

فصل اول: آنالیز برداری

سوالهای آنالیز برداری

مثال ۱: زاویه بین دو بردار $\vec{A} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ و $\vec{B} = 3\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه (۱۱-۱) داریم.

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{(2 \times 3 - 3 \times -2 + 4 \times 4)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \cos^{-1} \frac{28}{29} = 15/1^\circ$$

مثال ۲: ثابت کنید دو بردار $\vec{A} = 3\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $\vec{B} = 2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ بر هم عمودند.

حل: با استفاده از رابطه (۱۱-۱) داریم:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{3 \times 2 - 4 \times 2 + 1 \times 2}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

مثال ۳: ثابت کنید دو بردار $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $\vec{B} = \hat{a}_x + 1/5\hat{a}_y + 0/5\hat{a}_z$ با هم موازیند

حل: با استفاده از رابطه (۱۱-۱) داریم

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{2 \times 1 + 3 \times 1/5 + 1 \times 0/5}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1/5^2 + 0/5^2}} = \cos^{-1} \frac{7}{7} = \cos^{-1} 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

مثال ۴: دو نقطه $P(۳,۰,۴)$ و $Q(۶,۱۲,۵)$ در مختصات استوانه‌ای داده شده مطلوب است اولاً فاصله بین دو نقطه
ثانیاً رابطه بردار $\overline{PQ}$

حل: مختصات P و Q را در دستگاه قائم بصورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_P = R \cos \phi = ۳ \cos ۰ = ۳ \\ y_P = R \sin \phi = ۳ \sin ۰ = ۰ \\ z_P = ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x_Q = R \cos \phi = ۶ \cos ۱۲۰ = -۳ \\ y_Q = R \sin \phi = ۶ \sin ۱۲۰ = ۳\sqrt{۳} \\ z_Q = ۵ \end{cases}$$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} = \sqrt{(-۳-۳)^2 + (۰-۳\sqrt{۳})^2 + (۵-۴)^2} = ۸$$

$$\overline{PQ} = (x_Q - x_P) \hat{a}_x + (y_Q - y_P) \hat{a}_y + (z_Q - z_P) \hat{a}_z = -۶ \hat{a}_x + ۳\sqrt{۳} \hat{a}_y + \hat{a}_z$$

مثال ۵: بردار $\overline{A} = \frac{۱۰}{r} \hat{a}_r$ در مختصات کروی داده شده است مقدار این بردار را در نقطه $P(-۳,۴,۱۰)$
(مختصات قائم) به دست آورده و زاویه این بردار را با بردار $\overline{B} = ۲\hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + \hat{a}_z$ بدست آورید.

$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \sin \theta \cos \phi + \hat{a}_y \sin \theta \sin \phi + \hat{a}_z \cos \theta$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{۴}{-۳} = ۱۲۶/۹ \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos^{-1} \frac{۱۰}{\sqrt{۳^2 + ۴^2 + ۱۰^2}} = ۲۶/۶$$

$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \sin ۲۶/۶^\circ \cos ۱۲۶/۹^\circ + \hat{a}_y \sin ۲۶/۶^\circ \sin ۱۲۶/۹^\circ + \hat{a}_z \cos ۲۶/۶^\circ = ۰/۲۱ \hat{a}_x + ۰/۲۹ \hat{a}_y + ۰/۷۱ \hat{a}_z$$

$$\overline{A} = \frac{۱۰}{r} \hat{a}_r = \frac{۱۰}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{a}_r = \frac{۱۰}{۱۲.۵} \hat{a}_r = -۰/۲۱ \hat{a}_x + ۰/۲۹ \hat{a}_y + ۰/۷۱ \hat{a}_z \rightarrow |A| = ۰/۸$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A| |B|} = \cos^{-1} \frac{-۰/۲۱ \times ۲ + ۰/۲۹ \times -۲ + ۰/۷۱ \times ۱}{۰/۸ \times ۳} = ۹۶/۹^\circ$$

مثال ۶: زاویه بین دو بردار $\vec{A} = 2\hat{a}_r - \hat{a}_\theta + 2\hat{a}_\phi$ و $\vec{B} = \hat{a}_R + 2\hat{a}_\phi - 2\hat{a}_z$ را در نقطه (۲ و ۲ و ۱) بدست آورید.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \quad |\vec{A}| = 3 \quad |\vec{B}| = 3 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (\hat{a}_R + 2\hat{a}_\phi - 2\hat{a}_z) \cdot (2\hat{a}_r - \hat{a}_\theta + 2\hat{a}_\phi) = 2\hat{a}_R \cdot \hat{a}_r - \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\theta + 2\hat{a}_R \cdot \hat{a}_\phi \\ &+ 4\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_r + 2\hat{a}_z \cdot \hat{a}_\theta - 2\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\theta + 4\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi - 4\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r - 4\hat{a}_z \cdot \hat{a}_\phi = 2 \cos \theta \\ &- \sin \theta + 0 + 0 + 4 - 4 \cos \theta + 0 + 2 \cos \theta (90^\circ + \theta) = -2 \cos \theta - 3 \sin \theta + 4 \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -\frac{4}{3} - \sqrt{5} + 4 = 0.433$$

$$\rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \cos^{-1} \frac{0.433}{9} = 89.7^\circ$$

مثال ۷: زاویه بین دو بردار $\bar{A} = \frac{1}{r} \hat{a}_r$ و $\bar{B} = \frac{1}{R} \hat{a}_R$ را در نقطه (۱ و ۱ و ۱) به دست آورید و دو بردار را در دستگاه قائم بیان کنید.

حل:
$$\bar{A} = \frac{1}{r} \hat{a}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (\hat{a}_x \sin \theta \cos \phi + \hat{a}_y \sin \theta \sin \phi + \hat{a}_z \cos \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{tg } \phi = \frac{y}{x} = 1 \rightarrow \phi = 45^\circ \rightarrow \sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\hat{a}_x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_y \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_z \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} \hat{a}_x + \frac{1}{3} \hat{a}_y + \frac{1}{3} \hat{a}_z$$

$$\bar{B} = \frac{1}{R} \hat{a}_R = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\hat{a}_x \cos \phi + \hat{a}_y \sin \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_x \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_y \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \hat{a}_x + \frac{1}{2} \hat{a}_y$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{|\bar{A}| |\bar{B}|} = \cos^{-1} \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}}{\sqrt{3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2} \sqrt{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \cos^{-1} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = 35.3^\circ$$

از شکل (۵-۱) ملاحظه می‌شود که زاویه بین $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_r$ برابر است با $90^\circ - \theta$ یعنی

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 35.3^\circ$$

که همان جواب به دست آمده از تبدیل دو بردار به دستگاه کارتزین می‌باشد.

۱. بردار $\bar{A} = \frac{2\sqrt{2}}{r^2} \hat{a}_\theta$ در دستگاه کروی داده شده است در اینصورت کدامیک از پاسخ‌های زیر این بردار را

در دستگاه قائم و در نقطه (۱ و ۲ و ۲) بیان می‌کند.

$$a_x - 4\hat{a}_y + \hat{a}_z \quad (2)$$

$$\hat{a}_x + \hat{a}_y - 4\hat{a}_z \quad (1)$$

$$2\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 3\hat{a}_z - 4 \quad (4)$$

$$4a_x + \hat{a}_y - \hat{a}_z \quad (3)$$

۱. گزینه (۱)
 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4 + 4 + 1 = 9$ $\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{1}{3}$, $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \phi = \frac{y}{x} = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_x \cos \theta \cos \phi + \hat{a}_y \cos \theta \sin \phi - \hat{a}_z \sin \theta = \hat{a}_x \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_y \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} - \hat{a}_z \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\bar{A} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \hat{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{6} \hat{a}_y - 2 \frac{\sqrt{2}}{3} \hat{a}_z \right) = \hat{a}_x + \hat{a}_y - 4 \hat{a}_z$$

۲. زاویه بردار $\bar{A} = \frac{25}{R} \hat{a}_R$ و $\bar{B} = 4 \hat{a}_x - 3 \hat{a}_y$ در نقطه (۳ و ۴) کدام است.
 (۱) 45° (۲) صفر (۳) 90° (۴) 180°

۲. گزینه (۳)
 $\bar{A} = \frac{25}{R} \hat{a}_R = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\hat{a}_x \cos \phi + \hat{a}_y \sin \phi) = \frac{25}{5} \left(\frac{3}{5} \hat{a}_x + \frac{4}{5} \hat{a}_y \right)$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} \sin \phi = \frac{4}{5} \\ \cos \phi = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{aligned} \bar{A} &= 3 \hat{a}_x + 4 \hat{a}_y \\ \bar{A} \cdot \bar{B} &= 12 - 12 = 0 \rightarrow \end{aligned} \quad \text{A و B بر هم عمودند}$$

۳. به ازای کدام مقدار b دو بردار $\bar{A} = b \hat{a}_x - 2 \hat{a}_z$ و $\bar{B} = 3 \hat{a}_x - 6 \hat{a}_z$ بر هم عمودند.
 (۱) $b = -2$ (۲) $b = -4$ (۳) $b = 0$ (۴) $b = 6$

۳. گزینه (۲)
 $\bar{A} \cdot \bar{B} = 3b + 12 = 0 \rightarrow b = -4$

۴. بردارهای $\bar{A} = 2 \hat{a}_R$ و $\bar{B} = 4 \hat{a}_R$ مفروضند در اینصورت بردار تفاضل $\bar{B} - \bar{A}$ در نقطه (۱ و ۱) کدام است اگر بردار $\bar{A}$ در نقطه $(3, \sqrt{3})$ و $\bar{B}$ در نقطه $(\sqrt{3}, 3)$ داده شده باشند.

(۱) $2 \hat{a}_R$ (۲) $1/\sqrt{2} \hat{a}_R - 1/4 \hat{a}_\phi$ (۳) $2/1 \hat{a}_R + 1/2 \hat{a}_\phi$ (۴) $1/9 \hat{a}_R + 1/5 \hat{a}_\phi$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \phi = 45^\circ \quad \text{گزینه ۴} \quad ۴$$

$$\overline{B} - \overline{A} = 4(\hat{a}_x \cos \phi_B + \hat{a}_y \sin \phi_B) - 2(\hat{a}_x \cos \phi_A + \hat{a}_y \sin \phi_A)$$

$$\phi_B = \operatorname{tg}^{-1} \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \quad \phi_A = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \overline{B} - \overline{A} &= 4 \left[\frac{1}{2} \hat{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_y \right] - 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_x + \frac{1}{2} \hat{a}_y \right] = (2 - \sqrt{3}) \hat{a}_x + (2\sqrt{3} - 1) \hat{a}_y \\ &= (2 - \sqrt{3})(\hat{a}_R \cos \phi - \hat{a}_\phi \sin \phi) + (2\sqrt{3} - 1)(\hat{a}_R \sin \phi + \hat{a}_\phi \cos \phi) = (2 - \sqrt{3}) \left(\hat{a}_R \frac{\sqrt{2}}{2} - \hat{a}_\phi \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\quad + (2\sqrt{3} - 1) \left(\hat{a}_R \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_\phi \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1/9 \hat{a}_R + 1/5 \hat{a}_\phi \end{aligned}$$

$$\overline{A} = 3\hat{a}_R - 2\hat{a}_\phi \quad \text{بردار } \overline{B} = 2\hat{a}_R - 3\hat{a}_\phi \text{ عمود است.} \quad ۵$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ با } (۱) \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ با } (۲) \quad \theta = 0 \text{ با } (۳) \quad \theta = \pi \text{ با } (۴)$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = (3\hat{a}_R - 2\hat{a}_\phi) \cdot (2\hat{a}_R + 3\hat{a}_\phi) = 6 \sin \theta - 6 = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{گزینه ۲} \quad ۵$$

۶. نقطه A به مختصات $(2, \frac{\pi}{3}, 4)$ و B به مختصات $(R, \phi, 5)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. اگر بردار $\overline{AB}$ با بردار $\overline{C} = 2\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ موازی باشد در این صورت R، ϕ کدامند؟

$$R = 4/5, \phi = 41/5 \quad (۲) \quad R = 3/5, \phi = 61/5 \quad (۱)$$

$$R = 3/5, \phi = 71/5 \quad (۴) \quad R = 2/5, \phi = 81/5 \quad (۳)$$

۶. گزینه ۱) بردار $\overline{AB}$ را در مختصات قائم می‌نویسیم.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) \hat{a}_x + (y_B - y_A) \hat{a}_y + (z_B - z_A) \hat{a}_z$$

$$\overline{AB} = (R \cos \phi - 2 \cos \frac{\pi}{3}) \hat{a}_x + (R \sin \phi - 2 \sin \frac{\pi}{3}) \hat{a}_y + \hat{a}_z = (R \cos \phi - 1) \hat{a}_x + (R \sin \phi - \sqrt{3}) \hat{a}_y + \hat{a}_z$$

اگر بخواهیم این بردار با بردار $\overline{C}$ موازی باشد باید.

$$\begin{aligned} \frac{R \cos \phi - 1}{2} &= \frac{R \sin \phi - \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} R \cos \phi = \frac{5}{3} \\ R \sin \phi = \frac{4}{3} + \sqrt{3} \end{cases} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{\frac{4}{3} + \sqrt{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{5} \rightarrow \begin{cases} \phi = 61/5 \\ R = 3/5 \end{cases} \end{aligned}$$

۷. اگر $\bar{B} = 3\hat{a}_R + \hat{a}_z$ و $\bar{A} = 2\hat{a}_r$ باشند در اینصورت در چه نقطه‌ای $\bar{A}$ و $\bar{B}$ با هم موازیند؟
 (۱) نقطه با $\theta = 54/7^\circ$ (۲) نقطه با $\theta = 34/6^\circ$ (۳) نقطه با $\theta = 71/6^\circ$ (۴) نقطه با $\theta = 84/2^\circ$

۷. گزینه ۳
 $\bar{A} \times \bar{B} = (2\hat{a}_r) \times (3\hat{a}_R + \hat{a}_z) = 0$
 $2 [\hat{a}_x \sin\theta \cos\phi + \hat{a}_y \sin\theta \sin\phi + \hat{a}_z \cos\theta] \times [3\hat{a}_x \cos\phi + 3\hat{a}_y \sin\phi + \hat{a}_z] =$
 $6\cos\theta \hat{a}_\phi - 2\sin\theta \hat{a}_\phi = 0 \Rightarrow \tan\theta = 3 \rightarrow \theta = 71/6^\circ$

۸. دو بردار $\bar{A} = 4\hat{a}_R$ و $\bar{B} = 2\hat{a}_R$ به ترتیب در $\phi_A = 30^\circ$ و $\phi_B = 60^\circ$ داده شده‌اند در اینصورت بردار $\bar{B} - \bar{A}$ در نقطه $\phi = 45^\circ$ کدام است؟

(۱) $2/1 \hat{a}_\phi$ (۲) $2/7 \hat{a}_R + 2/1 \hat{a}_\phi$ (۳) $1/6 \hat{a}_\phi + 1/9 \hat{a}_R$ (۴) $2/4 \hat{a}_R + 2/4 \hat{a}_\phi$

۸. گزینه ۲
 $\bar{B} - \bar{A} = (2\cos\phi_B \hat{a}_x + 2\sin\phi_B \hat{a}_y) - (4\cos\phi_A \hat{a}_x + 4\sin\phi_A \hat{a}_y)$

$\bar{B} - \bar{A} = (2\cos 60^\circ \hat{a}_x + 2\sin 60^\circ \hat{a}_y) - (4\cos 30^\circ \hat{a}_x + 4\sin 30^\circ \hat{a}_y) \Rightarrow$

$\bar{B} - \bar{A} = (1 - 2\sqrt{3})\hat{a}_x + (\sqrt{3} - 2)\hat{a}_y = (1 - 2\sqrt{3})(\hat{a}_R \cos\phi - \hat{a}_\phi \sin\phi) + (\sqrt{3} - 2)(\hat{a}_R \sin\phi + \hat{a}_\phi \cos\phi) =$

$(1 - 2\sqrt{3})(\hat{a}_R \frac{\sqrt{2}}{2} - \hat{a}_\phi \frac{\sqrt{2}}{2}) + (\sqrt{3} - 2)(\hat{a}_R \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{a}_\phi \frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \hat{a}_R \left[(1 - 2\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2} + (\sqrt{3} - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \hat{a}_\phi \left[(2\sqrt{3} - 1)\frac{\sqrt{2}}{2} + (\sqrt{3} - 2)\frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -1/9 \hat{a}_R + 1/6 \hat{a}_\phi$

۹. بردار $\bar{A} = 2x\hat{a}_x - y\hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $\bar{B} = \frac{1}{y}x\hat{a}_x - y\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$ مفروض هستند مکان هندسی نقاطی که در آن نقاط دو بردار $\bar{A}$ و $\bar{B}$ بر هم عمودند کدام است؟

(۱) دایره‌ای بشعاع ۲ (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) دایره‌ای بشعاع ۱

۹. گزینه ۱
 $\bar{A} \cdot \bar{B} = \left[\frac{1}{y}x\hat{a}_x - y\hat{a}_y - 4\hat{a}_z \right] \cdot [2x\hat{a}_x - y\hat{a}_y + \hat{a}_z] = x^2 + y^2 - 4 = 0$

$x^2 + y^2 = 4$

۱۰. دو بردار $\bar{A} = 3t^2\hat{a}_x - 2\hat{a}_y$ و $\bar{B} = 2t^2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y$ که بصورت تابعی از زمان تغییر می‌کنند مفروضند در چه لحظه‌ای دو بردار به موازات هم قرار می‌گیرند؟

(۱) $t = \frac{1}{3}$ (۲) $t = \frac{2}{3}$ (۳) $t = \frac{3}{4}$ (۴) $t = \frac{2}{3}$

۱۰. گزینه ۴ شرط اینکه دو بردار موازی باشند اینست که ضرب خارجی آنها صفر باشد یعنی:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [3t^2 \hat{a}_x - 2\hat{a}_y] \times [2t^2 \hat{a}_x - 3t \hat{a}_y] = -9t^4 \hat{a}_z + 4t^2 \hat{a}_z = 0$$

$$9t^2 = 4 \rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ sec}$$

مثال ۴

بردار $A = 3\hat{\theta} + 2\hat{r}$ در نقطه $(r=3, \theta=\frac{\pi}{3}, \varphi=\frac{\pi}{4})$ تعریف شده است. این بردار را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

حل

باید مولفه‌های ρ, φ و z را بیابیم

$$A_\rho = A \cdot \hat{\rho} = 3\hat{\theta} \cdot \hat{\rho} + 2\hat{r} \cdot \hat{\rho}$$

با توجه به معادلات ۳۵ و ۳۷ و ۳۰ به دست می‌آوریم

$$A_\rho = 2 \sin \theta + 3 \cos \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} \right) = 1.5 + \sqrt{3}$$

$$A_\varphi = A \cdot \hat{\varphi} = 2\hat{r} \cdot \hat{\varphi} + 3\hat{\theta} \cdot \hat{\varphi} = 0 + 3 \times 0 = 0$$

به همین ترتیب

$$A_z = 2\hat{r} \cdot \hat{z} + 3\hat{\theta} \cdot \hat{z} = 2 \cos \theta - 3 \sin \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \right) - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A = (1.5 + \sqrt{3})\hat{\rho} + (1 - 1.5\sqrt{3})\hat{z}$$

و سرانجام

مثال ۵

میدان برداری $B = y\hat{x} - x\hat{y} + z\hat{z}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

حل

$$B_\rho = y(\hat{x} \cdot \hat{\rho}) - x(\hat{y} \cdot \hat{\rho}) + z(\hat{z} \cdot \hat{\rho})$$

$$= y \cos \varphi - x \sin \varphi + 0 = \rho \sin \varphi \cos \varphi - \rho \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

$$B_\varphi = y(\hat{x} \cdot \hat{\varphi}) - x(\hat{y} \cdot \hat{\varphi}) + z(\hat{z} \cdot \hat{\varphi})$$

$$= -y \sin \varphi - x \cos \varphi + 0 = -\rho \sin \varphi \sin \varphi - \rho \cos \varphi \cos \varphi = -\rho$$

$$B_z = y(\hat{x} \cdot \hat{z}) - x(\hat{y} \cdot \hat{z}) + z(\hat{z} \cdot \hat{z}) = 0 - 0 + z = z$$

$$B = -\rho \hat{\varphi} + z \hat{z}$$

پس

مثال ۶

میدان برداری $\mathbf{G} = \left(\frac{xz}{y} \right) \hat{\mathbf{x}}$ را در دستگاه مختصات کروی بیان کنید.

حل

$$G_r = \left(\frac{xz}{y} \right) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{(r \sin \theta \cos \varphi)(r \cos \theta)}{r \sin \theta \sin \varphi} \sin \theta \cos \varphi$$

$$= \frac{r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

$$G_\theta = \left(\frac{xz}{y} \right) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{(r \sin \theta \cos \varphi)(r \cos \theta)}{r \sin \theta \sin \varphi} \cos \theta \cos \varphi$$

$$= \frac{r \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

$$G_\phi = \left(\frac{xz}{y} \right) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$= \frac{(r \sin \theta \cos \varphi)(r \cos \theta)}{r \sin \theta \sin \varphi} (-\sin \varphi) = -r \cos \theta \cos \varphi$$

۱-۱ سه بردار $\mathbf{A} = -2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ ، $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}$ ، و $\mathbf{C} = 4\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ داده شده است. اندازه $\mathbf{A} + 3\mathbf{D}$ ، بردار یکه ای در جهت $\mathbf{D} - \mathbf{C}$ ، مولفه $\mathbf{C}$ در امتداد $\mathbf{D}$ ، و زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ را بیابید.

۱-۱ داریم $\mathbf{A} + 3\mathbf{D} = \hat{\mathbf{x}} + 12\hat{\mathbf{y}} - 7\hat{\mathbf{z}}$ ، $\mathbf{D} - \mathbf{C} = -3\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$ و $|\mathbf{D} - \mathbf{C}| = 7.68$. بردار یکه مطلوب عبارت است از

$$\frac{\mathbf{D} - \mathbf{C}}{|\mathbf{D} - \mathbf{C}|} = -0.39\hat{\mathbf{x}} + 0.65\hat{\mathbf{y}} - 0.65\hat{\mathbf{z}}$$

مولفه $\mathbf{C}$ در امتداد $\mathbf{D}$ عبارت است از

$$(\mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{d}})\hat{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}\hat{\mathbf{d}} = \frac{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})\mathbf{D}}{D^2} = \frac{-6\mathbf{D}}{26} = -0.23\hat{\mathbf{x}} - 0.69\hat{\mathbf{y}} + 0.92\hat{\mathbf{z}}$$

زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ برابرست با

$$\cos^{-1} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{C}|} = \cos^{-1} \frac{-9}{\sqrt{38} \sqrt{21}} = \cos^{-1}(-0.318) = 108.6$$

۲-۱ به ازای بردارهای داده شده در مسئله ۱-۱، $A \times D$ ، $(A \times D) \cdot C$ ، $A \cdot (D \times C)$ و بردار یکه ای عمود بر D و C را بیابید.

۲-۱ به ترتیب به دست می آوریم $A \times D = -27\hat{x} - 3\hat{y} - 9\hat{z}$ ، $(A \times D) \cdot C = -111$ ، و $A \cdot (D \times C) = -111$

$D \times C$ بر D و C عمودست. پس

$$\hat{n} = \pm \frac{D \times C}{|D \times C|} = \pm (0.22\hat{x} + 0.75\hat{y} + 0.62\hat{z})$$

۳-۱ B, A و C سه بردار ی هستند که از مبدأ به نقاط A, B ، و C وصل شده اند. نشان دهید که بردار $D = (A \times B) + (B \times C) + (C \times A)$ بر صفحه ای که از نقاط A, B ، و C می گذرد عمودست.

۳-۱ $A - B$ و $B - C$ دو بردار متفاوت واقع در صفحه مورد نظرست. باید ثابت کنیم که این دو بردار بر بردار مورد نظر عمودند. به این منظور ضرب نقطه ای زیر را تشکیل می دهیم

$$\begin{aligned} K &= D \cdot (A - B) = [(A \times B) + (B \times C) + (C \times A)] \cdot (A - B) \\ &= (A \times B) \cdot A + (B \times C) \cdot A + (C \times A) \cdot A \end{aligned}$$

$-(A \times B) \cdot B - (B \times C) \cdot B - (C \times A) \cdot B$
چون $(A \times B)$ بر A و B عمودست، جملات اول و چهارم صفرند، همچنین $C \times A$ بر A و $B \times C$ بر B عمودست، پس جملات سوم و پنجم نیز صفرند و
 $K = (B \times C) \cdot A - (C \times A) \cdot B$

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$$

با توجه به اتحاد زیر

می بینیم که $K = 0$. به همین ترتیب می توان نشان داد که $B - C$ نیز بر بردار D عمودست.

۴-۱ رتوس یک مثلث در نقاط $A(-1, 6, 2)$ ، $B(2, 4, -3)$ ، و $C(4, 1, -5)$ قرار دارد. مساحت این مثلث را بیابید.

۴-۱ چون حاصلضرب دو بردار اندازه‌ای برابر اندازه مساحت متوازی الاضلاع تشکیل شده توسط دو بردار دارد، و مساحت مثلث نصف اندازه مساحت متوازی الاضلاع است

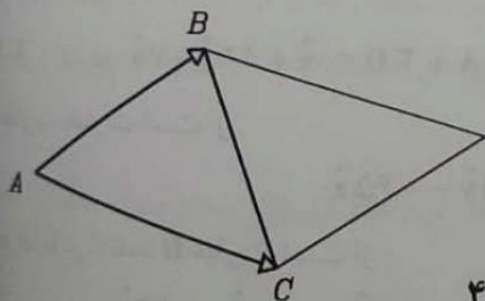
$$S = \frac{1}{2} |AB \times AC|$$

$$AB = OB - OA = (2\hat{x} + 4\hat{y} - 3\hat{z}) - (-\hat{x} + 6\hat{y} + 2\hat{z}) = (3\hat{x} - 2\hat{y} - 5\hat{z})$$

$$AC = OC - OA = 5\hat{x} - 5\hat{y} - 7\hat{z}$$

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & -2 & -5 \\ 5 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -11\hat{x} - 4\hat{y} - 5\hat{z}$$

$$S = \frac{1}{2} (12, 73) = 6, 36$$



شکل ح ۴-۱

۵-۱ نشان دهید که اگر $A \cdot B = A \cdot C$ ، $A \times B = A \times C$ و A برداری غیر صفر باشد، آنگاه $B = C$.

۵-۱ دو طرف معادله اول را از طرف راست در C ضرب خارجی می‌کنیم

$$(A \times B) \times C = (A \times C) \times C$$

با استفاده از اتحاد

$$(a \times b) \times c = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

دو طرف را بسط می‌دهیم

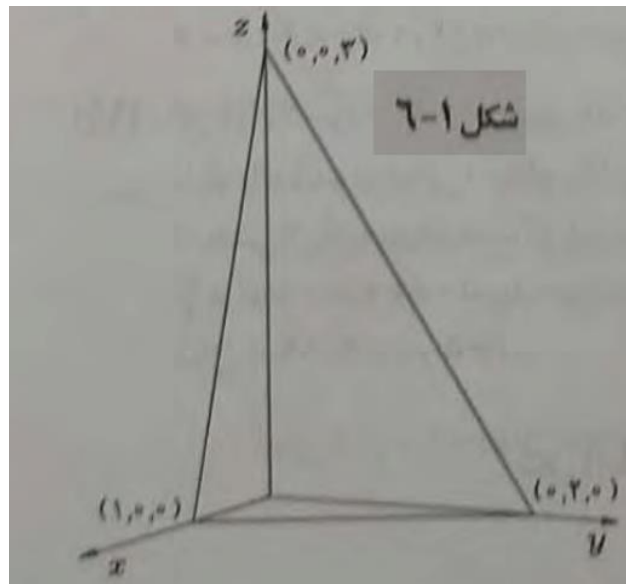
$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B) = C(A \cdot C) - C(A \cdot C)$$

طرف راست برابر صفر است، پس

$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B) = 0$$

چون $A \cdot C = A \cdot B$ ، داریم $B(A \cdot C) - C(A \cdot C) = (B - C)(A \cdot C) = 0$ ، پس $B - C = 0$ که برابری $B = C$ را نتیجه می‌دهد.

۶-۱ بردار یکه عمود بر سطح مثلثی نشان داده شده در شکل ۶-۱ را بیابید.



۶-۱ دو بردار نشان داده شده در شکل ح ۶-۱ را به دست می آوریم

$$\mathbf{A} = -\hat{x} + 2\hat{y}$$

$$\mathbf{B} = -\hat{x} + 3\hat{z}$$

۷-۱ دو بردار $\mathbf{A} = \cos \varphi \hat{\rho} + \sin \varphi \hat{\phi} + \rho \hat{z}$ و $\mathbf{B} = \rho \hat{\rho} + \rho \hat{\phi} + 2\hat{z}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ را در نقطه $(x=2, y=3, z=4)$ بیابید.

۷-۱ داریم $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi + 2\rho$ در نقطه مورد نظر

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

پس

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sqrt{13} \times \frac{2}{\sqrt{13}} + \sqrt{13} \times \frac{3}{\sqrt{13}} + 2\sqrt{13} = 5 + 2\sqrt{13}$$

۸-۱ دو بردار $F = 10\hat{r} - 3\hat{\theta} + 5\hat{\phi}$ و $G = 2\hat{r} + 5\hat{\theta} + 3\hat{\phi}$ در نقطه P داده شده است. $F \cdot G$ ، مولفه G در امتداد F ، $G \times F$ و بردار یکه‌ای عمود بر G و F در نقطه P را بیابید.

۸-۱ داریم $F \cdot G = 20 - 15 + 15 = 20$

$$G_F = (G \cdot \hat{F})\hat{F} = \frac{(G \cdot F)F}{|F|^2} = \frac{20F}{134} = 1.49\hat{r} - 0.45\hat{\theta} + 0.75\hat{\phi}$$

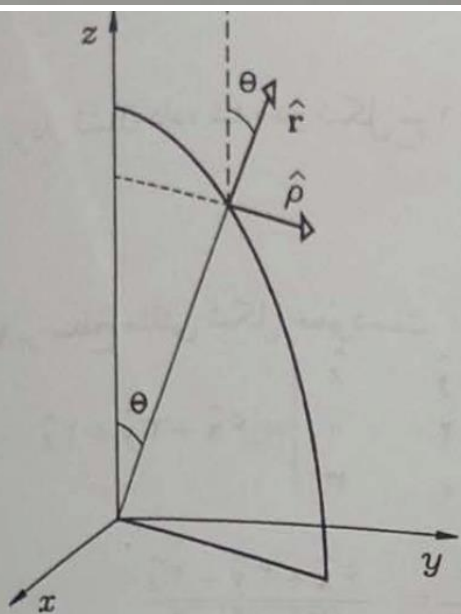
$$G \times F = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ 2 & 5 & 3 \\ 10 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 34\hat{r} + 20\hat{\theta} - 56\hat{\phi}$$

$$\hat{n} = \pm \frac{G \times F}{|G \times F|} = \pm \frac{34\hat{r} + 20\hat{\theta} - 56\hat{\phi}}{68.5} = (0.496\hat{r} + 0.292\hat{\theta} - 0.818\hat{\phi})$$

توجه کنید که درستی روش به کار رفته بر این نکته مبنی است که F و G در یک نقطه تعریف شده‌اند.

۹-۱ زاویه بین دو بردار $A = \frac{1}{\rho} \hat{\rho}$ و $B = \frac{1}{r} \hat{r}$ را در نقطه $z = 3, y = 2, x = 1$ بیابید.

۹-۱ یک روش حل این مسئله استفاده از ضرب نقطه‌ای است، ولی راه ساده‌تر حل این مسئله توجه به این نکته است که بردار A در جهت $\hat{\rho}$ و بردار B در جهت $\hat{r}$ است و کافی است زاویه بین این دو بردار را بیابیم. با توجه به شکل ح ۹-۱ می‌بینیم که زاویه بین دو بردار $\hat{\rho}$ و $\hat{r}$ برابر θ است. پس $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ است.



شکل ح ۹-۱

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}}$$

و سرانجام

۱۰-۱ بردار $A = (y+z)\hat{x} + (x+z)\hat{y} + (x+y)\hat{z}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

۱۰-۱ داریم $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ و $z = z$. با استفاده از ماتریس تبدیل به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \sin \varphi + z \\ \rho \cos \varphi + z \\ \rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho \sin \varphi \cos \varphi + z \cos \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi + z \sin \varphi \\ -\rho \sin^2 \varphi - z \sin \varphi + \rho \cos^2 \varphi + z \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{bmatrix}$$

پس

$$A_\rho = \rho \sin 2\varphi + z(\sin \varphi + \cos \varphi)$$

$$A_\varphi = \rho \cos 2\varphi - z(\sin \varphi - \cos \varphi)$$

$$A_z = \rho(\sin \varphi + \cos \varphi)$$

۱۱-۱ میدان برداری $E = (\cos \theta / r)\hat{r} + (\sin \theta / r)\hat{\theta}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنید.

۱۱-۱ ابتدا مولفه‌ها را در مختصات قائم بیان می‌کنیم

$$E = \frac{\cos \theta}{r} (\sin \theta \sin \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) + \frac{\sin \theta}{r} (\cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z})$$

حال هر مولفه را به مختصات قائم می‌بریم

$$E_x = \frac{\gamma \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{r} = \frac{\gamma (r \cos \theta) (r \sin \theta \cos \varphi)}{r^3} = \frac{\gamma z x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{\gamma \cos \theta \sin \theta \sin \varphi}{r} = \frac{\gamma (r \cos \theta) (r \sin \theta \sin \varphi)}{r^3} = \frac{\gamma z y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r} = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^3} = \frac{z^2 - (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۱۲-۱ میدان برداری زیر را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

$$\mathbf{A} = y \hat{\mathbf{x}} + x \hat{\mathbf{y}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{\mathbf{z}}$$

۱۳-۱ در مختصات استوانه‌ای $x = \rho \cos \varphi$ و $\hat{\mathbf{y}} = \sin \varphi \hat{\mathbf{p}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{q}}$ پس

$$\mathbf{A} = \rho \cos \varphi \sin \varphi \hat{\mathbf{p}} + \rho \cos^2 \varphi \hat{\mathbf{q}}$$

در مختصات کروی $x = r \sin \theta \cos \varphi$ و $\hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{\theta}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{\phi}}$

$$\mathbf{A} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$$

$$= r \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{r}} + r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{\theta}} + r \sin \theta \cos^2 \varphi \hat{\mathbf{\phi}}$$

۱۴-۱ میدان برداری زیر را در دستگاه مختصات قائم بیان کنید.

$$\mathbf{A} = z \cos \varphi \hat{\mathbf{p}} + \rho^2 \sin \varphi \hat{\mathbf{q}} + \sqrt{2} \rho \hat{\mathbf{z}}$$

۱۴-۱ با توجه به این نکته که $\hat{\mathbf{p}} = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{q}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$ داریم

$$\mathbf{A} = z \cos \varphi (\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \rho^2 \sin \varphi (-\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \sqrt{2} \rho \hat{\mathbf{z}}$$

$$A_x = z \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi = z \frac{x^2}{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \\ = \frac{zx^2}{x^2 + y^2} - y^2$$

$$A_y = z \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi = (z + \rho^2) \sin \varphi \cos \varphi \\ = (z + x^2 + y^2) \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$A_z = \sqrt{2} \rho = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

انتگرال‌های مهم و کاربردی در الکترومغناطیس

مثال ۸: بردار $\bar{\mathbf{A}} = x \hat{\mathbf{a}}_x + y \hat{\mathbf{a}}_y + z \hat{\mathbf{a}}_z$ داده شده است انتگرال $\oint_S \bar{\mathbf{A}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$ که S سطح یک استوانه بشعاع 2^m و

ارتفاع $1/5^m$ می‌باشد بدست آورید فاعده پائینی استوانه در صفحه $Z=0$ قرار دارد

حل: انتگرال روی سطح بسته را میتوان تبدیل به سه سطح مطابق زیر کرد.

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{سطح جانبی استوانه}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_\varphi + \int_{\text{قاعده بالایی استوانه}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_\varphi + \int_{\text{قاعده پایینی استوانه}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_\varphi$$

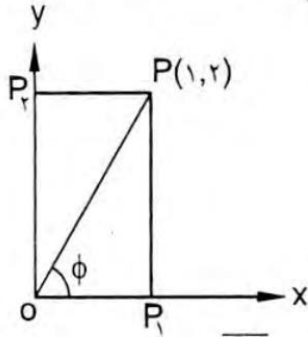
$$d\vec{s}_\varphi = -R dR d\phi \hat{a}_z \quad d\vec{s}_\varphi = R dR d\phi \hat{a}_z \quad d\vec{s}_\varphi = a d\phi dz \hat{a}_R$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{s}_\varphi = [x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z] \cdot (R dR d\phi \hat{a}_z) \Big|_{z=0} = 0$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{s}_\varphi [x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z] \cdot (R dR d\phi \hat{a}_z) \Big|_{z=1/5} = 1/5 R dR d\phi$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{s}_\varphi = (x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z) \cdot (a d\phi dz \hat{a}_R) = r \hat{a}_r \cdot a d\phi dz \hat{a}_R = r \sin\theta a d\phi dz = Ra d\phi dz \Big|_{R=a}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = a^2 d\phi dz \rightarrow \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0 + \int_0^{2\pi} \int_0^2 1/5 R dR d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 a^2 d\phi dz = 18\pi$$



مثال ۹: انتگرال $\int_C R d\vec{R}$ روی مسیر O به P روی مسیرهای زیر حساب کنید.

الف) OP_1P (ب) OP_1P (ج) مسیر مستقیم OP

حل: الف: روی مسیر OP_1 مقدار $y=0$ و $dy=0$ است.

لذا $R=x$ و $d\vec{R}=dx \hat{a}_x$ و روی مسیر P_1P ، $dx=0$ و $R=\sqrt{1+y^2}$ و $d\vec{R}=dy \hat{a}_y$

$$\int_{OP_1P} R d\vec{R} = \int_0^2 x dx \hat{a}_x + \int_{P_1}^P \sqrt{1+y^2} dy \hat{a}_y = \int_0^1 x dx \hat{a}_x + \int_0^2 \sqrt{1+y^2} dy \hat{a}_y$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \hat{a}_x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \sinh^{-1} y + \frac{y}{2} \sqrt{1+y^2} \right]_0^2 \hat{a}_y = \frac{1}{2} \hat{a}_x + \frac{2}{96} \hat{a}_y$$

ب: روی مسیر OP_1 مقدار $x=0$ و $dx=0$ است لذا $R=y$ و $d\vec{R}=dy \hat{a}_y$ و روی مسیر P_1P ، $dy=0$ و

$$R=\sqrt{x^2+4} \text{ و } d\vec{R}=dx \hat{a}_x \text{ بنابراین}$$

$$\int_{OP_1P} R d\vec{R} = \int_0^2 y dy \hat{a}_y + \int_{P_1}^P \sqrt{x^2+4} dx \hat{a}_x = \int_0^2 y dy \hat{a}_y + \int_0^1 \sqrt{x^2+4} dx \hat{a}_x$$

$$= \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^2 \hat{a}_y + \left[2 \sinh^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+4} \right]_0^1 \hat{a}_x = 2 \hat{a}_y + \frac{2}{9} \hat{a}_x$$

ج: روی مسیر OP داریم

$$\int_{OP} R d\vec{R} = \int_0^{\sqrt{5}} R dR \hat{a}_R = \left[\frac{1}{2} R^2 \right]_0^{\sqrt{5}} (\hat{a}_x \cos \phi + \hat{a}_y \sin \phi)$$

$$\sin \phi = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ و } \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \int_{OP} R d\vec{R} = \frac{5}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \hat{a}_x + \frac{2}{\sqrt{5}} \hat{a}_y \right] = \frac{\sqrt{5}}{2} \hat{a}_x + \sqrt{5} \hat{a}_y$$

مثال ۱۰: اگر $\vec{F} = x^2 \hat{a}_x - 2xy \hat{a}_y$ مطلوبست $\int_A \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ روی مسیر ربع دایره‌ای به شعاع ۴ در ناحیه اول مختصات (A روی محور x و B روی محور y قرار دارد)

حل: مسئله را می‌توان هم در دستگاه مختصات قائم و هم استوانه‌ای حل کرد ابتدا مسئله را در دستگاه مختصات قائم حل می‌کنم

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int (x^2 \hat{a}_x - 2xy \hat{a}_y) \cdot (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y) = \int x^2 dx - 2xy dy \\ &= \int_4^0 x^2 dx + \int_0^4 -2y \sqrt{16-y^2} dy = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_4^0 + \left[\frac{2}{3} (16-y^2)^{3/2} \right]_0^4 = -64 \end{aligned}$$

حال مسئله را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= r d\phi \hat{a}_\phi & \vec{F} &= x^2 \hat{a}_x - 2xy \hat{a}_y \\ \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= (x^2 \hat{a}_x - 2xy \hat{a}_y) \cdot (r d\phi \hat{a}_\phi) = r x^2 d\phi \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x - 2rxy d\phi \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y \\ &= r x^2 d\phi (-\sin\phi) - 2rxy (\cos\phi) d\phi = r (r \cos\phi)^2 d\phi (-\sin\phi) - 2(r \cos\phi)(r \sin\phi)(\cos\phi) d\phi \\ &= (-r^3 \cos^2\phi \sin\phi - 2r^2 \cos^2\phi \sin\phi) d\phi = -r^2 \cos^2\phi \sin\phi d\phi \\ \Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^\pi -r^2 \cos^2\phi \sin\phi d\phi = r^2 \cos^3\phi \Big|_0^\pi = -64 \end{aligned}$$

که نتیجه با حالت قبل یکی است.

۱. بردار $\vec{A} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z$ داده شده است $\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$ که s کره‌ای بشعاع 3^m و به مرکز مبدأ مختصات می‌باشد کدام است؟

- ۱) 24π ۲) 36π ۳) 144π ۴) 108π

گزینه ۴) روی کره $\vec{A} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z = r \hat{a}_r = 3 \hat{a}_r$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3 \hat{a}_r \cdot (9 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r) = 27 \times 4\pi = 108\pi$$

۲. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = 6xyz\hat{a}_x + 3x^2z\hat{a}_y + 3x^2y\hat{a}_z$ جهت تغییر مکان جسمی از مبدا به نقطه (۳ و ۲ و -۱) کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) صفر (۴) ۱۲

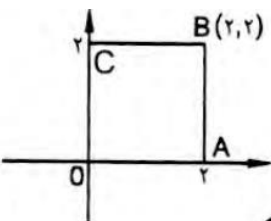
۲. گزینه (۱) دقت شود که نیروی $\vec{F}$ یک نیروی کنسرواتیو است و کار بستگی به مسیر ندارد

$$\int_{(0,0,0)}^{(-1,2,3)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{(0,0,0)}^{(-1,2,3)} (6xyz\hat{a}_x + 3x^2z\hat{a}_y + 3x^2y\hat{a}_z) \cdot (dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z)$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(-1,2,3)} (6xydx + 3x^2zdy + 3x^2ydz) = \int d(3x^2yz) = 3x^2yz \Big|_{(0,0,0)}^{(-1,2,3)} = 3(-1)^2(2)(3) = 18$$

۳. نیروی $F = (2y - y^2)\hat{a}_x + xy\hat{a}_y$ در صفحه xy داده شده است اگر بخواهیم از نقطه (۰ و ۰) به نقطه (۲ و ۲) حرکت کنیم و کار انجام شده صفر باشد چگونه باید این عمل را انجام دهیم
 (۱) ابتدا به نقطه (۲ و ۰) رفته و از آنجا به نقطه (۲ و ۲) برویم (۲) ابتدا به نقطه (۲ و ۰) رفته و از آنجا به نقطه (۲ و ۲) برویم
 (۳) مستقیماً از مبداً به نقطه (۲ و ۲) برویم. (۴) این کار امکان ندارد.

گزینه (۲)



اگر از مسیر OAB برویم داریم

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int (2y - y^2) dx + xy dy$$

$$\Rightarrow \int (2y - y^2) dx + xy dy = \int_0^A 0 dx + 0 dy + \int_A^B (2y - y^2)(0) + 2y dy = \int_0^2 2y dy = 4$$

پس (۱) صحیح نیست

اگر از مسیر OCB برویم داریم

$$\int (2y - y^2) dx + xy dy = \int_O^C (2y - y^2)(0) + 0 dy + \int_C^B (2 \times 2 - 2^2) dx + xy(0) = 0 + 0 = 0$$

۴. مقدار عبارت $\int_{(1, \frac{\pi}{3}, 2)}^{(0.5, \frac{\pi}{3}, -1)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ اگر $\vec{F} = \frac{r \cos \phi}{R^3} \hat{a}_R + \frac{\sin \phi}{R^3} \hat{a}_\phi$ کدام است

(۱) -0.5 (۲) 1 (۳) 0.5 (۴) صفر

گزینه ۳

$$\int_{(1, \frac{\pi}{3}, 2)}^{(0.5, \frac{\pi}{3}, -1)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{(1, \frac{\pi}{3}, 2)}^{(0.5, \frac{\pi}{3}, -1)} \left(\frac{r \cos \phi}{R^3} \hat{a}_R + \frac{\sin \phi}{R^3} \hat{a}_\phi \right) \cdot (dR \hat{a}_R + R d\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z)$$

$$= \int_{(1, \frac{\pi}{3}, 2)}^{(0.5, \frac{\pi}{3}, -1)} \frac{r \cos \phi}{R^3} dR + \frac{\sin \phi}{R^3} d\phi = \int_{(1, \frac{\pi}{3}, 2)}^{(0.5, \frac{\pi}{3}, -1)} d \left[\frac{-\cos \phi}{R^3} \right] = \frac{-\cos \phi}{R^3} \Big|_{(1, \frac{\pi}{3}, 2)}^{(0.5, \frac{\pi}{3}, -1)}$$

$$= 0 + \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{1^3} = 0.5$$

۵. بردار $\vec{A} = \frac{r \cos \theta}{r^3} \hat{a}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{a}_\theta$ در مختصات کروی مفروض است در این صورت $\int_B^C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ که مختصات B و C در دستگاه کروی بصورت

B $\begin{cases} 2 \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{4} \end{cases}$ و C $\begin{cases} 1 \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} \end{cases}$ می باشند کدام است.

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{8}$

(۴)

$$\begin{aligned}
 \int_B^C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} &= \int_B^C \left[\frac{r \cos \theta}{r^2} \hat{a}_r + \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{a}_\theta \right] \cdot [dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{a}_\phi] \\
 &= \int_B^C \left[\frac{r \cos \theta}{r^2} dr + \frac{\sin \theta}{r^2} d\theta \right] = \int_B^C d \left[-\frac{\cos \theta}{r^2} \right] = \frac{-\cos \theta}{r^2} \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})}^{(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})} \\
 &= -\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{1^2} + \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{2^2} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

۶. حاصل انتگرال $\oint_S \frac{y}{x} \hat{a}_r \cdot d\vec{s}$ روی کره‌ای بشعاع 2^m کدام است؟

(۱) صفر (۲) π (۳) $-\pi$ (۴) 6π

گزینۀ (۱)

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{y}{x} \hat{a}_r \cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta \sin \phi}{r \sin \theta \cos \phi} \hat{a}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{a}_r = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \phi \sin \theta}{\cos \phi} d\theta d\phi \\
 &= 8 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} d\phi = -8 \ln \cos \phi \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

۷. حاصل انتگرال $\oint 2r \hat{a}_r \cdot d\vec{s}$ روی استوانه‌ای بشعاع 2^m و ارتفاع 3^m که قاعده آن در صفحه xy قرار گرفته

و محور آن محور z است کدام است؟

(۱) 24π (۲) 48π (۳) 72π (۴) صفر

$$\oint \vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot d\vec{s} = \int_{\text{قاعده پایین}} \vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot d\vec{s} + \int_{\text{قاعده بالا}} \vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot d\vec{s} + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot d\vec{s} \quad \text{گزینه ۳}$$

$$\begin{aligned} & \int_{r'=0}^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} -\vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot r' dr' d\phi \hat{a}_z + \int_{r'=0}^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot r' dr' d\phi \hat{a}_z + \int_0^3 \int_0^{2\pi} \vec{r} \cdot \hat{a}_r \cdot a d\phi dz \hat{a}_R \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r \cos\theta r' dr' d\phi + \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \cos\theta r' dr' d\phi + \int_0^3 \int_0^{2\pi} r \sin\theta a d\phi dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r r' dr' d\phi \Big|_{z=0} + \int_0^2 \int_0^{2\pi} r z r' dr' d\phi \Big|_{z=3} + \int_0^3 \int_0^{2\pi} r a^2 d\phi dz \\ &= 0 + 3r'^2 \Big|_0^2 2\pi + 2\pi \times 2 \times (2)^2 \times 3 = 72\pi \end{aligned}$$

۸. اگر بردار $\vec{F} = -r \cos\theta \hat{a}_r + r \sin\theta \hat{a}_\theta$ باشد کار لازم جهت تغییر مکان جسمی از نقطه $\theta = 60^\circ$ به $\theta = 120^\circ$ روی کره‌ای بشعاع r^m کدام است؟

۱) ۲ج (۱) ۲) ۴ج (۲) ۳) صفر (۳) ۴) ۱ج (۴)

$$\begin{aligned} & \text{گزینه ۲} \\ W &= \int_{\theta=60^\circ}^{\theta=120^\circ} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\theta=60^\circ}^{\theta=120^\circ} [-r \cos\theta \hat{a}_r + r \sin\theta \hat{a}_\theta] \cdot [dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta] \\ &= \int_{\theta=60^\circ}^{\theta=120^\circ} -r \cos\theta dr + r^2 \sin\theta d\theta = \int_{\theta=60^\circ}^{\theta=120^\circ} d(-r^2 \cos\theta) = -4(\cos 120^\circ - \cos 60^\circ) = +4J \end{aligned}$$

۹. حاصل انتگرال $\int_V \vec{A} dv$ که v حجم کره‌ای بشعاع r^m و $\vec{A} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z$ کدام است؟

۱) $\pi [\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z]$ (۲) ۳) $2\pi [\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z]$ (۳) ۴) صفر (۴)

گزینه ۲

$$\int_V [x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z] r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin\theta \cos\phi \hat{a}_x + r \sin\theta \sin\phi \hat{a}_y + r \cos\theta \hat{a}_z) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 (\sin^2\theta \cos\phi \hat{a}_x + \sin^2\theta \sin\phi \hat{a}_y + \cos\theta \sin\theta \hat{a}_z) d\theta d\phi dr = 0$$

۱۰. بردار $\vec{A} = 2\hat{a}_R - 3\hat{a}_\phi + 2\hat{a}_z$ داده شده است $\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$ روی کره‌ای بشعاع 2^m کدام است؟

(۱) $8\pi^2$ (۲) صفر (۳) 6π (۴) $4\pi^2$

گزینه ۱

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int [2\hat{a}_R - 3\hat{a}_\phi + 2\hat{a}_z] \cdot [a^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r]$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2\sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_R \cdot \hat{a}_r - 3 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_r + 2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2\sin^2\theta d\theta d\phi - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3\sin\theta d\theta d\phi (0) + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2\sin\theta d\theta d\phi \cos\theta = 2\pi(4\pi) = 8\pi^2$$

با توجه به آنچه که در بخش (۵-۱) گفته شد $\hat{a}_R \cdot \hat{a}_r = \sin\theta$, $\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = \cos\theta$ می‌باشد که در بالا استفاده شده است.

مثال ۸

فرض کنید $f(x, y, z) = 2x + y + z^2$ و منحنی C با $z = x, y = 2x$ تعریف شده است. انتگرالهای $\int_C f(\mathbf{r}) dz$ و $\int_C f(\mathbf{r}) dx$ را روی C از نقطه $P_1(0, 0, 0)$ تا $P_2(2, 4, 2)$ حساب کنید.

حل

$$\int f(\mathbf{r}) dx = \int_0^2 (2x + y + z^2) dx = \int_0^2 (2x + 2x + x^2) dx = \frac{32}{3}$$

$$\int f(\mathbf{r}) dz = \int_0^2 (2z + z + z^2) dz = \frac{32}{3}$$

مثال ۹

انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ میدان برداری $\mathbf{F} = 5xy\hat{x} + 6y^2\hat{y} + 2yz\hat{z}$ را روی مسیر تعریف شده در مثال ۲ از P_1 تا P_2 نشان داده شده در شکل ۲ به دست آورید.

حل

در دستگاه قائم طبق معادله (۱۶)

$$d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

پس

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5xy dx + 6y^2 dy + 2yz dz$$

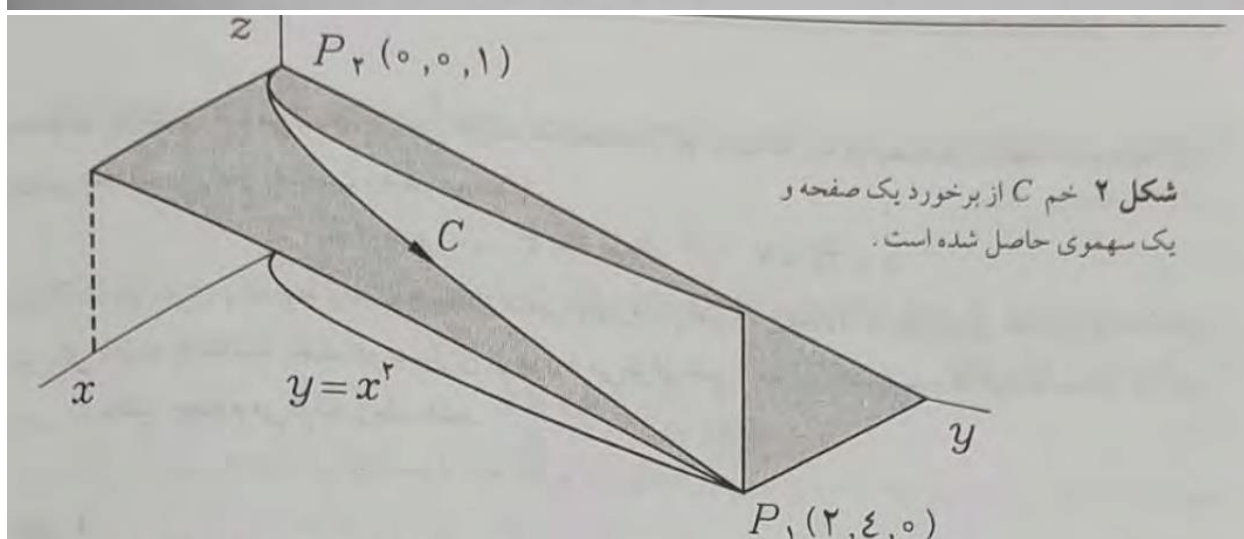
اکنون سه انتگرال مسیر نوع اول داریم و

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} 5xy dx + \int_{P_1}^{P_2} 6y^2 dy + \int_{P_1}^{P_2} 2yz dz$$

با توجه به معادلات مسیر

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} 5x^2 dx + \int_{P_1}^{P_2} 6y^2 dy + \int_{P_1}^{P_2} 2z(1-z) dz$$

$$= -20 - 128 + \frac{4}{3} = -146.66$$



مثال ۹

انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ میدان برداری $\mathbf{F} = 5xy\hat{x} + 6y^2\hat{y} + 2yz\hat{z}$ را روی مسیر تعریف شده در مثال ۲ از P_1 تا P_2 نشان داده شده در شکل ۲ به دست آورید.

حل

در دستگاه قائم طبق معادله (۱۶)

$$d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5xy\,dx + 6y^2\,dy + 2yz\,dz$$

پس

اکنون سه انتگرال مسیر نوع اول داریم و

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^0 5xy\,dx + \int_2^0 6y^2\,dy + \int_0^1 2yz\,dz$$

با توجه به معادلات مسیر

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_2^0 5x^2\,dx + \int_2^0 6y^2\,dy + \int_0^1 8z(1-z)\,dz \\ &= -20 - 128 + \frac{4}{3} = -146\frac{2}{3} \end{aligned}$$

مثال ۱۱

مسیر C نشان داده شده در شکل ۱۷ از سه ربع دایره تشکیل شده است. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را روی این مسیر به ازای $\mathbf{F} = k r^2 \hat{\phi}$ به دست آورید.

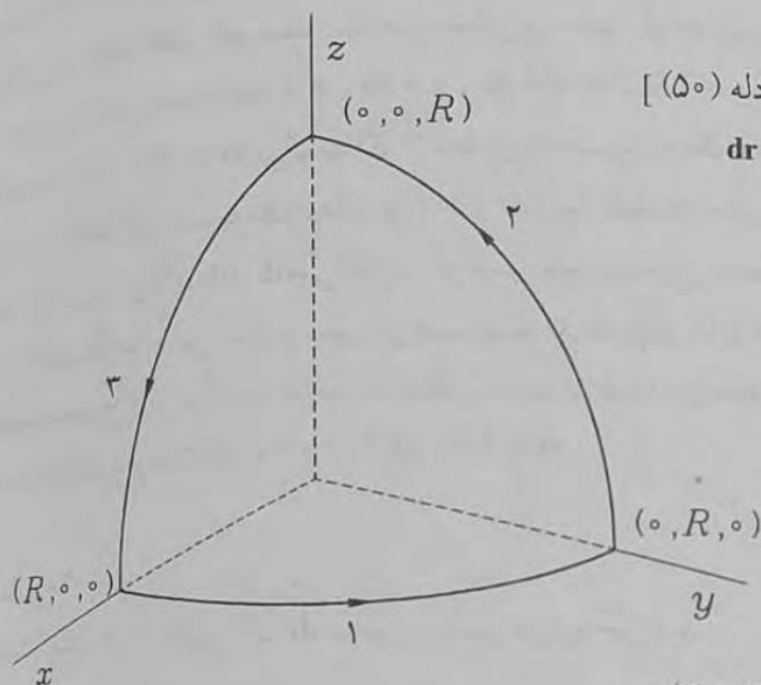
حل

در دستگاه مختصات کروی داریم [معادله (۵۰)]

$$d\mathbf{r} = dr \hat{r} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} + r d\theta \hat{\theta}$$

پس

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k r^3 \sin \theta d\phi$$



شکل ۱۷ مثال ۱۰.

برای بخش ۱ مسیر: $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\phi = \phi$ ؛ پس

$$\int_0^{\pi/2} k R^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) d\phi = k R^3 \frac{\pi}{2}$$

برای بخش ۲ مسیر: $r = R$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \theta$ ؛ پس

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2} k R^3 \sin \theta d\phi = 0$$

برای بخش ۳ مسیر: $r = R$, $\phi = 0$ و $\theta = \theta$ ؛ پس

$$\int_0^0 k R^3 \sin \theta d\phi = 0$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k R^3 \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۲

انتگرال زیر را روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۵ واقع در صفحه xy حساب کنید

$$\mathbf{I} = \int \rho \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} dl$$

حل

برای دایره مسیر داریم $dl = 5 d\varphi$ پس با استفاده از معادله (۳۶)

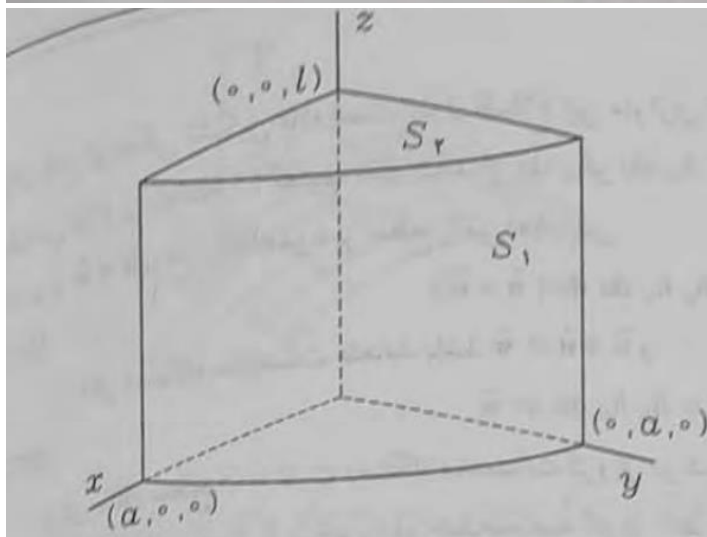
$$\mathbf{I} = \int \rho \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} dl = \int_0^{2\pi} 5 \sin \varphi (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) 5 d\varphi$$

زیرا روی مسیر مورد نظر $\rho = 5$ و φ بین ۰ تا 2π تغییر می‌کند

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \hat{x} \int_0^{2\pi} -25 \sin^2 \varphi d\varphi + \hat{y} \int_0^{2\pi} 25 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \hat{x} (-25\pi) + \hat{y} (0) = -25\pi \hat{x} \end{aligned}$$

مثال ۱۳

شکل ۲۱ بخشی از یک استوانه به شعاع a ، ارتفاع l و هم محور با محور z ها را نشان می‌دهد که در فضای $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ قرار دارد. بر روی سطوح S_1 و S_2 مشخص شده در شکل $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ را حساب کنید. داریم $\mathbf{A} = \rho \cos \varphi \hat{\mathbf{p}} - \rho \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$



شکل ۲۱ مثال ۱۳.

حل روی سطح S_1 داریم

$$ds_1 = a \, d\varphi \, dz \, \hat{\rho}$$

پس

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-l}^l \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos \varphi \, d\varphi \, dz = a^2 l$$

که در آن از $\rho = a$ (روی سطح S_1) استفاده شده است. در روی S_2

$$ds_2 = \rho \, d\rho \, d\varphi \, \hat{z}$$

و چون $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_2 = 0$

$$\int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

مثال ۱۴

انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را روی کره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات برای تابع $\mathbf{F} = r \hat{\mathbf{r}} / (r^2 + h^2)$ به دست آورید:

حل روی سطح کره $r = R$ و $ds = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ ، پس

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{R^2 + h^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{R^2}{R^2 + h^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

چون با تغییر θ و φ بردار $\hat{\mathbf{r}}$ هم تغییر می‌کند، نمی‌توان $\hat{\mathbf{r}}$ را از انتگرال خارج کرد. به کمک معادله (۳۵) می‌نویسیم

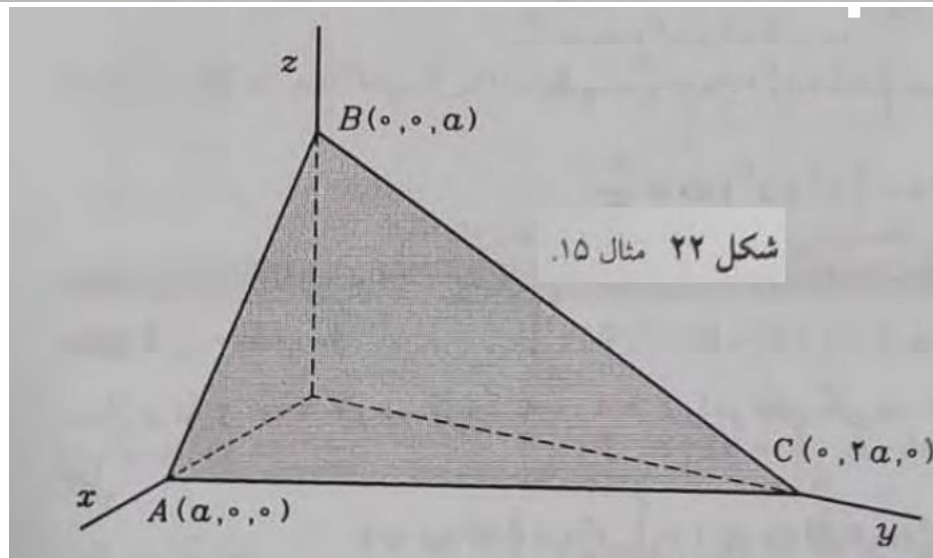
$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{R^2}{R^2 + h^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \, d\theta \, d\varphi$$

حال سه انتگرال اسکالر داریم. مولفه‌های x و y انتگرال صفر می‌شوند، زیرا انتگرال $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ از 0 تا 2π صفر می‌شود. پس

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{R^2}{R^2 + h^2} \hat{z} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{R^2}{R^2 + h^2} \hat{z} (2\pi) (0) = 0 \end{aligned}$$

مثال ۱۵

انتگرال $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را برای سطح مثلثی شکل ۲۲ و تابع $\mathbf{F} = 2\hat{x}$ به دست آورید.



اگر سطح به صورت $z = f(x, y)$ داده شده باشد، داریم

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (55)$$

حل

بخشی اصلی این مسئله تعیین ds است. سطح مورد نظر را می توان با رابطه $z = a - x - \frac{y}{4}$ بیان کرد. پس به کمک معادله (55) می توانیم بنویسیم

$$ds = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{16}} dx dy = \frac{5}{4} dx dy \quad (56)$$

ولی چون ds را می خواهیم باید بردار یکه عمود بر سطح را نیز به دست آوریم. می دانیم که حاصلضرب خارجی بردارهای AC و CB بر این سطح عمودند. پس بردار یکه عمود بر سطح عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2a\hat{y} - a\hat{x}) \times (-2a\hat{y} + a\hat{z}) \\ &= 2a^2\hat{x} + a^2\hat{y} + 2a^2\hat{z} \end{aligned}$$

و سرانجام

$$d\mathbf{s} = ds \hat{\mathbf{n}} = \left(\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} + \hat{z}\right) dx dy$$

حال به سراغ انتگرال می رویم

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2a} \int_0^{a-\frac{y}{4}} \frac{a}{4} dx dy = 2a^2$$

توجه کنید که برای پوشاندن سطح توسط ds ، حدود x و y باید به چه صورتی باشد.

مثال ۱۶

در ناحیه محدود به سطوح $2x + 2y + z = 4$ و $z = 0, y = 0, x = 0$ چگالی بار الکتریکی $\rho = 2x$ است. بار الکتریکی داخل این ناحیه را بیابید.

حل

شکل ۲۲ را با $A(2, 0, 0), B(0, 0, 4), C(0, 2, 0)$ در نظر بگیرید. فضای زیر این سطح مثلثی حجم مورد نظر را نشان می‌دهد. باید $\int \rho dv$ را در این حجم حساب کنیم. عنصر حجم $dx dy dz$ است. تنها نکته قرار دادن درست حدود انتگرال است، به نحوی که این حجم به صورت زیر پوشیده شود.

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho dv = \iiint 2x dx dy dz \\ &= 2 \int_0^2 x dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{4-2x-2y} dz \\ &= 2 \int_0^2 x dx \int_0^{2-x} (4 - 2x - 2y) dy \\ &= 2 \int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3) dx = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

مثال ۱۷

میدان برداری $\mathbf{V} = r\hat{\mathbf{r}}$ و نیمکره $r < 1, z > 0$ را در نظر بگیرید. $\int \mathbf{V} dv$ را حساب کنید.

حل

برای پوشاندن حجم مورد نظر r از ۰ تا ۱، φ از ۰ تا 2π ، و θ از ۰ تا $\pi/2$ تغییر کند. ولی قبل از محاسبه باید بردار $\hat{\mathbf{r}}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنیم، زیرا انتگرالده بردارست و چون جهت آن تغییر می‌کند، نمی‌توان تنها اندازه بردارها را با هم جمع کرد

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\int \mathbf{V} dv = \int (r^3 \sin^3 \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + r^3 \sin^3 \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + r^3 \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) d\theta d\varphi dr$$

چون انتگرال $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ در فاصله ۰ تا 2π صفرست، مولفه‌های x و y این انتگرال صفرست

$$\int \mathbf{V} dv = \hat{\mathbf{z}} \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \hat{\mathbf{z}}$$

مثال ۱۸

انتگرال مثال ۱۱ را به کمک قضیه استوکس حساب کنید.

حل

با توجه به قضیه استوکس به جای محاسبه انتگرال مسیر می توانیم انتگرال $\nabla \times \mathbf{F}$ را روی سطح کروی که ربع دایره محیط آن را تشکیل می دهند، حساب کنیم. ابتدا $\nabla \times \mathbf{F}$ را به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= kr \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{\mathbf{r}} - 3r \hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

عناصر سطح $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{r}}$ است. پس

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int k R^2 \cos \theta d\theta d\varphi = \frac{\pi k R^2}{2}$$

۱۷-۱ اگر $\mathbf{F} = (y - 2x)\hat{\mathbf{x}} + (3x + 2y)\hat{\mathbf{y}}$ و C دایره ای به مرکز مبدا و به شعاع ۲ (در صفحه xy) باشد، $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ را حساب کنید.

۱۷-۱ حل مسئله در مختصات استوانه ای ساده ترست. در دستگاه مختصات استوانه ای

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

روی مسیر داده شده تنها φ تغییر می کند و $\rho = 2$ پس $d\mathbf{l} = 2 d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ و

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2 d\varphi (y - 2x)(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) + 2 d\varphi (3x + 2y)(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

چون $y = 2 \sin \varphi$ و $x = 2 \cos \varphi$ ، $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \cos \varphi$ ، $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \varphi$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2 d\varphi [(2 \sin \varphi - 4 \cos \varphi)(-\sin \varphi) + (6 \cos \varphi + 4 \sin \varphi)(\cos \varphi)]$$

$$= (-4 \sin^2 \varphi + 16 \sin \varphi \cos \varphi + 12 \cos^2 \varphi) d\varphi$$

و سرانجام

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + 16 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + 12 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= -4\pi + 0 + 12\pi = 8\pi\end{aligned}$$

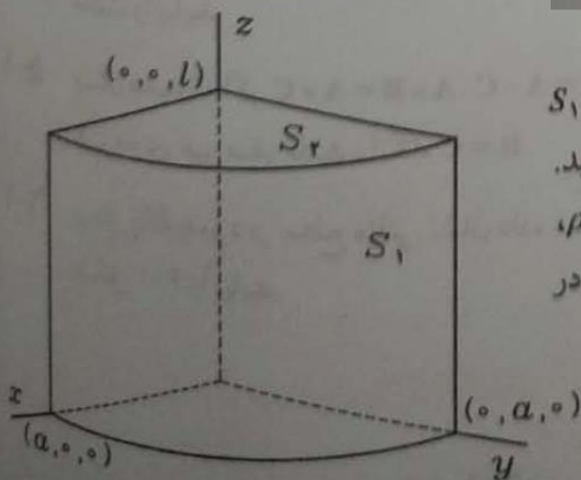
۱۸-۱ میدان برداری $\mathbf{F} = (x+y)\hat{\mathbf{x}} + (-x+y)\hat{\mathbf{y}} - 2z\hat{\mathbf{z}}$ را در نظر گرفته، $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را روی نیمکره
 $0 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi, r=R$ بیابید.

۱۸-۱ عنصر سطح عبارت است از

$$d\mathbf{s} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{r}}$$

حال باید $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را حساب کنیم. چون $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta$, $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \varphi$, $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \varphi$ و $z = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$ با کمی عملیات جبری به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= R^2 (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta d\varphi \\ \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right\} \\ &= 2\pi R^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$



۱۹-۱ اگر $\mathbf{F} = z\hat{x} + x\hat{y} - 3y^2z\hat{z}$ ، شاری را که از سطح S_1 نشان داده شده در شکل ۱۹-۱ می‌گذرد را بیابید. بخشی از یک استوانه است که با روابط $\rho = 4$ ، $0 \leq z \leq 5$ ، $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ تعریف می‌شود. یعنی در شکل ۱۹-۱، $a = 4$ و $l = 5$.

شکل ۱۹-۱

۱۹-۱ در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$d\mathbf{s} = \rho d\varphi dz \hat{\rho} = 4 d\varphi dz \hat{\rho} = ds \hat{\rho}$$

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\rho} = z(\hat{x} \cdot \hat{\rho}) + x(\hat{y} \cdot \hat{\rho}) - 3y^2z(\hat{z} \cdot \hat{\rho})$$

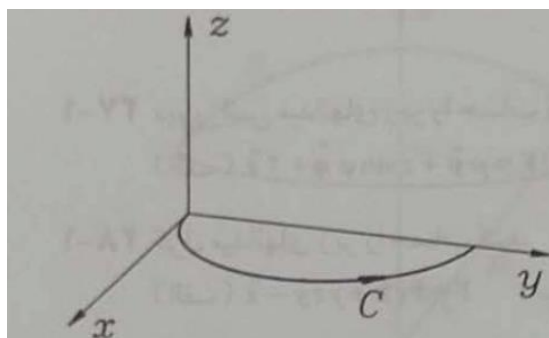
$$= z \cos \varphi + x \sin \varphi - 0$$

$$= z \cos \varphi + 4 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F} \cdot \hat{\rho} ds = \int_0^5 \int_0^{\pi/2} 4(z \cos \varphi + 4 \cos \varphi \sin \varphi) dz d\varphi$$

$$= 4 \int_0^5 z dz \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi + 16 \int_0^5 dz \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$$

$$= 4 \times \frac{25}{2} \times 1 + 16 \times 5 \times \frac{1}{2} = 90$$



شکل ۲۰-۱

۲۰-۱ مسیر نشان داده شده در شکل ۲۰-۱ یک نیمدایره به شعاع یک و مرکز $(0, 1, 0)$ است. انتگرال میدان برداری

$$\mathbf{A} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin \varphi \cos \varphi \hat{\phi} + \rho^2 \cos^2 \varphi \hat{z}$$

را بر روی این مسیر بیابید. میدان $\mathbf{A}$ در مختصات استوانه‌ای بیان شده است.

۲۰-۱ عنصر طول در مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \rho^2 z d\rho + \sin \varphi \cos \varphi \rho d\varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi dz$$

پس

معادله مسیر در مختصات استوانه‌ای $\rho = 2 \sin \varphi$ است. همچنین بر روی این مسیر $z = 0$ پس

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \rho d\varphi + \int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos^2 \varphi dz$$

انتگرال دومی صفرست. در انتگرال اولی به جای ρ مقدار آن یعنی $2 \sin \varphi$ را می‌گذاریم، پس

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۲۱-۱ اگر $F = 3x^2\hat{x} + 4xy\hat{y}$ ، انتگرال خط $F \cdot d\mathbf{l}$ را روی مسیری با معادلات پارامتری $x = 2\cos t$ ، $y = 3\sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) بیابید.

۲۱-۱ داریم

$$F \cdot d\mathbf{l} = 3x^2 dx + 4xy dy = 12 \cos^2 t dx + 24 \cos t \sin t dy$$

$$dx = -2 \sin t dt, \quad dy = 3 \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \int F \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^\pi 48 \cos^2 t \sin t dt \\ &= -16 \cos^3 t \Big|_0^\pi = 32 \end{aligned}$$

پس

۲۲-۱ انتگرال میدان برداری

$$F = 10x\hat{x} - 5x^2y\hat{y} + 3yz^2\hat{z}$$

را روی مسیری که از برخورد سطوح $y = x^2$ و $z = 1$ به دست می آید، از نقطه $P_1(0, 0, 1)$ تا نقطه $P_2(2, 4, 1)$ محاسبه کنید.

۲۲-۱ مسئله را در دستگاه مختصات قائم حل می کنیم

$$F \cdot d\mathbf{l} = 10x dx - 5x^2y dy + 3yz^2 dz$$

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 10x dx - \int_0^4 5x^2y dy + \int_1^1 3yz^2 dz$$

در محاسبه انتگرال دوم از این مطلب که $x^2 = y$ استفاده می کنیم

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot d\mathbf{l} = 5x^2 \Big|_0^2 - \frac{5}{3}y^3 \Big|_0^4 + 0 = 20 - 106\frac{2}{3} = -86\frac{2}{3}$$

۲۳-۱ در کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات باری با چگالی غیر ثابت $\rho = k(a - z)$ C/m^3 توزیع شده است. کل بار داخل کره را بیابید.

۲۳-۱ مسئله را در دستگاه مختصات کروی حل می‌کنیم

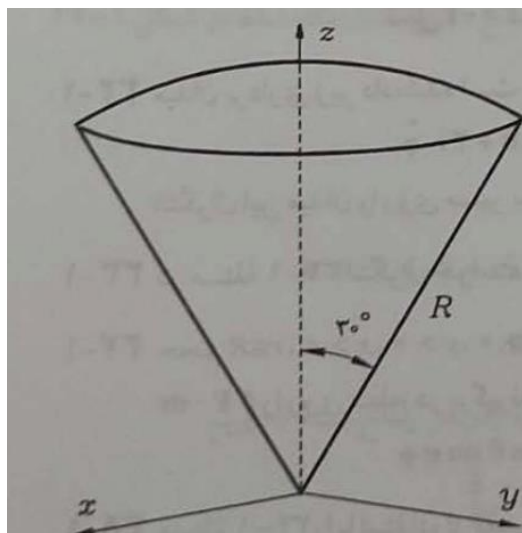
$$Q = \int \rho \, dv = \int k(a - z) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= k \int \int \int (a - r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi k \int_0^a r^2 \int_0^\pi (a - r \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi k \int_0^a r^2 \left(-a \cos \theta + \frac{1}{2} r \cos^2 \theta \right) \Big|_0^\pi \, dr$$

$$= 2\pi k \int_0^a r^2 \, dr = \frac{2}{3} \pi k a^3$$



۲۴-۱ حجم نشان داده شده در شکل ۲۴-۱ حجم تعریف

شده به صورت $0 < \theta \leq \pi/6, 0 < \varphi \leq 2\pi, r \leq R$

است. این حجم شبیه یک بستنی قیفی است که یک

استاد ریاضی آن را به دقت پر کرده باشد! تابع برداری

زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{F} = r^2 \sin \theta \hat{\mathbf{r}} + 4r^2 \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \tan \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را روی سطح بسته در بر دارنده

حجم بیان شده در بالا بیابید.

شکل ۲۴-۱

۲۴-۱ روی بخش کروی سطح $d\mathbf{s}_1 = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{r}}$ و

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_1 = R^2 \sin \theta r^2 d\theta d\varphi$$

که در آن باید بگذاریم $r = R$. پس

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_1 &= R^2 \int_0^{\pi/6} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= R^2 \times 2\pi \times \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/6} \\ &= \pi R^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

روی بخش مخروطی، $d\mathbf{s}_2 = r \sin \theta dr d\varphi \hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_2 = 4R^2 \cos \theta \sin \theta dr d\varphi$$

که در آن داریم $\theta = \pi/6$. پس

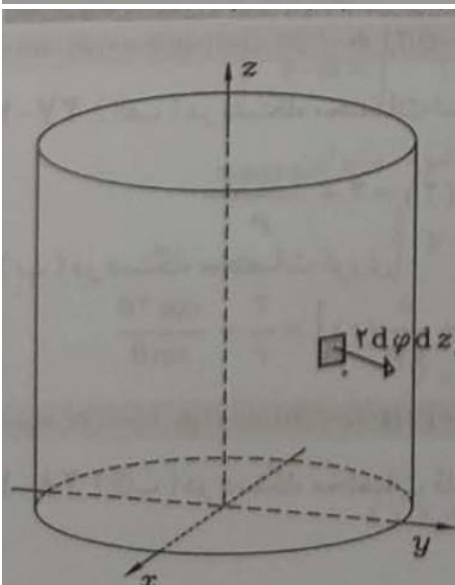
$$\begin{aligned} \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_2 &= 4 \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr \\ &= 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{\sqrt{3} \pi R^3}{2} \end{aligned}$$

سرانجام

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pi R^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

۲۵-۱ سطح S بخشی از استوانه‌ای به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ است، که قاعده آن در صفحه xy قرار دارد و محور آن روی محور z واقع است. $\oint F \cdot ds$ را به ازای میدان برداری زیر حساب کنید.

$$F = xy\hat{x} - yz\hat{y} + 3\hat{z}$$



۲۵-۱ روی سطح جانبی داریم $ds_1 = 2d\phi dz \hat{\rho}$ و

$$F \cdot ds_1 = [xy(\hat{x} \cdot \hat{\rho}) - yz(\hat{y} \cdot \hat{\rho}) + 3(\hat{z} \cdot \hat{\rho})] 2d\phi dz$$

$$= (xy \cos \phi - yz \sin \phi) 2d\phi dz$$

شکل ۲۵-۱

روی این سطح $x = 2 \cos \phi$ و $y = 2 \sin \phi$ پس

$$F \cdot ds_1 = (8 \sin \phi \cos^2 \phi - 4z \sin^2 \phi) d\phi dz$$

$$\int F \cdot ds_1 = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2 \sin \phi \cos^2 \phi - z \sin^2 \phi) dz d\phi$$

انتگرال جمله اول صفرست، پس

$$\int F \cdot ds_1 = -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_0^2 z dz = -4 \times \pi \times 2 = -8\pi$$

روی سطح بالایی $ds_2 = \rho d\rho d\phi \hat{z}$ و $F \cdot ds_2 = 3\rho d\rho d\phi$

$$\int F \cdot ds_2 = 3 \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 12\pi$$

روی سطح پایینی $ds_3 = -\rho d\rho d\phi \hat{z}$ ، پس روی این سطح انتگرال مقدار منفی انتگرال روی سطح پایینی،

یعنی -12π است. سرانجام

$$\oint F \cdot ds = -8\pi + 12\pi - 12\pi = -8\pi$$

۲۶-۱ گرادینان میدانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $f = 5x + 10xz - xy + 6$ (ب) $g = 2r \cos \theta - 5\varphi + 2$ (کروی)

(ج) $h = 2 \sin \varphi - \rho z + 4$ (استوانه‌ای)

۲۶-۱ (الف) در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} = (5 + 10z - y) \hat{x} - x \hat{y} + 10x \hat{z}$$

(ب) در دستگاه مختصات کروی

$$\begin{aligned} \nabla g &= \frac{\partial g}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \hat{\phi} \\ &= 2 \cos \theta \hat{r} - 2 \sin \theta \hat{\theta} - \frac{5}{r \sin \theta} \hat{\phi} \end{aligned}$$

(ج) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\phi} + \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} \\ &= -z \hat{\rho} + \frac{2}{\rho} \cos \varphi \hat{\phi} - \rho \hat{z} \end{aligned}$$

۲۷-۱ دیورژانس میدانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $F = \rho \hat{\rho} + z \sin \varphi \hat{\phi} + 2 \hat{z}$ (استوانه‌ای) (ب) $G = 2 \hat{r} + r \cos \theta \hat{\theta} + r \hat{\phi}$ (کروی)

۲۷-۱ (الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z \sin \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (2) = 2 + \frac{z \cos \varphi}{\rho}$$

(ب) در دستگاه مختصات کروی

$$\nabla \cdot G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (2r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r) \right] = \frac{4}{r} + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$$

۲۸-۱ کرل میدانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\mathbf{F} = xy\hat{x} + yz\hat{y} - \hat{z}$ (ب) $\mathbf{G} = 2\hat{\rho} + \sin\varphi\hat{\phi} - z\hat{z}$ (استوانه‌ای)

۲۸-۱ (الف) در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & -1 \end{vmatrix} = -y\hat{x} - x\hat{z}$$

(ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\hat{\rho} & \hat{\phi} & \frac{1}{\rho}\hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2 & \rho \sin\varphi & -z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \sin\varphi \hat{z}$$

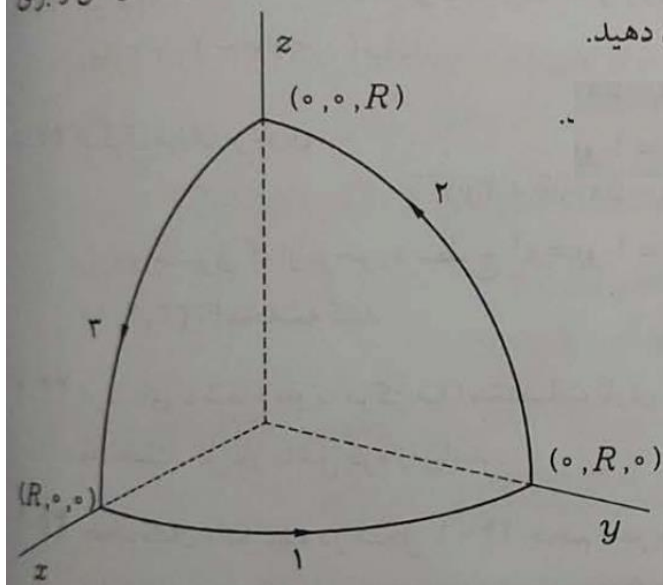
۲۹-۱ کرل تابع برداری $\mathbf{A} = 5e^{-\rho} \cos\varphi\hat{\phi} - 5\cos\varphi\hat{z}$ را روی صفحه xz بیابید.

۲۹-۱ در مختصات استوانه‌ای

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{z} \\ &= \frac{5 \sin\varphi}{\rho} \hat{\rho} - \frac{5e^{-\rho} \sin\varphi}{\rho} \hat{z} \end{aligned}$$

چون در صفحه xz ، $\varphi = 0$ پس $\nabla \times \mathbf{A} = 0$.

۳۰-۱ سطح نشان داده شده در شکل ۳۰-۱ یک هشتم کره‌ای به شعاع R واقع در فضای $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ است. جهت لبه این سطح را به صورت نشان داده شده برگزینید و صحت قضیه استوکس را برای این سطح و تابع برداری $\mathbf{F} = 2r^2 \hat{\phi}$ نشان دهید.



شکل ۳۰-۱

۳۰-۱ باید نشان دهیم که انتگرال $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته C با انتگرال $\nabla \times \mathbf{F}$ روی سطح برابر است. مسیر C را به سه بخش تجزیه کرده، انتگرال $\mathbf{F}$ را روی هر یک به دست می‌آوریم. ربع دایره واقع در صفحه $z=0$ ، C_1 ، ربع دایره واقع در صفحه $y=0$ ، C_2 ، و ربع دایره واقع در صفحه $x=0$ است. در دستگاه مختصات کروی داریم

$$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

پس

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2r^2 \sin \theta d\phi$$

روی C_1 داریم $r=R$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ پس

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} 2R^2 \sin \frac{\pi}{2} d\phi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2$$

روی C_2 و C_3 چون ϕ تغییر نمی‌کند انتگرال نسبت به ϕ صفر می‌شود. بنابراین

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi R^2 + 0 + 0 = 4\pi R^2$$

با استفاده از رابطه کرل در مختصات کروی به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = 2r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{r} - 2r \hat{\theta}$$

روی سطح S ، $r=R$ و $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$ پس

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = 2R^2 \cos \theta d\theta d\phi$$

و سرانجام

$$\oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \gamma R^2 \cos \theta d\theta d\varphi = \pi R^2$$

۳۱-۱ مسئله ۱-۳۰ را با تابع $\mathbf{F} = \hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi}$ تکرار کنید.

۳۱-۱ اکنون داریم

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dr + r d\theta + r \sin \theta d\phi$$

C_1, C_2 و C_3 را به صورت بیان شده در حل مسئله ۱-۳۰ برمی‌گزینیم. روی C_1 داریم $r=R$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ پس

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_R^R dr + \int_{\pi/4}^{\pi/4} R d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/4} R \sin \frac{\pi}{4} d\phi \\ &= 0 + 0 + R \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

روی C_2 داریم $r=R$ و $\phi = \frac{\pi}{4}$ پس

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_R^R dr + \int_{\pi/4}^{\pi/4} R d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/4} R \sin \frac{\pi}{4} d\phi \\ &= 0 + (-R \frac{\pi}{4}) + 0 = -R \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

روی C_3 داریم $r=R$ و $\phi = 0$ پس

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_R^R dr + \int_{\pi/4}^{\pi/4} R d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/4} R \sin \frac{\pi}{4} d\phi \\ &= 0 + R \frac{\pi}{4} + 0 = R \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = R \frac{\pi}{4} - R \frac{\pi}{4} + R \frac{\pi}{4} = R \frac{\pi}{4}$$

چون روی سطح S بردار $d\mathbf{s}$ در جهت $\hat{r}$ است، تنها مولفه r کرل $\mathbf{F}$ را نیاز داریم

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{r} = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta}$$

پس

$$\begin{aligned} \oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\pi/4}^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/4} r \cos \theta d\theta d\phi \\ &= R \int_{\pi/4}^{\pi/4} d\phi \int_{\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta = R \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

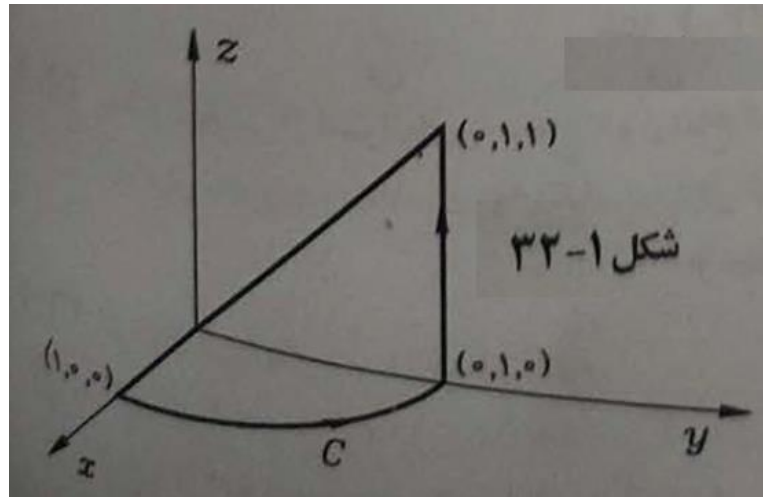
۳۲-۱ میدان برداری زیر داده شده است

$$\mathbf{F} = (r \cos^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} - (r \sin \theta \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + 3r \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

انتگرال این میدان را روی مسیر بسته مشخص شده در شکل ۳۲-۱ بیابید.

۳۲-۱ مسیر بسته از چهار بخش تشکیل شده است؛ بخش اول پاره خط روی محور x و بخش دوم روی ربع دایره واقع در صفحه $z = 0$ ؛ روی این دو بخش $\theta = 90^\circ$ و مولفه های r و θ میدان صفرست. پس بر روی این دو بخش

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = 3r \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot r \sin \theta d\boldsymbol{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = 3r^2 d\boldsymbol{\phi}$$



بر روی بخش اول φ از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند، پس حاصل انتگرال صفرست. بر روی بخش دوم (ربع دایره)

$$r=1$$

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\pi/4} 3 d\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

بخش سوم مسیر خط عمودی واقع در صفحه $x=0$ است. بر روی این بخش $d\mathbf{l} = dz \hat{\mathbf{z}}$. پس

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= (r \cos^2 \theta) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) dz - (r \sin \theta \cos \theta) (\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) dz + 3r (\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) dz \\ &= r \cos^2 \theta (\cos \theta) dz - (r \sin \theta \cos \theta) (-\sin \theta) dz + 3r (0) dz \\ &= r \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dz = z dz \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 z dz = \frac{1}{2}$$

در بخش چهارم مسیر $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، و

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = r \left(\frac{1}{r} \right) dr - r \left(\frac{1}{r} \right) r d\theta + 3r^2 \sin \theta d\varphi$$

چون روی این مسیر θ و φ تغییر نمی‌کنند، حاصل انتگرال جملات دوم و سوم صفرست و

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^0 r dr = -\frac{1}{2}$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = 0 + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

۳۳-۱ در مسئله ۳۲-۱ انتگرال خواسته شده را با استفاده از قضیه استوکس بیابید.

۳۳-۱ ابتدا کرل F را به دست می آوریم

$$\nabla \times F = 3 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{r} - 6 \hat{\theta}$$

بر روی بخش ربع دایره ای واقع در صفحه $z = 0$

$$ds_1 = r dr d\varphi (-\hat{\theta})$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (\nabla \times F) \cdot ds_1 &= 6 \int \int r dr d\varphi \\ &= 6 \int_0^1 r dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

عنصر سطح بر روی بخش مثلثی واقع در صفحه $x = 0$ عبارت است از

$$ds_2 = r d\theta dr (-\hat{\phi})$$

پس $(\nabla \times F) \cdot ds_2$ صفر می شود و حاصل انتگرال همان مقدار $3\pi/2$ است که با نتیجه به دست آمده در مسئله ۳۲-۱ منطبق است. توجه کنید که جهت عناصر سطح با توجه به جهت مسیر تعیین شده است.

۳۴-۱ حجم $z > 0, y > 0, x > 0, r \leq R$ یک هشتم کره‌ای به شعاع R است (شکل ۱-۳۰ را ببینید).

$\oint F \cdot ds$ را روی سطح در برگیرنده این حجم به دست آورید. F به صورت زیر است

$$F = r^2 \cos \theta \hat{r} + r^2 \cos \varphi \hat{\theta} - r^2 \cos \theta \sin \varphi \hat{\phi}$$

۳۴-۱ سطوح در برگیرنده حجم مورد نظر عبارت‌اند از: S_1 ، یک هشتم سطح کره $r = R$ ؛ S_2 ربع دایره واقع

در صفحه $z = 0$ ؛ S_3 ربع دایره واقع در صفحه $y = 0$ ؛ و S_4 ربع دایره واقع در صفحه $x = 0$. روی سطح S_1

$$F \cdot ds_1 = F \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} = R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

داریم

$$\int F \cdot ds_1 = R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = R^2 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi R^2}{4}$$

روی سطح S_2 داریم

$$F \cdot ds_2 = F \cdot r dr d\varphi \hat{\theta} = r^2 \cos \varphi dr d\varphi$$

$$\int F \cdot ds_2 = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{R^3}{3} \times 1 = \frac{R^3}{3}$$

و روی سطح S_3 داریم

$$F \cdot ds_3 = F \cdot r dr d\theta (-\hat{\phi}) = r^2 \cos \theta \sin \varphi dr d\theta = 0$$

زیرا روی این سطح $\varphi = 0$. روی سطح S_4

$$F \cdot ds_4 = F \cdot r dr d\theta \hat{\phi} = -r^2 \cos \theta \sin \varphi dr d\theta$$

روی این سطح $\varphi = \frac{\pi}{2}$ و $\sin \varphi = 1$ پس

$$\int F \cdot ds_4 = - \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = - \frac{R^3}{3} \times 1 = - \frac{R^3}{3}$$

و سرانجام

$$\oint F \cdot ds = \frac{\pi R^2}{4} + \frac{R^3}{3} + 0 - \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^2}{4}$$

۳۵-۱ مسئله ۱-۳۴ را با استفاده از قضیه دیورژانس حل کنید.

۳۵-۱ ابتدا $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را می یابیم

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= 4r \cos \theta + r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi - r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi = 4r \cos \theta\end{aligned}$$

حال

$$\begin{aligned}\int (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv &= \int \int \int 4r \cos \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= 4 \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = 4 \times \frac{R^3}{3} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi R^3}{3}\end{aligned}$$

۳۶-۱ میدان برداری $\mathbf{A} = -2\hat{x} - 2x\hat{y} + \hat{z}$ و سطح مخروطی $\theta = \pi/4$ ، $0 < r < 2\sqrt{2}$ را در نظر گرفته، $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ را روی این سطح حساب کنید.

۳۶-۱ بر روی سطح مخروطی $d\mathbf{s}$ عبارت است از

$$d\mathbf{s} = r \sin \theta dr d\varphi \hat{\theta}$$

همچنین $\hat{x} \cdot \hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi$ ، $\hat{y} \cdot \hat{\theta} = \cos \theta \sin \varphi$ و $\hat{z} \cdot \hat{\theta} = -\sin \theta$ پس

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = r \sin \theta (-2 \cos \theta \cos \varphi - 2x \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta) dr d\varphi$$

چون $x = r \sin \theta \cos \varphi$ و $\theta = \pi/4$ داریم

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = r \frac{1}{\sqrt{2}} (-2 \cos \varphi - \sqrt{2} r \sin \varphi \cos \varphi - 1) dr d\varphi$$

پس

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = - \int \int r \cos \varphi dr d\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \int r \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \int r dr d\varphi$$

در این انتگرالها از ۰ تا $2\sqrt{2}$ تغییر می کند. حاصل دو انتگرال اول صفرست زیرا

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

سرانجام خواهیم داشت

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = - \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi) (4) = -4\pi$$

۳۷-۱ صحت قضیه استوکس را در مورد میدان برداری $\mathbf{A} = x\hat{x} + x\hat{y} + 2xy\hat{z}$ بر روی سطح نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ با نشان دهید.

۳۷-۱ لبه این سطح دایره‌ای به شعاع ۲ در صفحه xy است. در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

روی این مسیر $\rho = 2$ و در جهت‌های ρ و z تغییری وجود ندارد. پس $d\mathbf{l} = 2 d\varphi \hat{\phi}$ و

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2 d\varphi (-x \sin \varphi + x \cos \varphi + 0)$$

و چون $x = 2 \cos \varphi$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 4 d\varphi (-\cos \varphi \sin \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2\pi}^0 4 (-\cos \varphi \sin \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = -4\pi$$

حال کرل میدان برداری را می‌یابیم

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2x\hat{x} - 2y\hat{y} + \hat{z}$$

بردار عمود بر سطح کره $\hat{\mathbf{r}}$ است که در دستگاه مختصات قائم می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{1}{r}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = x^2 - y^2 + \frac{1}{r}z$$

چون روی سطح نیمکره $r = 2$. روی این سطح $x = 2 \sin \theta \cos \varphi$ ، $x = 2 \sin \theta \sin \varphi$ و $z = 2 \cos \theta$. پس

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 4 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta$$

همچنین $ds = 4 \sin \theta d\theta d\varphi$ پس

$$\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot ds \hat{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (4 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \theta) d\theta d\varphi$$

چون انتگرال $\cos^2 \varphi$ روی یک دوره تناوب صفر است، انتگرال جمله اول صفر می‌شود. سرانجام

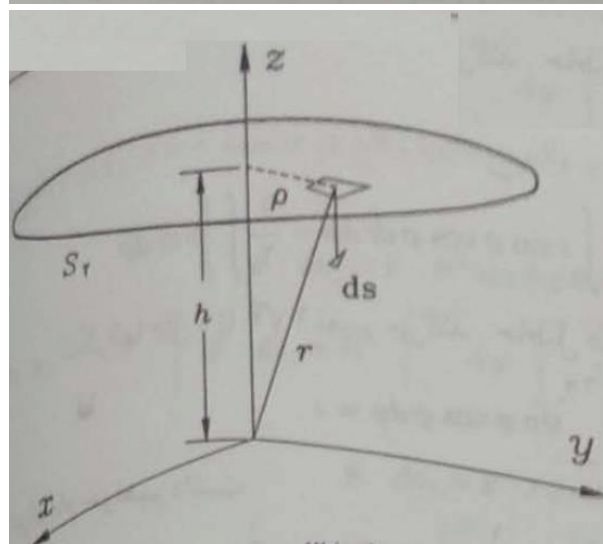
$$\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot ds \hat{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \sin^2 \theta d\theta = 2 \times 2\pi \times (-1) = -4\pi$$

به ارتباط جهت سطح و جهت لبه توجه کنید.

۳۸-۱ سطح بسته S نشان داده شده در شکل ۳۸-۱ بخشی از کره‌ای به شعاع R ، که برای آن $\theta \leq \theta_0$ ، و یک دایره به شعاع $R \sin \theta_0$ است. میدان برداری زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{D} = \frac{K_1}{r} \hat{\phi} - \frac{K_2}{r \sin \theta} \hat{\theta}$$

$\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ را بیابید.



شکل ح ۳۸-۱

۳۸-۱ بخش کروی سطح S را S_1 و بخش مسطح آن را S_2 می‌نامیم. روی بخش S_1 داریم

$$d\mathbf{s}_1 = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

پس $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}_1 = 0$ و انتگرال روی سطح S_1 صفر است.

روی سطح S_2

$$d\mathbf{s}_2 = -\rho \, d\rho \, d\phi \, \hat{z}$$

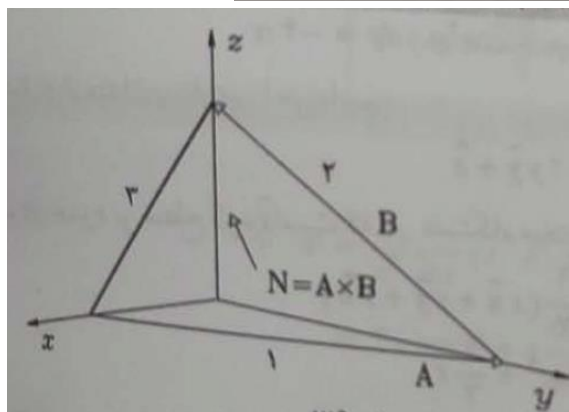
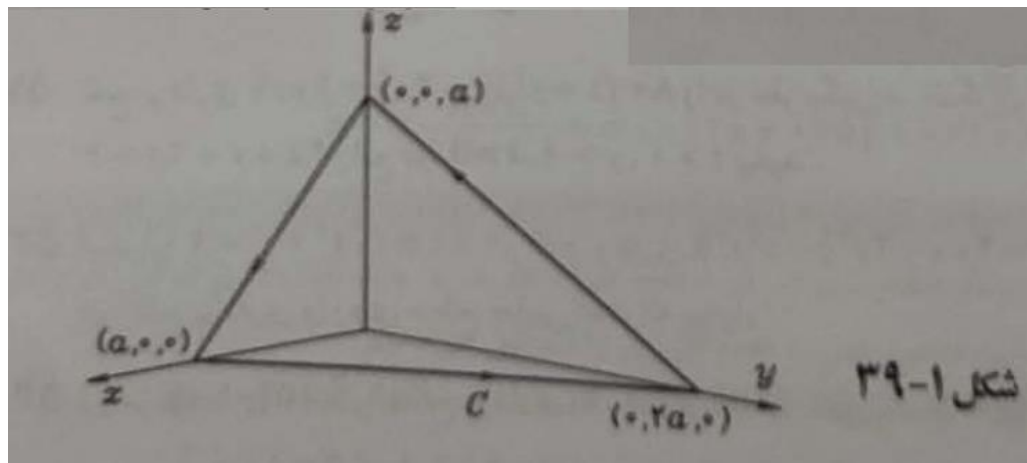
$$\hat{z} \cdot \hat{\theta} = -\sin \theta \text{ و } \hat{z} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{K_2 \rho \, d\rho \, d\phi}{r \sin \theta} (-\sin \theta) = -\frac{K_2 \rho \, d\rho \, d\phi}{r}$$

با توجه به شکل ح ۳۸-۱ می‌بینیم که $h = R \cos \theta$ و روی سطح S_2 داریم $r = (h^2 + \rho^2)^{1/2}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}_2 &= -K_2 \int \int \frac{\rho \, d\rho \, d\phi}{(h^2 + \rho^2)^{1/2}} = -K_2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R \sin \theta_0} \frac{\rho \, d\rho}{(h^2 + \rho^2)^{1/2}} \\ &= -2\pi K_2 (h^2 + \rho^2)^{1/2} \Big|_0^{R \sin \theta_0} = -2\pi K_2 R \cos \theta_0 \end{aligned}$$

۳۹-۱ صحت قضیه استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{A} = y\hat{z}$ و سطح مثلثی نشان داده شده در شکل ۳۹-۱ نشان دهید.



۱-۳۹ رابه سه بخش تقسیم می کنیم . معادله

بخشهای مختلف به صورت زیر است :

$$1: y = 2a - x$$

$$2: y = 2a - 2z$$

$$3: z = a - x$$

و $A \cdot dl = y dz$ پس

$$\begin{aligned} \oint A \cdot dl &= \int_1 y dz + \int_2 y dz + \int_3 y dz \\ &= \int_0^a y dz + \int_0^a (2a - 2z) dz + \int_0^0 0 dz \\ &= 0 + 2az - z^2 \Big|_0^a + 0 = a^2 \end{aligned}$$

حاصلضرب دو بردار A و B در جهت عمود بر سطح مثلثی است

$$N = A \times B = (2a\hat{y} - a\hat{x}) \times (-2a\hat{y} + a\hat{z}) = 2a^2\hat{x} + a^2\hat{y} + 2a^2\hat{z}$$

$$\hat{n} = \frac{N}{|N|} = \frac{N}{3a^2} = \frac{2}{3}\hat{x} + \frac{1}{3}\hat{y} + \frac{2}{3}\hat{z}$$

معادله سطح مثلثی عبارت است از $2x + y + 2z - 2a = 0$. از درس ریاضی به یاد دارید که عنصر سطح روبه

$z = f(x, y)$ برابر است با

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

پس

$$ds = \sqrt{1 + 0 + 1} dx dy \hat{n} = \sqrt{2} dx dy \hat{n} = \left(\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} + \hat{z}\right) dx dy$$

همچنین داریم $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x}$ و سرانجام

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\sqrt{2}a} \int_0^{a-y/\sqrt{2}} dx dy = \int_0^{\sqrt{2}a} \left(a - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) dy = \sqrt{2}a^2$$

۴۱-۱ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت باشد نشان دهید که $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{A}$ $\mathbf{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

۴۱-۱ داریم $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = xA_x\hat{x} + yA_y\hat{y} + zA_z\hat{z}$ که در آن A_x, A_y, A_z مقادیر ثابتی هستند

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}) &= \frac{\partial}{\partial x}(xA_x\hat{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(yA_y\hat{y}) + \frac{\partial}{\partial z}(zA_z\hat{z}) \\ &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

۴۲-۱ نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$ و $\nabla \times \mathbf{R} = 0$ $\mathbf{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

۴۲-۱ به سادگی به دست می آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

دهید که $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R})$ بردار $\mathbf{R} = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$ برداری است که به آن نقطه (x', y', z') و سر آن نقطه (x, y, z) است. این بردار در الکترومغناطیس کاربرد زیادی دارد و در بسیاری از روابط ظاهر می شود. نشان دهید که

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) = - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

۴۵-۱ تابع $1/|\mathbf{R}|$ عبارت است از

$$\frac{1}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

داریم

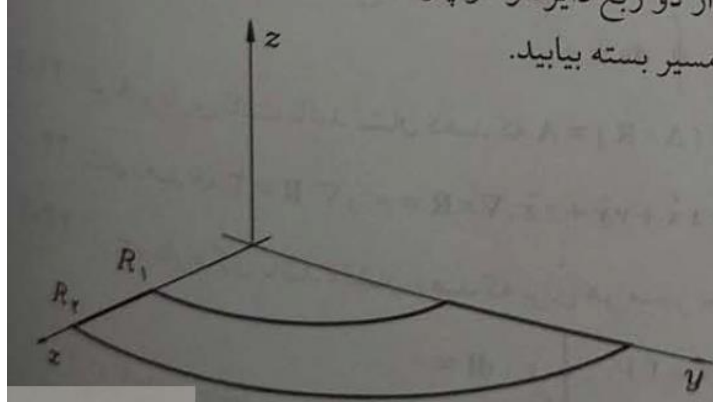
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) = \frac{-(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x-x')}{|\mathbf{R}|^3}$$

با توجه به یکسان بودن روابط برای y و z داریم

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) \hat{z} \\ &= \frac{-(x-x')}{|\mathbf{R}|^3} \hat{x} + \frac{-(y-y')}{|\mathbf{R}|^3} \hat{y} + \frac{-(z-z')}{|\mathbf{R}|^3} \hat{z} = - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{aligned}$$

$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{P}$

۵۰-۱ مسیر نشان داده شده در شکل ۵۰-۱ از دو ربع دایره و دو پاره خط تشکیل شده است. انتگرال تابع برداری $\mathbf{V} = (1/\rho)\hat{\phi}$ را روی این مسیر بسته بیابید.



شکل ۵۰-۱

۵۰-۱ پس $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = d\phi$

$$\int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} d\phi + \int_0^{\pi/2} d\phi + \int_{\pi/2}^{\pi} d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} d\phi = 0 + \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$

موفق باشید، افسحی