50 z \cos \phi \hat{\phi} + 50 \rho \sin \phi \hat{z}$$

و در مبدا مختصات $V = 0$. پتانسیل را در نقطه $(2, 150^\circ, 3)$ دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

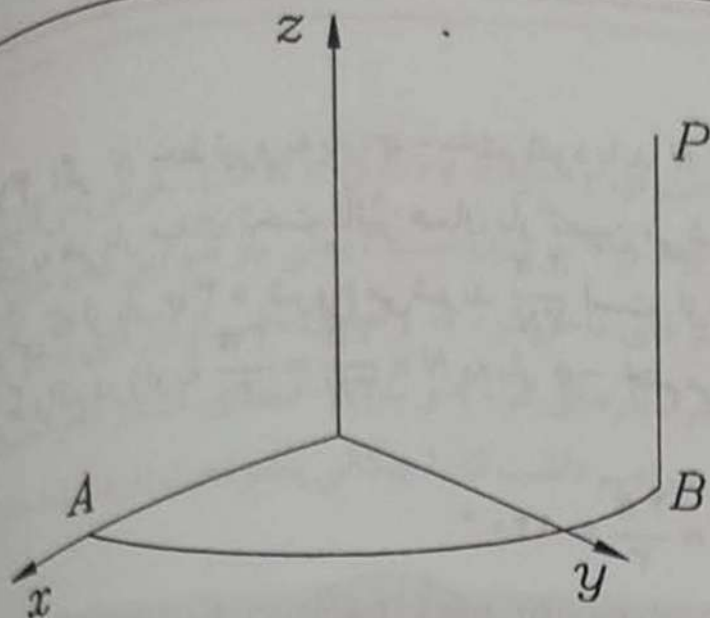
$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \text{ داریم و در دستگاه مختصات استوانه‌ای}$$

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

پس

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 50 z \sin \phi dr + 50 z \rho \cos \phi d\phi + 50 \rho \sin \phi dz$$

برای سهولت مسیری به شرح زیر برمی‌گزینیم. ابتدا از مبدا، روی خط $\phi = 0$ ، $z = 0$ به $\rho = 2$ می‌رویم (نقطه A)، سپس روی مسیر $\rho = 2$ ، $z = 0$ به نقطه $\phi = 150^\circ$ می‌رویم (نقطه B) و سرانجام روی مسیر $\rho = 2$ ، $\phi = 150^\circ$ به (نقطه C) می‌رویم. در بخش اول مسیر z ثابت و برابر صفر و نیز ϕ ثابت و برابر صفر است. پس $dz = 0$ ، $d\phi = 0$ و $\int_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. در بخش دوم مسیر ρ ثابت و برابر ۲ است، همچنین z ثابت و برابر صفر است. پس $d\rho = 0$ ، $dz = 0$ و $\int_2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. در بخش سوم مسیر ϕ ثابت و برابر 150° است، پس $d\rho = 0$ و $d\phi = 0$



شکل ح ۲-۳۹

$$-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^3 50 \rho \sin \phi \, dz = - 50 \int_0^3 dz = - 150 \, \text{V}$$

۴۱-۲ یک میدان الکتریکی در مختصات کروی به صورت $\mathbf{E} = \frac{\gamma r}{(r^2 + a^2)^2} \hat{\mathbf{r}}$ داده شده است. میدان پتانسیل را در تمام فضا بیابید اگر؛ (الف) پتانسیل در مبدا برابر صفر باشد؛ (ب) پتانسیل در $r = a$ برابر $100 \, \text{V}$ باشد.

۴۱-۲ در دستگاه مختصات کروی $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r \sin \theta \, d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + r \, d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ پس $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\gamma r}{(r^2 + a^2)^2} dr$ و برای حالت الف

$$V = - \int_0^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{r^2 + a^2} \Big|_0^r = \frac{1}{r^2 + a^2} - \frac{1}{a^2}$$

برای حالت ب

$$V = - \int_a^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + 100 = \frac{1}{r^2 + a^2} \Big|_a^r + 100 = \frac{1}{r^2 + a^2} - \frac{1}{a^2} + 100$$

۴۳-۲ داخل استوانه‌ای به طول بینهایت و شعاع a باری با توزیع یکنواخت ρ C/m^۲ وجود دارد. اگر پتانسیل محور استوانه V_0 باشد، پتانسیل نقاط داخل و خارج استوانه را بیابید.

۴۳-۲ ابتدا با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی داخل و خارج استوانه را می‌یابیم

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 a^2}{\gamma \epsilon_0 \rho} \quad \rho > a$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 \rho}{\gamma \epsilon_0} \quad \rho < a$$

برای نقاط داخل استوانه

$$V - V_0 = - \int_0^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\rho_0}{\gamma \epsilon_0} \int_0^r \rho \, d\rho = - \frac{\rho_0}{2 \epsilon_0} \rho^2$$

$$V = V_s - \frac{\rho_s}{4\epsilon_s} \rho^2 \quad \rho < a$$

در سطح استوانه پتانسیل برابرست با

$$V(a) = V_s - \frac{\rho_s a^2}{4\epsilon_s}$$

در خارج استوانه

$$V - V(a) = - \int_a^\rho \frac{\rho_s a^2}{4\epsilon_s \rho} d\rho = - \frac{\rho_s a^2}{4\epsilon_s} \ln \frac{\rho}{a}$$

$$V = V_s - \frac{\rho_s a^2}{4\epsilon_s} - \frac{\rho_s a^2}{4\epsilon_s} \ln \frac{\rho}{a}$$

۵۳-۲ سطح $x^2 + y^2 + z = 1000$ یک سطح همپتانسیل است. اگر در نقطه $P(7, 25, 32)$ داشت باشیم E را در P بیابید. $|E| = 50 \text{ V/m}$

۵۳-۲ نقطه P روی سطح همپتانسیل قرار دارد. برای یافتن جهت میدان، بردار عمود بر سطح همپتانسیل را در نقطه P می یابیم

$$\mathbf{N} = \nabla (x^2 + y^2 + z - 1000) = 147\hat{x} + 50\hat{y} + \hat{z}$$

برداریکه ای که جهت میدان را تعیین می کند عبارت است از $\hat{e} = \pm \mathbf{N} / |\mathbf{N}|$ و

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}| \hat{e} = \pm 50 \frac{147\hat{x} + 50\hat{y} + \hat{z}}{(147^2 + 50^2 + 1)^{1/2}} = \pm (47/3\hat{x} + 16/1\hat{y} + 0/32\hat{z})$$

۵۴-۲ در فضای آزاد میدان پتانسیل $V = 100 r^3 \sin \theta \text{ V}$ داده شده است. ρ و $\mathbf{E}$ (چگالی بار) را به دست آورید.

۵۴-۲ $\mathbf{E}$ منفی گرادیان V است

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -300 r^2 \sin \theta \hat{r} - 100 r^3 \cos \theta \hat{\theta}$$

ρ دیورژانس $\mathbf{E}$ است

$$\rho = \epsilon_s \nabla \cdot \mathbf{E} = -100 \epsilon_s r \left(\frac{1}{\sin \theta} + 10 \sin \theta \right)$$

کرل میدان الکتریکی در شرایط ساکن

۲۵. تحقیق کنید کدام یک از میدانهای زیر شرایط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا می باشد :

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی : $A = \frac{1}{y} \hat{a}_x - \frac{x}{y^2} \hat{a}_y$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $B = \frac{1}{r} \hat{a}_\varphi$

ج) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $C = \frac{1}{r^2} (\cos \varphi \hat{a}_r + \sin \varphi \hat{a}_\varphi)$

د) در دستگاه مختصات کروی : $D = \left(\varphi + \frac{\varphi}{r^2} \right) \cos \theta \hat{a}_r - \left(\varphi - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \hat{a}_\theta$

۲۵. الف) $A = \frac{1}{y^2} \left(y \hat{a}_x - \frac{x}{y} \hat{a}_y \right)$

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z \\ &= (0-0) \hat{a}_x + (0-0) \hat{a}_y + \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right) \hat{a}_z \neq 0 \end{aligned}$$

چون $\nabla \times A \neq 0$ است، بردار A نمی تواند بیانگر میدان الکتریکی ساکن باشد.

ب) $B = \frac{1}{r} \hat{a}_\varphi$

$$\begin{aligned} \nabla \times B &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{a}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{a}_z \\ &= (0-0) \hat{a}_r + (0-0) \hat{a}_\varphi + \frac{1}{r} (0-0) \hat{a}_z = 0 \end{aligned}$$

چون $\nabla \times B = 0$ است، بردار B می تواند بیان کننده یک میدان الکتریکی ساکن باشد.

ج) $C = \frac{1}{r^2} (\cos \varphi \hat{a}_r + \sin \varphi \hat{a}_\varphi)$

$$\nabla \times C = (0) \hat{a}_r + (0) \hat{a}_\varphi + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \sin \varphi + \frac{1}{r^2} \sin \varphi \right) \hat{a}_z = 0$$

چون $\nabla \times C = 0$ است، بردار C می تواند بیانگر یک میدان الکتریکی ساکن باشد.

د) $D = \left(\varphi + \frac{\varphi}{r^2} \right) \cos \theta \hat{a}_r - \left(\varphi - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta \hat{a}_\theta$

$$\begin{aligned} \nabla \times D &= (0) \hat{a}_r + (0) \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_\varphi \\ &= \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\varphi + \frac{\varphi}{r^2} \right) \cos \theta \right) \right] \hat{a}_\varphi \\ &= \frac{1}{r} \left[- \left(\varphi + \frac{\varphi}{r^2} \right) \sin \theta + \left(\varphi + \frac{\varphi}{r^2} \right) \sin \theta \right] \hat{a}_\varphi = 0 \end{aligned}$$

چون $\nabla \times D = 0$ است، بردار D شرط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا است.