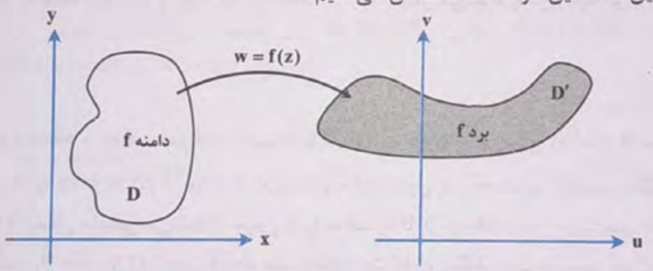
مدرسان شریف

فصل دوم

« نگاشت »

تعریف نگاشت

از درس ریاضی عمومی و حتی از دوره‌ی دبیرستان می‌دانیم برای توابع حقیقی، تابع به صورت $y = f(x)$ نوشته می‌شد و نمایش هندسی آن در صفحه‌ی xoy انجام می‌گرفت. اما در مورد توابع مختلط انجام چنین کاری (یعنی رسم نمودار تابع در یک صفحه) ممکن نیست، چون برای رسم نمودار به یک فضا آن هم از نوع چهار بعدی نیاز داریم که بدیهی است امکان ندارد. برای اینکه خودِ z (که متغیر ورودی یا دامنه‌ی تابع مختلط $w = f(z)$ است) به دو متغیر حقیقی x و y وابسته است و تابع $w = u + iv$ که خروجی تابع یا همان برد تابع $f(z)$ است، به دو متغیر که خود به x و y وابسته هستند، بستگی دارد. برای حل این مشکل ما اطلاعات خود را در مورد تابع، با رسم دو صفحه‌ی مختلف (و البته مختلط)، یکی برای مقادیر z و دیگری برای مقادیر w و مشخص کردن تناظر بین نقاط این دو صفحه مشخص می‌کنیم:



همانطورکه در شکل فوق می‌بینید، تابع f نقاط ناحیه D را در صفحه z، به نقاط ناحیه D' در صفحه‌ی w تبدیل می‌کند. به تابع $w = f(z)$ یک نگاشت می‌گوییم هرگاه توسط آن، نقاط ناحیه‌ی D از صفحه‌ی $x-y$ به نقاط ناحیه‌ی D' از صفحه‌ی $u-v$ تبدیل شوند. برای مثال نگاشت $w = z^2$، نقطه‌ی $z = 1+i$ از صفحه‌ی $x-y$ را به نقطه‌ی $2i$ در صفحه‌ی $u-v$ تبدیل می‌کند:

$$w = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \xrightarrow[x=1,\, y=1]{z=1+i} w = 1^2 - 1^2 + 2i \times 1 \times 1 = 2i$$

گاهی از کلمه‌ی «تبدیل» و یا «تابع» نیز برای نگاشت استفاده می‌کنیم.

نگاشت همدیس (حافظ زاویه)

هرگاه تحت نگاشت $w = f(z)$ هر زاویه با رأس z_0 از صفحه $x-y$ بدون هیچ‌گونه تغییری از نظر اندازه و جهت، به زاویه‌ای با رأس $w_0 = f(z_0)$ در صفحه $u-v$ منتقل شود، آنگاه نگاشت را در نقطه $z = z_0$ همدیس می‌نامیم. برای اینکه تابع تحلیلی $w = f(z)$ همدیس باشد، باید شرط $f'(z) \neq 0$ برقرار باشد.

مثال ۱: اگر تصاویر خطوط $x = a$ و $y = b$ را تحت نگاشت $w = (x^2 - y^2) + ikxy$ بدست بیاوریم و بخواهیم تصاویر آن‌ها عمود بر هم باشند، k لازم است چه مقداری باشد؟ (a و b اعدادی غیرصفر هستند.) (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه MIT)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اولاً توجه کنید که اگر نگاشت w تحلیلی باشد، هر جا که $w' \neq 0$ باشد، زاویه‌ی بین خطوط و منحنی‌ها را حفظ می‌کند. (یعنی همدیس است.) خطوط $x = a$ و $y = b$ دو خط عمود بر هم هستند و می‌دانیم اگر w تحلیلی و در $z = a + ib$، دارای مشتق مخالف صفر باشد، آن‌ها را به دو منحنی یا خطِ عمود بر هم تصویر خواهد کرد. شرط لازم برای تحلیلی بودن آن است که شرایط کوشی ریمان برقرار باشند: $u = x^2 - y^2 \ , \ v = kxy$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = kx \\ -2y = -ky \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

بنابراین $k = 2$ جواب صحیح است. دقت کنید که به ازای $k = 2$ داریم: $w = (x^2 - y^2) + 2ixy = z^2$ که نگاشتی تحلیلی است و در هر $z \neq 0$ داریم $w' \neq 0$.

راهنمایی برای پاسخگویی به تست‌های نگاشت

همان‌طور که گفتیم نگاشت $w=f(z)$، در واقع هر نقطه در صفحه $x-y$ مانند $z=x+iy$ را به نقطه‌ای مانند $w=u+iv$ در صفحه $u-v$ تبدیل می‌کند و برای همین با جایگزینی $z=x+iy$ در $f(z)$ و همچنین قرار دادن $u+iv$ به جای w در نهایت می‌توانیم u و v را بر حسب x و y یا x و y را برحسب u و v محاسبه کرده و با توجه به نواحی، نقاط مرزی و همچنین حدود تغییرات داده شده در صفحه $x-y$، تعیین کنیم که u و v چه تغییراتی می‌کنند و نشان‌دهنده چه ناحیه‌هایی در صفحه $u-v$ می‌باشند.

توجه۱: اکثر تست‌های نگاشت با در نظر گرفتن نقطه‌ای دلخواه به جای z در ناحیه موردنظر و پیدا کردن نقطه‌ی متناظر آن (یعنی همان w) به روش رد گزینه و سریع قابل پاسخگویی هستند.

توجه۲: بررسی نقاط و یا خطوط روی مرز ناحیه داده شده در حل تست‌ها به ما کمک می‌کند.

در نهایت لازم به ذکر است که ممکن است، گزینه‌ها طوری طراحی شوند که با استفاده از نکات فوق نتوان گزینه‌های غلط را حذف کرد و یا به صورت نقطه‌یابی تست را جواب داد. برای همین آشنایی با خواص هر نگاشت در حل سریع‌تر تست‌ها به ما کمک می‌کند.

نگاشت همانی $w=f(z)=z$

این نگاشت هر شکل را بدون تغییر منتقل می‌کند. واضح است که این نگاشت، در تمام نقاط همدیس است.

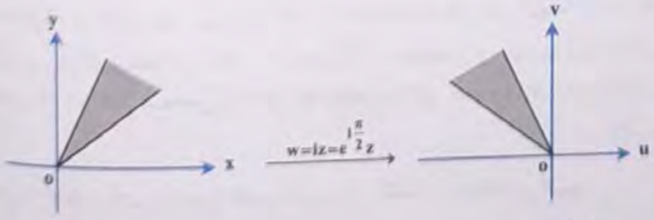
نگاشت انتقال $w=z+b$

این نگاشت که در آن $b=b_1+ib_2$ یک عدد مختلط است، هر نقطه یا شکل را در جهت بردار b و به اندازه b منتقل می‌کند. در واقع تحت این نگاشت، نقطه (x,y) از صفحه $x-y$ به نقطه $(x+b_1\ ,\ y+b_2)$ در صفحه $u-v$ منتقل می‌شود. واضح است این نگاشت نیز در تمام نقاط همدیس است.

نگاشت $w=az$

این نگاشت که در آن $a=re^{i\theta}$ عددی مختلط و مخالف صفر است، انبساط یا انقباضی به اندازه $\underline{\underline{r}}$ و دورانی به اندازه θ در هر نقطه z که قرار است منتقل شود، ایجاد می‌کند. در واقع برای رسیدن از z به $w=az$ اگر $z=r_1e^{i\theta_1}$ تعریف شود، ابتدا طول r_1 را به اندازه r (همان اندازه a) منبسط و یا منقبض می‌کنیم (اگر $|r|>1$ شکل منبسط و اگر $|r|<1$ شکل منقبض می‌شود) و سپس z را به اندازه θ (زاویه a) دوران می‌دهیم. یعنی هر نقطه در مختصات قطبی به صورت (r_1,θ_1) به نقطه‌ای به مختصات $(rr_1\ ,\ \theta+\theta_1)$ تبدیل خواهد شد. واضح است که این نگاشت نیز همدیس است.

برای مثال در شکل مقابل نگاشت $w=iz$ که در واقع آن را به شکل $w=e^{i\frac{\pi}{2}}z$ می‌نویسیم، فقط یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ (در جهت مثلثاتی) در شکل داده شده در صفحه‌ی $x-y$ ایجاد کرده و در اندازه شکل هیچ تأثیری نداشته است.



«صفحه z» «صفحه w»

مثال۲: **نیم‌صفحه $y>0$ تحت نگاشت $w=(1+i)z$ بر روی کدام ناحیه نگاشته خواهد شد؟**

۱) $u+v=1$ ۲) $u<v$ ۳) $u+v=-1$ ۴) $u>v$

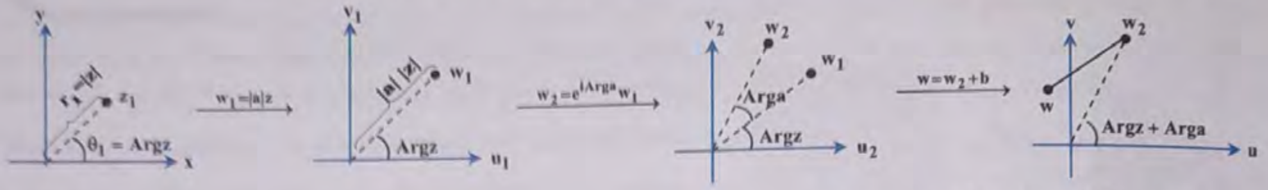
پاسخ : گزینه «۲» با فرض $z=x+iy$ و $w=u+iv$ داریم:

$$u+iv=(1+i)(x+iy)=x-y+i(x+y)\Rightarrow\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}\Rightarrow y=\frac{v-u}{2}\xrightarrow{\text{چون } y>0 \text{ است}}v-u>0\Rightarrow u<v$$

نگاشت خطی $w=az+b$

این نگاشت که همه‌جا همدیس است ترکیبی از دو نگاشت $w_1=az$ و $w_2=w_1+b$ می‌باشد که می‌تواند به ترتیب متوالی صورت گیرد. مطابق شکل، تغییرات نقطه‌ای مانند z_1 که طول شعاع حامل آن از مبدأ برابر r_1 و زاویه آن با محور x ها θ_1 است، تحت نگاشت $w=az+b$ به این صورت است که ابتدا توسط نگاشت $w_1=|a|z$ فاصله‌ی نقطه از مبدأ در $r=|a|$ ضرب می‌شود و سپس تحت نگاشت $w_2=e^{iArga}w_1$، به زاویه آن با محور x ها به اندازه $\theta=Arga$، اضافه شده و نقطه از w_1 به w_2 منتقل می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w=w_2+b$ نقطه به اندازه b منتقل می‌شود.

به شکل‌های نشان داده شده برای درک بیشتر مطلب دقت کنید. (در این شکل‌ها فرض می‌کنیم $|a|>1$ و Arga مثبت است):



به طور خلاصه این نگاشت سه عملکرد زیر را دارد:

۱) انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ ۲) دورانی به اندازه Arga ۳) انتقالی به اندازه b

مثال ۳: نگاشت $w = iz + i$ نیم‌صفحه $x > 0$ را بر روی کدام ناحیه می‌نگارد؟

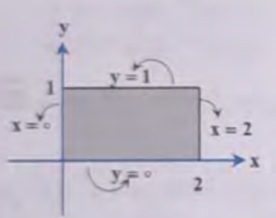
۱) $u > 1$ ۲) $v > 1$ ۳) $v > \frac{1}{2}$ ۴) $u > \frac{1}{2}$ و $v < 1$

☑ **پاسخ** : گزینه «۲»

$$w = iz + i = i(x+iy) + i = -y + i(x+1) = u + iv$$

$$v = x+1 \Rightarrow x = v-1 \xrightarrow{x>0} v-1>0 \Rightarrow v>1$$

مثال ۴: ناحیه داده شده در شکل زیر توسط نگاشت $w = (1+i)z + (1-2i)$ به چه شکلی تبدیل خواهد شد؟



☑ **پاسخ** : ابتدا با جایگزینی $z = x+iy$ و $w = u+iv$ ، سعی می‌کنیم u و v را بر حسب y و x تعیین کنیم:

$$u+iv = (1+i)(x+iy)+1-2i \Rightarrow u+iv = x+1-y+i(x+y-2)$$

پس $u = x+1-y$ و $v = x+y-2$ و با توجه به مرزها داریم:

به جای خط $y=1$ باید خط $v=u-1$ رسم شود.

$$y=1 \Rightarrow \begin{cases} u = x+1-1 = x \\ v = x+1-2 = x-1 \end{cases} \Rightarrow v = u-1$$

به جای خط $y=0$ باید خط $v=u-3$ رسم شود.

$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} u = x+1-0 = x+1 \\ v = x+0-2 = x-2 \end{cases} \Rightarrow v = u-3$$

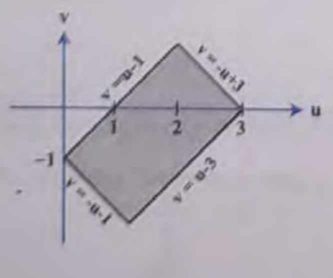
به جای خط $x=0$ باید خط $v=-u-1$ رسم شود.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0+1-y = 1-y \\ v = 0+y-2 = y-2 \end{cases} \Rightarrow v = -u-1$$

به جای خط $x=2$ باید خط $v=-u+3$ رسم شود.

$$x=2 \Rightarrow \begin{cases} u = 2+1-y = 3-y \\ v = 2+y-2 = y \end{cases} \Rightarrow v = -u+3$$

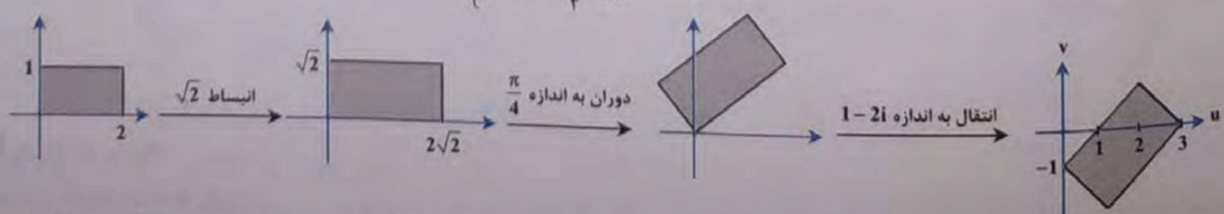
حالا باید چهار خط را در صفحه $u-v$ رسم کنیم:



در واقع در این تبدیل ابتدا اندازه شکل توسط نگاشت $w_1 = (1+i)z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ ، $\sqrt{2}$ برابر می‌شود و همچنین شکل به اندازه $\frac{\pi}{4}$ دوران می‌کند و سپس توسط نگاشت $w = w_1 + 1 - 2i$ ، شکل به اندازه $1-2i$ انتقال می‌یابد.

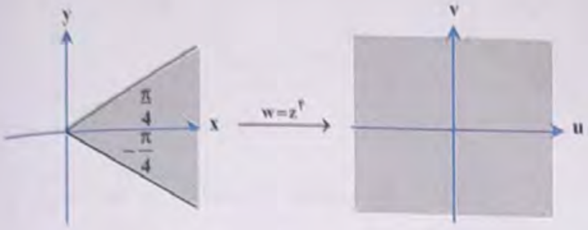
البته سؤال را می‌توان با توجه به سه عملکرد گفته شده برای نگاشت $w = az + b$ نیز حل کرد:

$$a = 1+i \Rightarrow \begin{cases} |a| = \sqrt{2} & \text{انبساط} \\ \text{Arga} = \frac{\pi}{4} & \text{دوران} \end{cases} \quad , \quad b = 1-2i \Rightarrow \text{انتقال}$$



توضیح: البته اگر این مسئله در قالب یک تست چهار گزینه‌ای مطرح شده بود، با توجه به اینکه نقاط و خطوط مرزی به چه نقاطی تبدیل شده‌اند (روش نقطه‌یابی) به راحتی می‌توانستیم بدون انجام محاسبات گزینه صحیح را انتخاب کنیم. مگر اینکه گزینه‌ها به طور دقیقی نزدیک به هم طرح شده باشند!

نگاشت $w = z^n$



این نگاشت که در آن n عددی طبیعی و بزرگتر از یک است، فاصله از مبدأ برای هر نقطه مانند z را به توان n می‌رساند و آرگومان آن را نیز n برابر می‌کند. توسط این نگاشت نقاط $-\frac{\pi}{n} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{n}$ به نقاط $-\pi \le Arg(w) \le \pi$ تبدیل می‌گردند. در واقع توسط این نگاشت زاویه اشکال بازتر می‌گردد. این نگاشت در مبدأ همدیس نیست. قابل ذکر است که نگاشت $w = z^2$ حالت خاصی از این نگاشت می‌باشد که ابتدا آن را بررسی می‌کنیم:

نگاشت $w = z^2$

این نگاشت هر نقطه‌ی $z = re^{i\theta}$ را به نقطه‌ی $w = r^2e^{i2\theta}$ تبدیل می‌کند. در واقع نگاشت $w = z^2$، زاویه را دو برابر کرده و اندازه را به توان ۲ می‌رساند. این نگاشت فقط در مبدأ مختصات که مشتق آن برابر صفر است، همدیس نیست.

مثال ۵: تصویر میدان $\{z \in C; Re z > 0, Im z > 0, (Re z)(Im z) > 1\}$ تحت نگاشت $w = z^2$ کدام است؟

۱) $\{w \in C ; Im w > 1\}$ ۲) $\{w \in C ; Im w > 2\}$

۳) $\{w \in C ; Re w > 1\}$ ۴) $\{w \in C ; (Re w)(Im w) > 1\}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم $z = x + iy$ و $w = u + iv$، تحت نگاشت $w = z^2$ داریم:

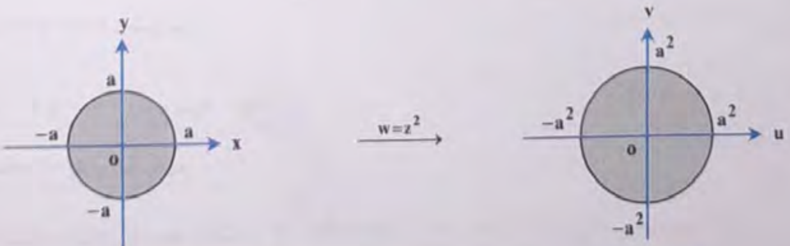
$$w = z^2 \Rightarrow u + iv = (x + iy)^2 \Rightarrow u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$

پس $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$. از طرفی ناحیه‌ی داده شده در سؤال به صورت $\{xy > 1 \ , \ x > 0 \ , \ y > 0\}$ می‌باشد که ناحیه‌ی مرزهای آن به صورت زیر است:

$$xy > 1 \Rightarrow 2xy > 2 \Rightarrow v > 2$$

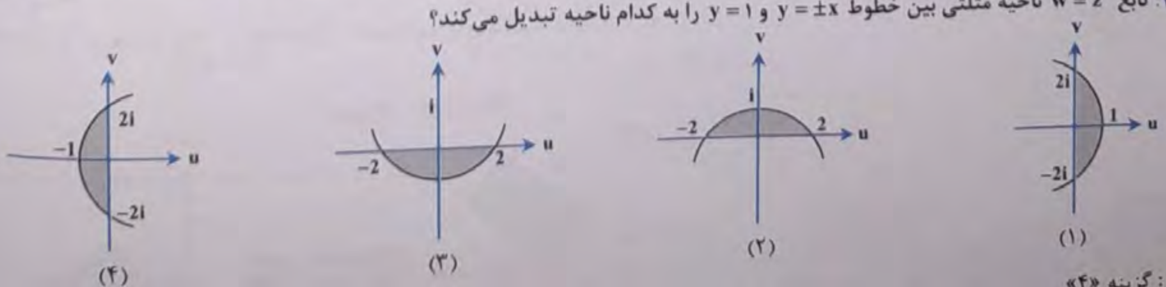
مثال ۶: تصویر دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ تحت نگاشت $w = z^2$ را بیابید.

پاسخ: معادله دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ در مختصات قطبی به صورت $z = ae^{i\theta}$ می‌باشد و چون نگاشت $w = z^2$، زاویه را دو برابر و همچنین اندازه را به توان ۲ می‌رساند، لذا $w = a^2e^{i2\theta}$ خواهد بود؛ یعنی معادله دایره‌ای به صورت $u^2 + v^2 = a^4$. به عبارت دیگر تحت این نگاشت دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a در صفحه $(x - y)$ به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a^2 در صفحه $(u - v)$ تبدیل می‌شود.



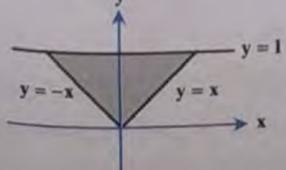
نکته ۱: نگاشت $w = z^2$ خطوط $x = c$ را به سهمی‌های $v^2 = -4c^2(u - c^2)$ و خطوط $y = d$ را به سهمی‌های $v^2 = 4d^2(u + d^2)$ تبدیل می‌کند.

مثال ۷: تابع $w = z^2$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y = \pm x$ و $y = 1$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟



پاسخ: گزینه «۴»

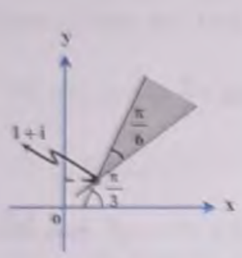
با توجه به نگاشت $w = z^2$ داریم:



$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

تصویر خط $y=1$ تحت نگاشت w با توجه به روابط به دست آمده برای u و v به صورت $u=x^2-1$ و $v=2x$ است که آن را می‌توان به صورت $v^2=4(u+1)$ نوشت که یک سهمی افقی با رأس $(-1,0)$ است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. همین‌جا پاسخ به تست تمام است ولی برای تمرین بیشتر بررسی‌های دقیق‌تر را نیز انجام می‌دهیم. تصویر خط $y=x$، به صورت $u=0$ و $v=2x^2$ و برای خط $y=-x$، $u=0$ و $v=-2x^2$ و در نتیجه تصویر خط $y=\pm x$ به صورت پاره‌خط $u=0$ و $-2\le v\le 2$ است. (دقت کنید $-2x^2\le v\le 2x^2$ و چون $-1<x<1$، لذا $-2\le v\le 2$ به دست آمد.)

مثال ۸: نگاشتی که ناحیه داده شده در شکل زیر را به کل نیم‌صفحه بالایی بنگارد، کدام است؟



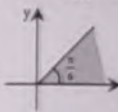
۱) $w=[z-(1+i)]^3$

۲) $w=[z-(1+i)]^6$

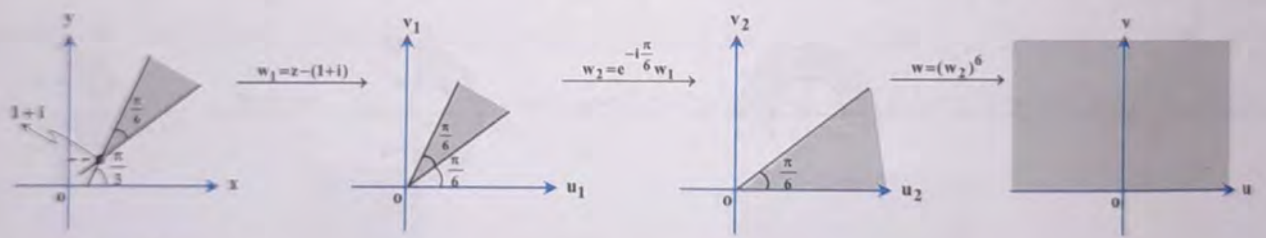
۳) $w=-[z-(1+i)]^3$

۴) $w=-[z-(1+i)]^6$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه توسط نگاشت $w=z^n$، ناحیه $0\le \operatorname{Arg}z<\frac{\pi}{n}$ بر روی نیم‌صفحه بالایی نگاشته می‌شود، ابتدا باید ناحیه را به صورت

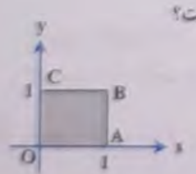


تبدیل کنیم و سپس با نگاشت $w=z^6$ این ناحیه را به کل نیم‌صفحه فوقانی بنگاریم. برای این کار ابتدا شکل داده شده را با نگاشت $w_1=z-(1+i)$ انتقال می‌دهیم و سپس با نگاشت $w_2=e^{-i\frac{\pi}{6}}w_1$ به اندازه $-\frac{\pi}{6}$ دوران می‌دهیم.



دقت کنید در نهایت w به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $w=(w_2)^6=(e^{-\frac{i\pi}{6}})^6[z-(1+i)]^6=e^{-i\pi}[z-(1+i)]^6=-[z-(1+i)]^6$

مثال ۹: ناحیه‌ی نشان داده شده در شکل زیر تحت نگاشت $w=z^2$ به ناحیه‌ی D' تبدیل می‌شود. مساحت D' چقدر است؟



۱) $\frac{11}{6}$

۲) $\frac{8}{3}$

۳) $\frac{11}{12}$

۴) $\frac{4}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا نگاشت $w=z^2$ را به شکل مقابل می‌نویسیم:

$$w=z^2=x^2-y^2+2ixy \Rightarrow \begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم هر چهار خط به چه ناحیه‌هائی تبدیل خواهند شد.

ابتدا OA را بررسی می‌کنیم که تساوی $y=0$ و نامساوی $0\le x\le 1$، را می‌توان برای آن نوشت. تبدیل پاره‌خط OA به صورت زیر است:

$$0\le u\le 1\ ,\ v=0$$

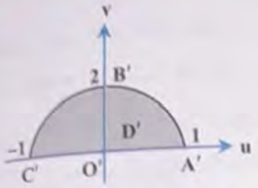
تبدیل AB تحت این نگاشت، با توجه به $x=1$، به صورت مقابل است: $\begin{cases} u=1-y^2 \\ v=2y \end{cases} \Rightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$

تبدیل BC تحت این نگاشت، با توجه به $y=1$ برابر است با: $\begin{cases} u=x^2-1 \\ v=2x \end{cases} \Rightarrow u=\frac{v^2}{4}-1$

تبدیل CO، با توجه به $x=0$ برابر است با: $\begin{cases} u=-y^2 \\ v=0 \end{cases} \xrightarrow{0\le y\le 1} -1\le -y^2\le 0 \Rightarrow -1\le u\le 0$

از چهار رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم $-1\le u\le 1$ و دو منحنی قرینه‌ی یکدیگر (نسبت به محور v) به شکل زیر داریم:

$$u=\frac{v^2}{4}-1\ ,\ u=1-\frac{v^2}{4}$$



و با رسم خطوط و منحنی‌ها شکل مقابل را داریم:
با توجه به شکل مساحت را با استفاده از انتگرال حساب می‌کنیم.

$$S = 2\int_0^2 (1-\frac{v^2}{4})dv = 2[v-\frac{v^3}{12}]_0^2 = 2(2-\frac{8}{12}) = 2\times\frac{16}{12} = \frac{8}{3}$$

دقت کنید نقطه‌ی برخورد منحنی $u=\frac{v^2}{4}-1$ یا $u=1-\frac{v^2}{4}$ با محور v به ازای $u=0$، برابر $v=2$ به دست می‌آید که در بازه‌ی انتگرال‌گیری لحاظ شد.

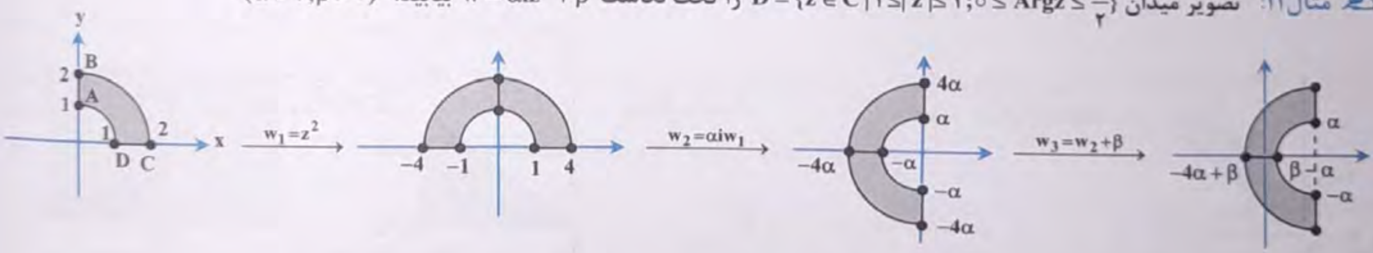
توجه: در ادامه‌ی فصل فرمولی برای محاسبه‌ی راحت‌تر مساحت، برای این‌گونه سؤالات ارائه می‌شود.

مثال ۱۰: **ناحیه $\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}z \le \frac{\pi}{2}$، تحت کدام نگاشت به ناحیه‌ی $\pi \le \text{Arg}w \le \frac{7\pi}{4}$ تبدیل می‌شود؟**

۱) $w = e^{\frac{\pi}{4}i} z^4$ ۲) $w = e^{\frac{\pi}{4}i} z^3$ ۳) $w = -e^{\frac{\pi}{4}i} z^4$ ۴) $w = e^{-\frac{\pi}{4}i} z^3$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با کمی دقت در گزینه‌ها مشخص است ناحیه چند برابر شده و یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ پیدا کرده است. ابتدا ناحیه توسط نگاشت $w_1 = z^3$ تبدیل به $\frac{3\pi}{4} \le \text{Arg}w_1 \le \frac{3\pi}{2}$ شده و سپس با یک **دوران** به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ به ناحیه $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}w \le \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ و یا به عبارت دیگر به ناحیه‌ی $\pi \le \text{Arg}w \le \frac{7\pi}{4}$ تبدیل شده است.

مثال ۱۱: **تصویر میدان $D = \{z \in C \mid 1 \le |z| \le 2; 0 \le \text{Arg}z \le \frac{\pi}{2}\}$ را تحت نگاشت $w = \alpha i z^2 + \beta$ بیابید.** $(\alpha > 1, \beta > 0)$



در واقع سه نگاشت $w_1 = z^2$، $w_2 = \alpha i w_1$ و $w_3 = w_2 + \beta$ را به طور متوالی اجرا کرده‌ایم.

مثال ۱۲: **نگاشت $w = \frac{z^2}{a^2} - 1$ یک نقطه از لمنیسکات $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ را روی کدام ناحیه می‌نگارد؟**

۱) روی دایره واحد
۲) خارج دایره واحد
۳) روی دایره واحد در نیم‌صفحه‌ی بالایی
۴) روی دایره واحد در نیم‌صفحه‌ی پایینی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا بخش‌های حقیقی و موهومی w را مشخص می‌کنیم:

$$w = \frac{(x+iy)^2}{a^2} - 1 = (\frac{x^2-y^2}{a^2} - 1) + i\frac{2xy}{a^2}$$

در دستگاه قطبی داریم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. بنابراین:

$$w = [\frac{r^2}{a^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 1] + i\frac{2r^2}{a^2}\cos\theta\sin\theta = [\frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta - 1] + i\frac{r^2}{a^2}\sin 2\theta$$

حالا اگر z نقطه‌ای روی منحنی $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ باشد، خواهیم داشت:

$$u = \text{Re}(w) = \frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta - 1 = 2\cos^2 2\theta - 1 = \cos 4\theta \quad , \quad v = \text{Im}(w) = \frac{r^2}{a^2}\sin 2\theta = 2\cos 2\theta \sin 2\theta = \sin 4\theta$$

بنابراین $u^2 + v^2 = \cos^2 4\theta + \sin^2 4\theta = 1$، پس هر نقطه روی لمنیسکات، روی دایره‌ی واحد در صفحه‌ی w نگاشته می‌شود.

مثال ۱۳: **دیسک $|z-1| \le 1$، تحت نگاشت $w = z^2$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟**

۱) درون کاردیویید $r = 2(1+\cos\theta)$
۲) درون کاردیویید $r = 1+\cos\theta$
۳) خارج از دلوار $r = 2(1-\cos\theta)$
۴) درون دلوار $r = 1-\cos\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که در این پاسخ، r_1 و θ_1 مختصات مربوط به z و r_2 و θ_2 مختصات مربوط به w هستند. دیسک $|z-1| \le 1$ درون دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع واحد است. معادله‌ی مرز این ناحیه چنین است:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

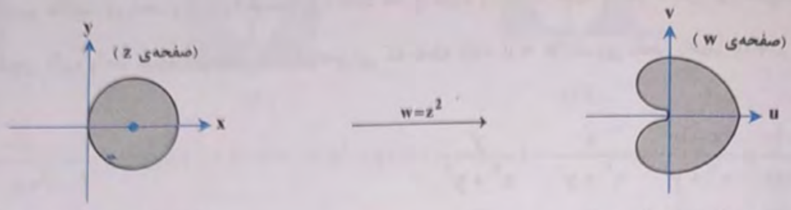
در مختصات قطبی $x = r_1\cos\theta_1$ و $x^2 + y^2 = r_1^2$ است. بنابراین معادله‌ی مرز، $r_1 = 2\cos\theta$ است. با جایگذاری $z = r_1 e^{i\theta_1}$ در نگاشت $w = z^2$ خواهیم داشت:

$$w = r_1^2 e^{i2\theta_1}$$

بنابراین در صفحه‌ی w داریم:

$$\begin{cases} r_2 = r_1^2 = (2\cos\theta_1)^2 = 4\cos^2\theta_1 = 4\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta_1) = 2(1+\cos 2\theta_1) \\ \theta_2 = 2\theta_1 \end{cases}$$

بنابراین در صفحه‌ی w به معادله‌ی $r_2 = 2(1+\cos\theta_2)$ رسیده‌ایم که یک کاردیویید است.



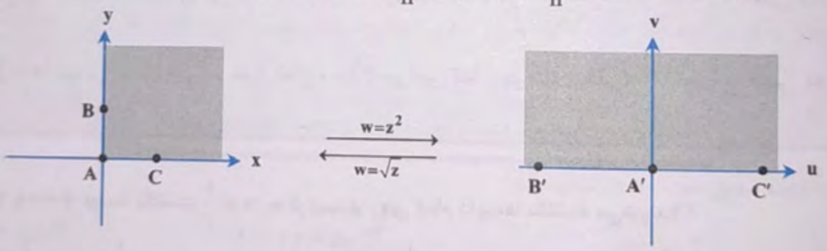
$|z-1| = 1 \Leftrightarrow r_1 = 2\cos\theta_1$ $\qquad$ $r_2 = 2(1+\cos\theta_2)$

$z = r_1 e^{i\theta_1}$ $\qquad$ $w = r_2\, e^{i\theta_2}$

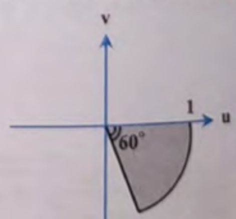
در ضمن توجه کنید که نگاشت $w = z^2$ پیوسته است و نواحی کران‌دار را به نواحی کران‌دار می‌برد. بنابراین ناحیه‌ی درونِ این کاردیویید بدست خواهد آمد نه بیرون آن.

نگاشت $\sqrt[n]{z}$

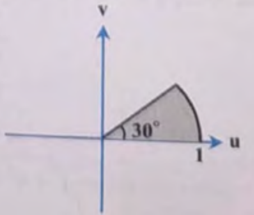
این نگاشت که در آن n عددی طبیعی و مخالف یک می‌باشد، هر نقطه با مختصات (r,θ) را به نقاطی به مختصات $(\sqrt[n]{r}, \frac{\theta + 2k\pi}{n})$ تبدیل می‌کند که در آن $k = 0,1,2,\dots,n-1$ می‌باشد. (در این کتاب $k = 0$ و در نتیجه شاخه اصلی در نظر گرفته می‌شود.) ملاحظه می‌کنید که این نگاشت، عکس نگاشت z^n می‌باشد و توسط آن ناحیه $-\pi \le \operatorname{Arg}(z) \le \pi$ به نقاط $-\frac{\pi}{n} \le \operatorname{Arg}(w) \le \frac{\pi}{n}$ تبدیل می‌شود.



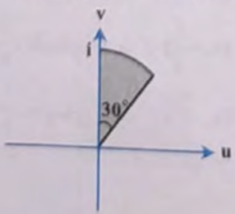
مثال ۱۴: ناحیه $D = \{z : |z-1| \le 1 , \operatorname{Re} z \le 1\}$ توسط نگاشت $w = \sqrt[3]{i(z-1)}$ به کدام ناحیه تصویر می‌شود؟



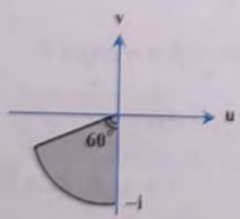
(۱)



(۲)



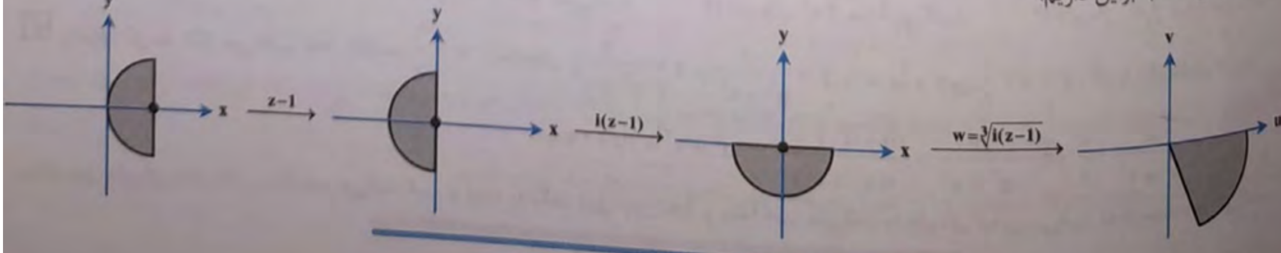
(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۱» ناحیه‌ی D نیمه‌ی چپ دیسک به مرکز $(1,0)$ و شعاع یک است. انتقال $z-1$ مرکز آن را به مبدأ می‌آورد. سپس ضریب $i(z-1)$ دورانی به اندازه‌ی $+90$ درجه ایجاد می‌کند. در این ناحیه داریم $0 \le r \le 1$ و $-\pi \le \theta \le 0$. اکنون نگاشت ریشه‌ی سوم، از r، ریشه‌ی سوم می‌گیرد و θ را بر سه تقسیم می‌کند. بنابراین داریم:

$0 \le |w| \le 1 \quad , \quad -\frac{\pi}{3} \le \operatorname{Arg} w \le 0$



نگاشت $w=\frac{1}{z}$

این نگاشت نقطه $z=re^{i\theta}$ را به نقطه $w=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ تبدیل می‌کند و به غیر از مبدأ مختصات در بقیه نقاط همدیس است. این نگاشت در واقع فاصله نقطه از مبدأ را عکس و زاویه را تغییر علامت می‌دهد و همواره توسط آن، نقاط خارج دایره واحد، به نقاط ناصفر داخل این دایره نگاشته می‌شوند و برعکس. اما نقاط روی دایره واحد به روی دایره واحد تصویر خواهند شد. در صورتی که نقطه $w=u+iv$ تصویر نقطه ناصفر $z=x+iy$ تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad x=\frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{و} \quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

توسط نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل‌های زیر انجام می‌شود:

۱) هر **خط غیر گذرنده از مبدأ** تبدیل به **دایره‌ای** می‌شود که **از مبدأ عبور می‌کند** و هر **خط گذرنده از مبدأ** به **خطی که از مبدأ عبور می‌کند،** تبدیل می‌شود.

۲) هر **دایره غیر گذرنده از مبدأ** تبدیل به **دایره‌ای** می‌شود که از **مبدأ عبور نمی‌کند** و هر **دایره گذرنده از مبدأ به خطی که از مبدأ عبور نمی‌کند،** تبدیل می‌شود.

مثال ۱۵: خطوط $x=1$ و $y=1$ توسط نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به ترتیب بر روی کدام دایره‌ها نگاشته می‌شوند؟

۱) دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۲) دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۳) دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۴) دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$، دایره‌ای به مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\Rightarrow 1=\frac{u}{u^2+v^2}\Rightarrow u^2+v^2-u=0\Rightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$$

$$y=-\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow 1=-\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow u^2+v^2+v=0\Rightarrow u^2+(v+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۶: تصویر خط $y=x+\frac{1}{2}$ به وسیله نگاشت $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟

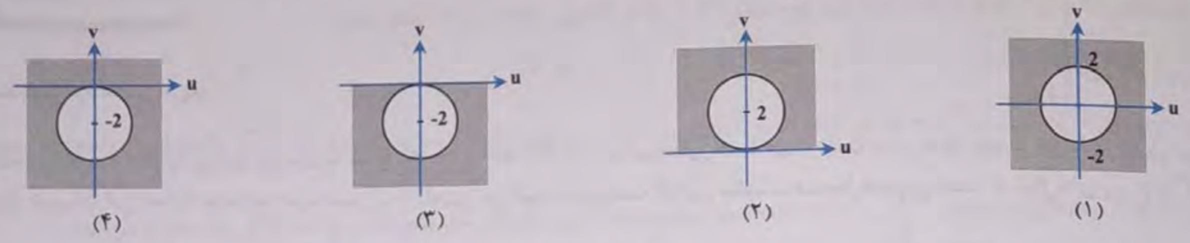
۱) خطی که از مبدأ می‌گذرد. ۲) خطی که از مبدأ نمی‌گذرد. ۳) دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد. ۴) دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد.

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ رابطه‌های $x=\frac{u}{u^2+v^2}$ و $y=\frac{-v}{u^2+v^2}$ را داریم و چون $y=x+\frac{1}{2}$، لذا با جایگذاری داریم:

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{2u+u^2+v^2}{2(u^2+v^2)}\Rightarrow u^2+v^2+2u+2v=0$$

معادله فوق دایره‌ای است که از مبدأ عبور می‌کند. البته با توجه به نکات فوق چون خط از مبدأ عبور نمی‌کند، به دایره‌ای تبدیل می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند.

مثال ۱۷: تصویر ناحیه $0<y<\frac{1}{4}$ به وسیله تبدیل $w=\frac{1}{z}$ کدام ناحیه است؟



☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$0<y<\frac{1}{4}\Rightarrow 0<\frac{-v}{u^2+v^2}<\frac{1}{4}\Rightarrow u^2+v^2+4v>0\Rightarrow u^2+(v+2)^2>4$$

با توجه به نکات فوق، چون خط $y=\frac{1}{4}$ از مبدأ عبور نمی‌کند، تصویر آن دایره‌ای می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند و چون $y<\frac{1}{4}$ پس ناحیه مزبور خارج دایره‌ای به مرکز $(0,-2)$ و شعاع ۲ می‌باشد. از طرفی چون $y=-\frac{v}{u^2+v^2}$ و $y>0$ می‌باشد، پس $v<0$. لذا گزینه (۳) جواب است.

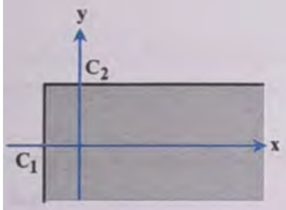
مثال ۱۸: تصویر ناحیه $x>C_1$ و $y<C_2$ از صفحه z به صفحه $w=u+iv$ تحت تبدیل (نگاشت) $w=\frac{1}{z}$، در کدام‌یک از حالات زیر کراندار نیست؟

۱) $C_1<0$ ، $C_2<0$ ۲) $C_1<0$ ، $C_2>0$ ۳) $C_1>0$ ، $C_2<0$ ۴) $C_1>0$ ، $C_2>0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ناحیه مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

تبدیل (نگاشت) مورد نظر را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم: $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

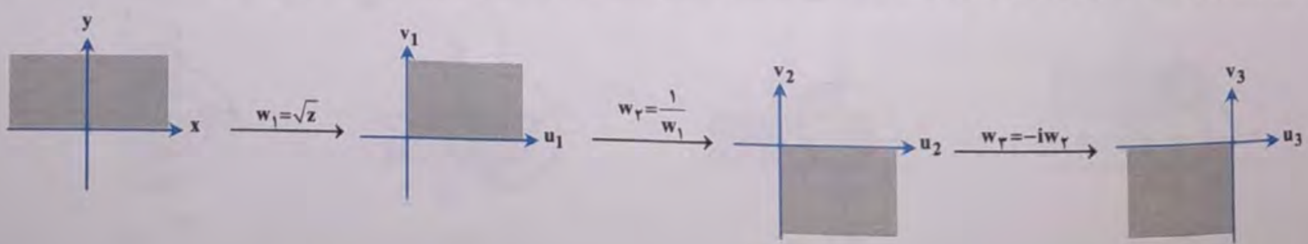
همان طور که مشخص است، این نگاشت در $r=0$ کراندار نیست و به سمت بی‌نهایت می‌رود. بنابراین مطابق شکل اگر منطقه هاشور زده نقطه مبدأ را در برگیرد $(r=0)$ آنگاه تبدیل کراندار نخواهد بود. برای این منظور باید $C_1<0$ و $C_2>0$ باشد.



مثال ۱۹: ناحیه $0\le\theta\le\pi$ تحت تبدیل $w=-\frac{i}{\sqrt{z}}$ کدام است؟

۱) ربع سوم ۲) ربع دوم ۳) ربع دوم و سوم ۴) ربع چهارم

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» توسط نگاشت $w_1=\sqrt{z}$ ناحیه $0\le\theta\le\pi$ به ناحیه $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ تبدیل خواهد شد و می‌دانیم توسط نگاشت $w_2=\frac{1}{w_1}$، ربع اول بر روی ربع چهارم نگاشته می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w_3=-iw_2$ شکل به اندازه -90° دوران خواهد کرد.



مثال ۲۰: نقش ناحیه زاویه‌ای $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ با تبدیل $w=-\frac{i}{z^2}$ عبارتست از:

۱) $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ ۲) $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ ۳) $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi$

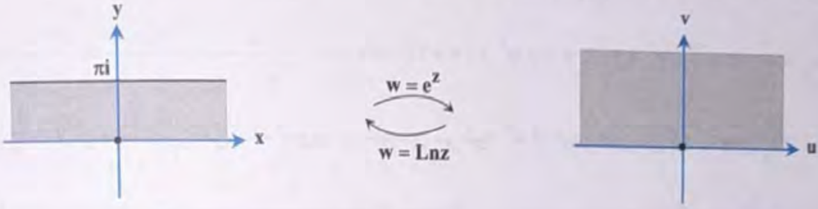
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ناحیه $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w_1=z^2$ به ناحیه $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌شود و نگاشت $w_2=\frac{1}{z^2}$ این ناحیه را به ربع چهارم می‌نگارد و در نهایت $w_3=-iw_2$ ناحیه را -90° دوران می‌دهد. پس ناحیه $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ جواب است.

نگاشت $w = e^z$

با استفاده از فرم قطبی داریم:

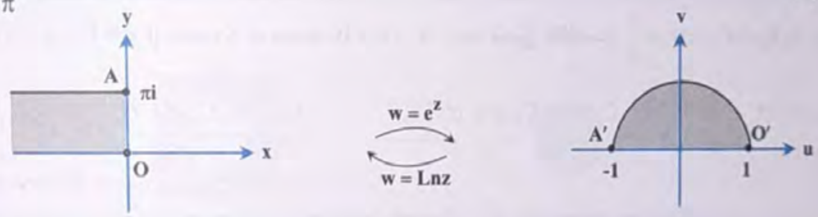
$$w = e^z = e^x . e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases}$$

این نگاشت، خط $x = a$ را بر روی دایره‌ای به شعاع $r = e^a$ و خط $y = c$ را به نیم‌خطی که با جهت مثبت محور xها زاویه c می‌سازد، تبدیل می‌کند که محدوده تغییرات این خط با توجه به حدود تغییرات x تعیین می‌شود. واضح است که این نگاشت، همه‌جا همدیس است. به شکل‌های زیر توجه کنید:



برای مثال در ناحیه فوق داریم:

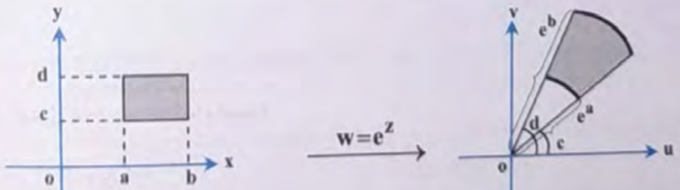
$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \Rightarrow e^{-\infty} < e^x < e^{+\infty} \Rightarrow 0 < e^x < +\infty \Rightarrow 0 < r < \infty \\ 0 < y < \pi \quad \Rightarrow 0 < \theta < \pi \end{cases}$$



و همچنین در ناحیه بالا داریم:

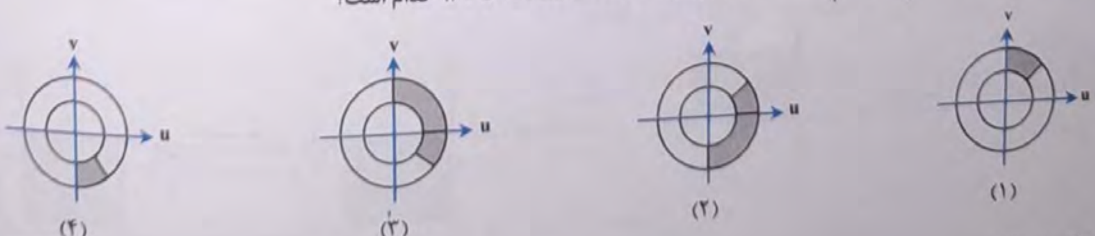
$$\begin{cases} -\infty < x < 0 \Rightarrow e^{-\infty} < e^x < e^0 \Rightarrow 0 < r < 1 \\ 0 < y < \pi \quad \Rightarrow 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

به طور کلی تحت این نگاشت ناحیه $\{(x,y); a \le x \le b \ , \ c \le y \le d\}$ به ناحیه $\{(r,\theta); e^a \le r \le e^b \ , \ c \le \theta \le d\}$، نگاشته می‌شود به شکل زیر نگاه کنید:



«صفحه z» «صفحه w»

مثال ۲۱: تبدیل یافته ناحیه $D = \{(x,y) | 1 \le x \le 2 \ , \ \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$ تحت نگاشت $w = e^z$ کدام است؟



پاسخ: گزینه «۱»

$$\left.\begin{matrix} r = e^x \\ \varphi = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \le x \le 2 \Rightarrow e^1 \le r \le e^2 \ , \ \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۲: نگاشت $f(z) = e^z$، ناحیه $D = \{(x,y) : x \le 0 \ , \ 0 \le y \le \pi\}$ را بر روی کدامیک از نواحی زیر می‌نگارد؟

۱) $\{(u,v) | u^2 + v^2 \ge 1 \ , \ u \ge 0\}$

۲) $\{(u,v) | u^2 + v^2 \le 1 \ , \ v \ge 0\}$

۳) $\{(u,v) | u^2 + v^2 \le 1 \ , \ u \le 0\}$

۴) $\{(u,v) | u^2 + v^2 \ge 1 \ , \ v \ge 0\}$

پاسخ: گزینه «۲» خط $x = 0$ بر روی دایره‌ای به شعاع $r = e^0 = 1$ نگاشته می‌شود، لذا ناحیه $-\infty < x < 0$ داخل دایره $r \le 1$ نگاشته می‌شود. از طرفی چون $0 \le y \le \pi$ لذا نیم‌دایره بالایی جواب است.

مثال ۲۳: اگر منحنی C_1 دارای معادله‌ی $z=t+i\cosh t$ و منحنی C_2 دارای معادله‌ی $z=\sinh t+i(t+1)$ باشد و تحت نگاشت $w=e^{\pi z}$، ایـن دو منحنی به دو منحنی C'_1 و C'_2 تبدیل شوند، زاویه بین دو منحنی C'_1 و C'_2 در نقطه‌ی $A'(-1)$ $(w=-1)$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$　　۲) $-\frac{\pi}{4}$　　۳) $\frac{3\pi}{2}$　　۴) π

پاسخ: گزینه «۱» اولاً نگاشت $w=e^{\pi z}$ در نقطه $z=-1$ همدیس است و بنابراین زاویه‌ی بین دو منحنی C'_1 و C'_2 برابـر زاویـه‌ی بـین دو منحنـی C_1 و C_2 است. $e^{\pi z}=-1 \Rightarrow z=i$

قرار دادن $z=i$ در معادله‌ی دو منحنی C_1 و C_2، $t=0$ حاصل می‌شود. اما ضریب زاویه منحنی‌های C_1 و C_2 به شکل زیر حساب می‌شود:

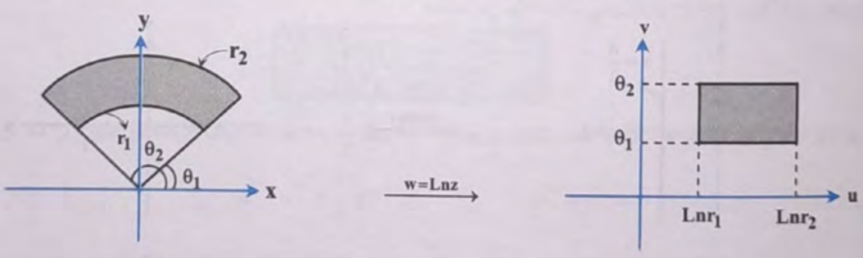
$$C_1:\begin{cases}x=t\\ y=\cosh t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=1\\ y'=\sinh t\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x'_t}{y'_t}=\frac{\sinh t}{1}=\sinh t \quad \text{و} \quad C_2:\begin{cases}x=\sinh t\\ y=t+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_t=\cosh t\\ y'_t=1\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh t}$$

از طرفی می‌دانیم $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ و $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$. با قرار دادن $t=0$ در روابط فوق شیب منحنی‌های C_1 و C_2 به راحتی حساب می‌شود:

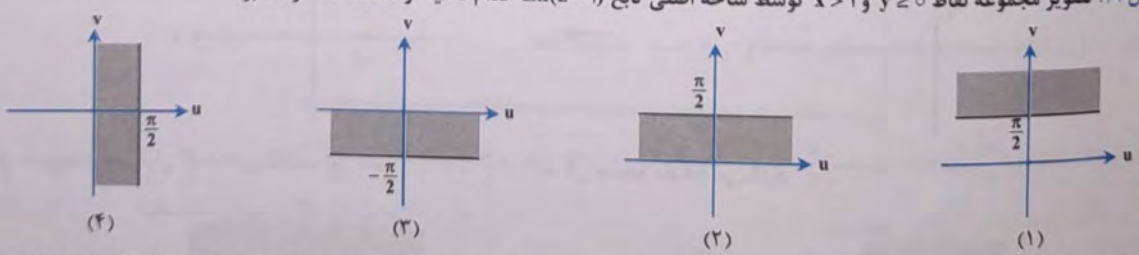
$$\begin{cases}m_1=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\sinh(0)=\frac{e^0-e^0}{2}=0\\[2mm] m_2=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{\cosh(0)}=\frac{1}{\frac{e^0+e^0}{2}}=1\end{cases}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{0-1}{1+0(1)}\right|=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

نگاشت w = Lnz

اول این را بگوییم که منظورمان شاخه‌ی اصلی لگاریتم $(-\pi<\theta\le\pi)$ است. این نگاشت، عکس نگاشت $w=e^z$ می‌باشد و دایره به شعاع e^a را به پاره‌خط قائم و شعاع‌های آنها را به خطوط افقی تبدیل می‌کند. از طرفی چون $-\pi<\theta\le\pi$ و $\operatorname{Lnz}=\operatorname{Lnr}+i\theta$، لذا توسـط نگاشـت $w=\operatorname{Lnz}$، قطـاع $r_1\le r\le r_2$ و $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ به ترتیب به مستطیل $\operatorname{Lnr}_1\le u\le\operatorname{Lnr}_2$ و $\theta_1\le v\le\theta_2$ تبدیل می‌شود.



مثال ۲۴: تصویر مجموعه نقاط $y\ge 0$ و $x>1$ توسط شاخه اصلی تابع $\operatorname{Ln}(z-1)$ کدام ناحیه از صفحه w خواهد بود؟

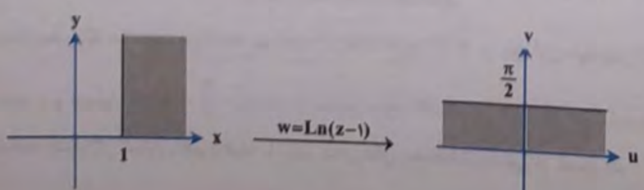


پاسخ: گزینه «۲»

$$w=\operatorname{Ln}(z-1)=\operatorname{Ln}[(x-1)+iy]=\operatorname{Lnr}+i\theta\Rightarrow u+iv=\operatorname{Lnr}+i\theta\Rightarrow u=\operatorname{Lnr}\ ,\ v=\theta$$

$$r=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\quad,\quad\theta=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x-1}$$

با توجه به تغییرات $x>1$ و $y\ge 0$، تغییرات r بین صفر تا ∞ خواهد بود $(0<r<\infty)$ از طرفی چون $0\le y<\infty$ لذا $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x-1}$ بین صـفر تـا $\frac{\pi}{2}$ تغییـر می‌کند، یعنی $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.



$$u=\operatorname{Lnr}\xrightarrow{0<r<\infty}-\infty<\operatorname{Lnr}<+\infty\Rightarrow-\infty<u<+\infty$$

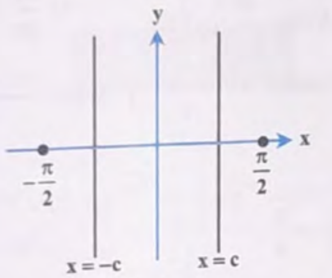
$$v=\theta\Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

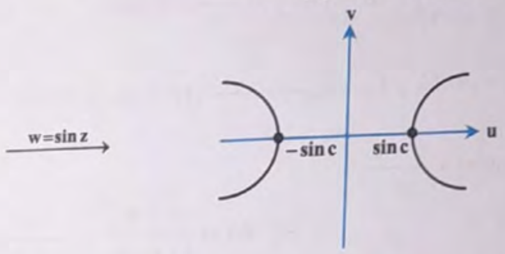
نگاشت $w = \sin z$

این نگاشت در تمام صفحه z **یک به یک نیست**. در واقع نقاط (x, y) و $(x \pm 2\pi, y)$ را به نقطه‌ی یکسانی تصویر می‌کند. از طرفی $f'(z) = \cos z$ در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ صفر می‌شود. پس این نگاشت در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ همدیس نیست. به همین علت اغلب آن را در محدوده‌ی $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ بررسی می‌کنند. در ادامه خواهید دید $w = \sin z$ در سایر نواحی، رفتاری تکراری دارد. اگر $w = u + iv$ تصویر نقطه‌ی $z = x + iy$ تحت این نگاشت باشد داریم:

$$w = u + iv = \sin x . \cosh y + i \cos x \sinh y \;\Rightarrow\; \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$$

در مورد این نگاشت حالت‌های مهم به صورت زیر است:



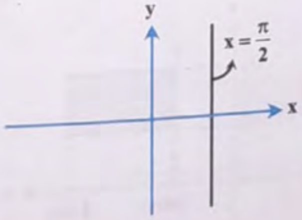


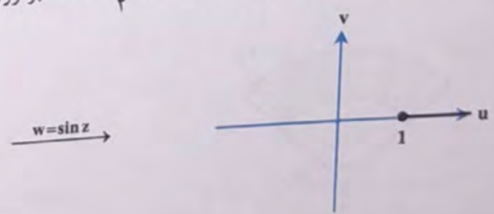
۱) اگر $c \ne 0$ و $c \ne \frac{\pi}{2}$ آنگاه نقش خطوط ثابت $x = c \; (-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2})$ هذلولی‌هایی با معادله زیر است:

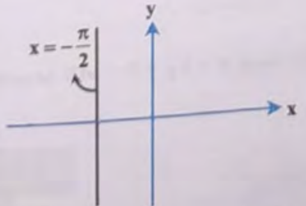
$$\boxed{\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1}$$

این هذلولی‌ها دارای کانون‌های ثابت ± 1 هستند. اگر $0 < c < \frac{\pi}{2}$، آنگاه خط $x = c$ به شاخه **سمت راست هذلولی** و اگر $-\frac{\pi}{2} < c < 0$، آنگاه خط $x = c$ به شاخه **سمت چپ هذلولی** تبدیل می‌شود. کافیست به علامت u دقت کنید.

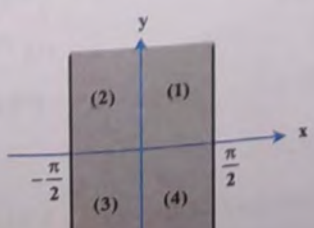
۲) اگر $x = \pm\frac{\pi}{2}$، آنگاه $u = \pm\cosh y$ و $v = 0$. بنابراین خطوط قائم $x = \pm\frac{\pi}{2}$ بر روی نیم‌خط‌های افقی $u \ge 1$ و $u \le -1$ نگاشته می‌شوند.

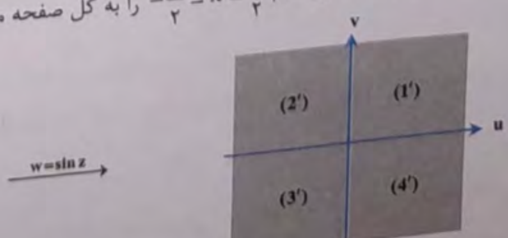






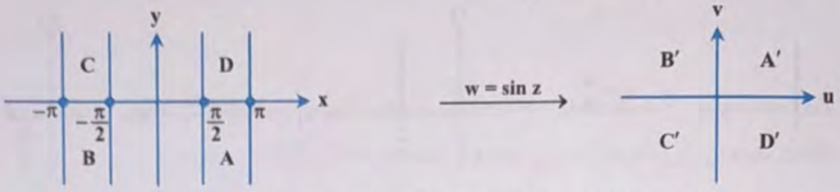
و برای جمع‌بندی، می‌توان گفت: این نگاشت نوار قائم $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ را به کل صفحه مختلط می‌نگارد:





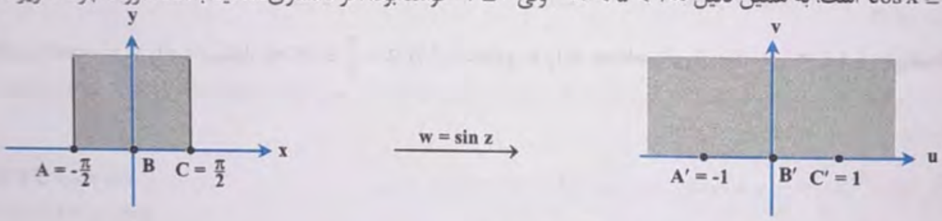
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید نیم‌نوار $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و $y \ge 0$ به ربع اول، نیم‌نوار $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ و $y \ge 0$ به ربع دوم، نیم‌نوار $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و $y \le 0$ به ربع چهارم و نیم‌نوار $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ و $y \le 0$ به ربع سوم نگاشته می‌شود. اگر نامساوی‌ها را به همین شکل داشته باشیم محورهای مختصات جزء تصویر نیستند. توجه کنید اگر تساوی هم داشته باشیم، محورهای مختصات بخشی از تصویرند.

در واقع **نیم نوارهای** موازی محور y ها که در آن تغییرات x فقط در **یک ربع** است، در صفحه‌ی w به **تمام آن ربع** نگاشته می‌شوند. البته این قاعده در مورد چهار نیم‌نواری که اطراف مبدأ هستند (شکل قبل) برقرار است. در مورد سایر نیم‌نوارها به توالی زیر دقت کنید. در شکل نشان داده‌ایم که هر نیم‌نوار به کدام ربع از صفحه‌ی w تصویر می‌شود. (طول این نوارها $\frac{\pi}{2}$ است.)



یک راه ساده برای این‌که تشخیص دهیم این نیم‌نوارها توسط نگاشت $w=\sin z$ به کدام ربع تصویر می‌شوند، این است که به علامت $\sin x$ و $\cos x$ در آن نواحی دقت کنیم. می‌دانیم $\cosh y$ همواره مثبت است و $\sinh y$ برای y های مثبت، مقدار مثبت و برای y های منفی مقداری منفی، دارد. حال فرض کنید می‌خواهیم تصویر نیم‌نوار $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ و $y \ge 0$ را پیدا کنیم (ناحیه D). در این ناحیه $\sinh y$ و $\cosh y$ مثبت هستند. $\cos x \le 0$ و $\sin x \ge 0$ است. پس $u=\sin x\cosh y \ge 0$ و $v=\cos x \sinh y \le 0$ است. یعنی ربع چهارم از صفحه‌ی w بدست می‌آید (یعنی D'). بهتر است علامت $\sin x$ و $\cos x$ را در چهار بخش دایره‌ی مثلثاتی مرور کنید!

به عنوان مثالی دیگر توجه کنید که نیم‌نوار $y \ge 0$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ به نیم‌صفحه‌ی بالایی یعنی مجموع ربع‌های اول و دوم نگاشته می‌شود. زیرا در این محدوده، $-1 \le \sin x \le 1$ ولی $\cos x \ge 0$ است. به همین دلیل $-\infty < u < +\infty$ ولی $v \ge 0$ خواهد بود. اگر نامساوی‌ها اکید باشند، مرزها جزء تصویر نخواهند بود.



۳) اگر $c \ne 0$، آنگاه نقش هر خط ثابت $y=c$ یک بیضی با معادله زیر است:

$$\boxed{\frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c}=1}$$

مثال ۲۵: هرگاه $z=x+iy$ و $w=u+iv$، آنگاه تحت نگاشت $w=\sin z$ خط $x=\frac{\pi}{4}$ به کدامیک از منحنی‌های زیر تبدیل خواهد شد؟

۱) $u^2+v^2=\frac{1}{2}$ ۲) $u^2+v^2=\frac{1}{4}$ ۳) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ ۴) $u^2-v^2=\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ**: گزینه «۳» به راحتی با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$\frac{u^2}{\sin^2(\frac{\pi}{4})}-\frac{v^2}{\cos^2(\frac{\pi}{4})}=1 \Rightarrow 2u^2-2v^2=1 \Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}$$

البته جواب کامل‌تر شاخه‌ی سمت راستِ هذلولیِ $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ است.

مثال ۲۶: نگاشت $w=\sin(\frac{\pi z}{2a})$، نیم‌خط $x=\frac{a}{2}$ و $y>0$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟

۱) $u^2+v^2=\frac{1}{2}$ در ربع اول مختصات
۲) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ در ربع اول و چهارم مختصات
۳) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ در ربع اول مختصات
۴) $u^2+v^2=\frac{1}{2}$ در ربع اول و چهارم مختصات

☑ **پاسخ**: گزینه «۳» فرض کنیم $w_1=\frac{\pi z}{2a}$ باشد. روی نیم‌خط $x=\frac{a}{2}$ و $y>0$ داریم:

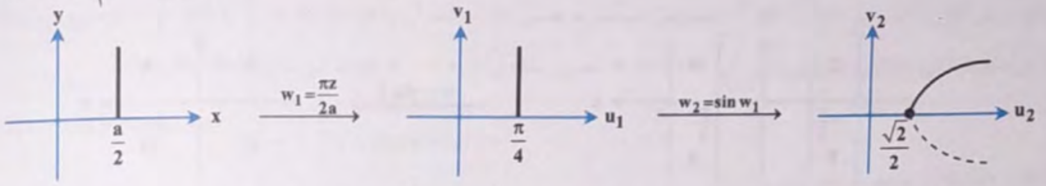
$$w_1=\frac{\pi}{2a}(\frac{a}{2}+iy)=\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2a}y=u_1+iv_1$$

پس w_1 روی خط $u_1=\frac{\pi}{4}$ در ناحیه‌ی $v_1=\frac{\pi}{2a}y>0$ قرار دارد.

تحت نگاشت $w_2=\sin w_1$، خط عمودی $u_1=\frac{\pi}{4}$ تبدیل به هذلولی مقابل می‌گردد:

$$\sin(u_1+iv_1)=\underbrace{\sin u_1\cosh v_1}_{u}+\underbrace{i\cos u_1\sinh v_1}_{v}$$

$$\begin{cases} u=\sin u_1\cosh v_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh v_1 \\ v=\cos u_1\sinh v_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh v_1 \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh v_1)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh v_1)^2 \Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}$$

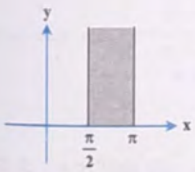


توضیح تکمیلی: با دقت کردن به علامتِ u و v متوجه می‌شویم که از هذلولیِ $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ فقط آن بخش که در ربع اول قرار دارد، بدست خواهد آمد. در واقع چون شرط $y>0$ را داریم و $v_1=\frac{\pi}{2a}y$، لذا $v_1>0$ است. پس $\cosh v_1>0$ و $\sinh v_1>0$. به همین دلیل u و v هر دو مثبت هستند و ربع اولِ هذلولی بدست می‌آید. دقت کنید که چون $v_1>0$ است داریم $e^{v_1}>e^{-v_1}$ به همین دلیل $\frac{e^{v_1}\pm e^{-v_1}}{2}>0$ می‌شود.

نگاشت‌های $w=\cos z$

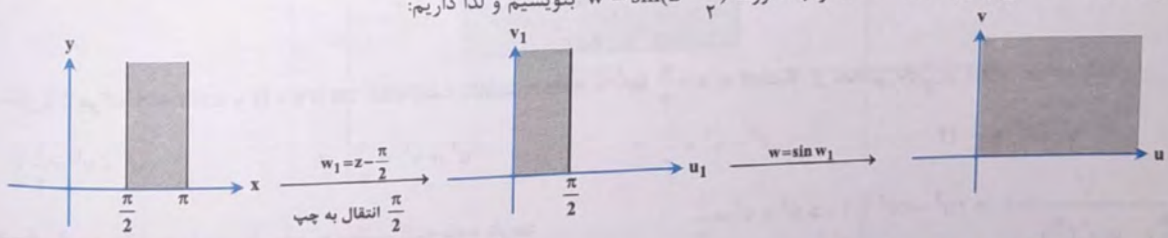
با توجه به اینکه $w=\cos z=\sin(z+\frac{\pi}{2})$، لذا مشاهده می‌شود که نگاشت $w=\cos z$ از روی $w=\sin z$ بعد از انتقال z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست حاصل می‌شود.

مثال ۲۷: **نگاشت $w=-\cos z$ ناحیه نیم‌نوار $\{y\ge 0,\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\}$ از صفحه‌ی z را به چه ناحیه‌ای از صفحه‌ی w تبدیل می‌کند؟**



۱) ربع اول
۲) ربع دوم
۳) نیم‌نوار $0\le y\le 1$ و $y\ge 0$
۴) نیم‌نوار $-1\le x\le 0$ و $y\ge 0$

پاسخ: گزینه «۱» می‌توانیم $w=-\cos z$ را به صورت $w=\sin(z-\frac{\pi}{2})$ بنویسیم و لذا داریم:



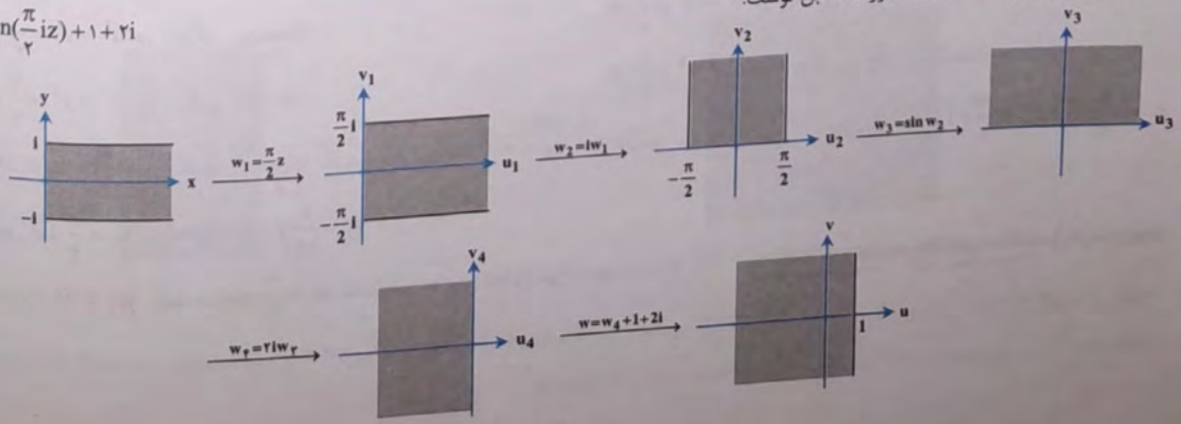
نگاشت‌های $w=\sinh z$ و $w=\cosh z$

با توجه به رابطه $w=\sinh z=-i\sin iz$ برای بررسی نقش z به کمک تبدیل $w=\sinh z$، ابتدا از دوران $z_1=iz$ و سپس از نگاشت $z_2=\sin z_1$ و در نهایت از دوران $w=-iz_2$ استفاده می‌کنیم. به همین ترتیب برای تبدیل $w=\cosh z=\cos iz$ این رویه اجرا می‌شود.

مثال ۲۸: **تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی $D:\{z\,|\,0\le \mathrm{Re}\,z<+\infty , |\mathrm{Im}\,z|\le 1\}$ تحت تبدیل $w=-2\sinh(\frac{\pi}{2}z)+1+2i$، را بدست آورید.**

پاسخ: می‌توان نگاشت را به صورت مقابل نوشت:

$$w=2i\sin(\frac{\pi}{2}iz)+1+2i$$



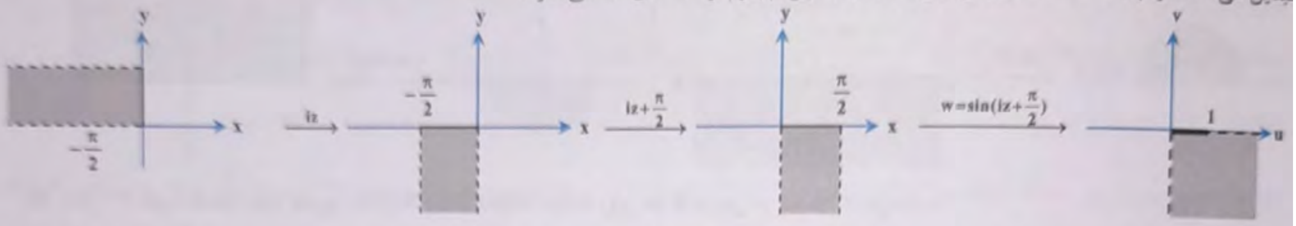
مثال ۲۹: تصویر نیم نوار $0 < y < \frac{\pi}{2}$ و $x \le 0$ تحت نگاشت $w = \cosh(z)$ کدام است؟

۱) ربع اول ۲) ربع چهارم ۳) نیم صفحه‌ی $\operatorname{Im} w > 0$ ۴) نیم صفحه‌ی $\operatorname{Re} w > 0$

پاسخ: گزینه «۲» از آنجا که رفتار $\sin z$ را روی این نوع از نیم نوارها می‌شناسیم، رابطه‌ی این نگاشت را با $\sin z$ تعیین می‌کنیم:

$$w = \cosh z = \cos iz = \sin(iz + \frac{\pi}{2})$$

با ضرب i در z، نیم نوار داده شده دورانی ۹۰ درجه را در جهت مثلثاتی خواهد داشت. سپس انتقال $+\frac{\pi}{2}$ این نیم نوار را به نیم نوار $y \le 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌کند. در نهایت نگاشت سینوس، این ناحیه را به ربع چهارم از صفحه‌ی w می‌نگارد.



توضیح: خطوطی که با خط‌چین نشان داده شده است، جزء ناحیه نیستند. در آخرین تصویر، پاره‌خط $[0, \frac{\pi}{2}]$ که روی محور xها است توسط w به پاره‌خط $[0, 1]$ تبدیل شده است. به همین علت این قسمت جزو ناحیه است.

نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$

نگاشت فوق که به نگاشت ژوکوفسکی معروف است و در آیرودینامیک بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، به جز نقاط $z = \pm 1$ در تمام نقاط همدیس است. این نقاط به ترتیب با $w = 2$ و $w = -2$ متناظر می‌باشند.

اگر فرض کنیم $z = re^{i\theta}$ آنگاه $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ و همچنین با در نظر گرفتن $w = u + iv$ داریم:

$$w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow u + iv = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u = (r + \frac{1}{r})\cos\theta \\ v = (r - \frac{1}{r})\sin\theta \end{array}}$$

با به توان ۲ رساندن طرفین روابط بالا و کم کردن دو رابطه از هم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} u^2 = (r + \frac{1}{r})^2\cos^2\theta \\ v^2 = (r - \frac{1}{r})^2\sin^2\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = (r^2 + \frac{1}{r^2} + 2) - (r^2 + \frac{1}{r^2} - 2) \Rightarrow \boxed{\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 4}$$

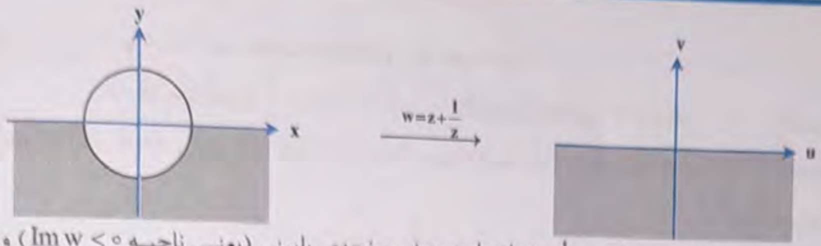
یعنی توسط این نگاشت، تمام خطوط شعاعی با زاویه θ به قسمتی از هذلولی با معادله فوق تبدیل می‌شوند. لازم به توضیح است اگر $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد، رابطه‌ی فوق قسمتی از خط $u = 0$ و اگر $\theta = k\pi$ باشد، رابطه فوق قسمتی از خط $v = 0$ می‌شود.

به همین ترتیب اگر طرفین روابط به دست آمده برای u و v را به توان ۲ رسانده و با هم جمع کنیم، داریم:

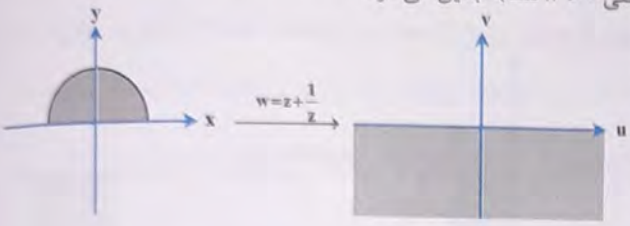
$$\boxed{\frac{u^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{(r - \frac{1}{r})^2} = 1}$$

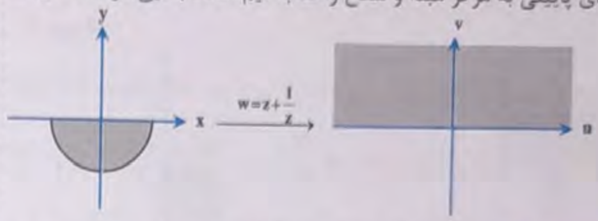
یعنی تمام دایره‌هایی به شعاع r تحت این نگاشت به روی یک بیضی با معادله فوق نگاشته می‌شوند. دقت کنید: در حالت خاصی که $r = 1$ باشد، دایره به ناحیه $\{-2 \le u \le 2 \ , \ v = 0\}$ تبدیل می‌شود. یعنی پاره‌خطی روی محور u که دو نقطه $u = -2$ و $u = 2$ را به هم وصل می‌کند.

نکته ۲: ناحیه بیرون دایره یکه که در نیم‌صفحه فوقانی قرار دارد، توسط این نگاشت به ناحیه $\operatorname{Im} w > 0$ (یعنی نیم‌صفحه فوقانی در صفحه w) و ناحیه بیرون دایره یکه که در نیم صفحه‌ی پایینی قرار دارد توسط این نگاشت به نیم‌صفحه‌ی پایینی (یعنی ناحیه $\operatorname{Im} w < 0$) تبدیل می‌شود.



همچنین ناحیه واقع در داخل نیم‌دایره‌ی بالایی به مرکز مبدأ و شعاع واحد به نیم‌صفحه‌ی پایینی (یعنی ناحیه $\operatorname{Im} w < 0$) و ناحیه واقع در داخل نیم دایره‌ی پایینی به مرکز مبدأ و شعاع واحد به نیم‌صفحه بالایی در صفحه‌ی w (یعنی $\operatorname{Im} w > 0$) تبدیل می‌شود.





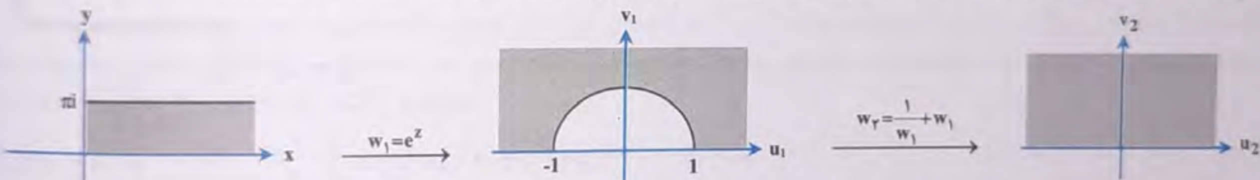
مثال۳۰: تابع $w = 2\cosh z$ قلمرو $\operatorname{Re} z \ge 0$ و $0 \le \operatorname{Im} z \le \pi$ را به روی چه قلمرویی در صفحه w می‌نگارد؟

۱) $\operatorname{Re}(w) \ge 0$ ۲) $\operatorname{Im}(w) \ge 0$ ۳) $\operatorname{Re}(w) \le 0$ ۴) $\operatorname{Im}(w) \le 0$

پاسخ: گزینه «۲»

$$w = 2\cosh z = 2\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = e^z + \frac{1}{e^z}$$

با فرض $w_1 = e^z$ می‌دانیم این نگاشت ناحیه $\operatorname{Re} z > 0$ و $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ را به بیرون نیم‌دایره نشان داده شده در شکل می‌نگارد.



توجه کنید که $w = w_1 + \frac{1}{w_1}$ یک نگاشت ژوکوفسکی می‌باشد. با توجه به تعریف این نگاشت، ناحیه ایجاد شده به نیم صفحه بالایی یعنی ناحیه $\operatorname{Im} w > 0$ نگاشته می‌شود.

مثال۳۱: ناحیه‌ی $1 < |z| < 2$، تحت نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟

۱) درون و روی بیضی به کانون‌های ± 2 غیر از خط واصل آن‌ها
۲) فقط درون بیضی به کانون‌های ± 2 غیر از خط واصل آن‌ها
۳) درون و روی بیضی به کانون‌های ± 2 با خط واصل آن‌ها
۴) فقط درون بیضی به کانون‌های ± 2 با خط واصل آن‌ها

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکات گفته شده در متن درس، اگر $r = 1$، در این صورت $v = 0$ و $-2 \le u \le 2$. حال اگر $r = 2$ معادله زیر را داریم:

$$\frac{u^2}{(2+\frac{1}{2})^2} + \frac{v^2}{(2-\frac{1}{2})^2} = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\frac{25}{4}} + \frac{v^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

معادله‌ی کلی بیضی به فرم $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ می‌باشد. در این مسئله $a^2 = \frac{25}{4}$ و $b^2 = \frac{9}{4}$ است و کانون‌های آن مطابق رابطه زیر حساب می‌شود:

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = \pm\sqrt{\frac{16}{4}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

لذا تصویر $|z| = 2$ بیضی‌ای به کانون‌های ± 2 می‌باشد. اما دقت کنید علامت تساوی در ناحیه $1 < |z| < 2$ وجود ندارد ($r \ne 1$, $r \ne 2$) پس روی بیضی و خط واصل دو کانون جزء ناحیه نیست.

مثال۳۲: دایره $|z| = \frac{a+b}{2}$، تحت نگاشت $w = z + \frac{a^2 - b^2}{4z}$، به کدام شکل تبدیل می‌شود؟

۱) دایره با شعاع $a^2 - b^2$ ۲) بیضی ۳) دایره با شعاع $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ۴) بخشی از هذلولی

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن w، بهتر است z را در مختصات قطبی نمایش دهیم، یعنی $z = re^{i\theta}$.

$$w = re^{i\theta} + \frac{\frac{(a^2 - b^2)}{4}}{re^{i\theta}} \Rightarrow \begin{cases} u = \left(r + \frac{1}{4r}(a^2 - b^2)\right)\cos\theta \\ v = \left(r - \frac{1}{4r}(a^2 - b^2)\right)\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{r=\frac{a+b}{2}} \begin{cases} u = a\cos\theta \\ v = b\sin\theta \end{cases} \to \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

پس ناحیه‌ی تبدیل یافته، بیضی با شعاع‌های a و b است.

نگاشت خطی کسری $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ (نگاشت دو خطی یا موبیوس)

برای اعداد ثابت (حقیقی یا مختلط) a، b، c و d با شرط $ad-bc\neq 0$، نگاشت $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ را نگاشت موبیوس می‌نامند. اگر $ad-bc=0$ باشد، صورت و مخرج با هم ساده می‌شوند و تابع ثابت به دست می‌آید. مثلاً $w=\dfrac{2z+3}{4z+6}=\dfrac{2z+3}{2(2z+3)}=\dfrac{1}{2}$. به همین خاطر شرط $ad-bc\neq 0$ را می‌آوریم. از آن‌جا که صورت و مخرج کسر، درجه‌ی یک و خطی هستند، این نگاشت را خطی ـ کسری هم می‌نامند.

به جز نقطه‌ی $z=-\dfrac{d}{c}$ که ریشه‌ی مخرج است، در سایر نقاط، w تحلیلی و همدیس است. اگر صفحه‌ی مختلط توسعه یافته (یعنی اعداد مختلط به همراه نقطه‌ی $z=\infty$) را در نظر بگیریم، نقاط $z_1=-\dfrac{b}{a}$ و $z_2=-\dfrac{d}{c}$ به ترتیب به نقاط $w_1=0$ و $w_2=\infty$ تبدیل می‌شوند. ویژگی جالب این نگاشت آن است که خطوط راست و دایره‌ها را به خطوط راست یا دایره تبدیل می‌کند. به بیان دقیق‌تر، هر خط یا دایره‌ای که از نقطه‌ی $z=-\dfrac{d}{c}$ عبور کند، توسط این نگاشت به خط تبدیل می‌شود، و هر خط یا دایره‌ای که از این نقطه عبور نکند، به یک دایره تبدیل خواهد شد. برای نمونه؛ نگاشت $w=\dfrac{z-1}{2z-6i}$ را در نظر بگیرید. ریشه‌ی مخرج $3i=\dfrac{6i}{2}=-\dfrac{d}{c}=z$ است. این نقطه روی دایره‌ی $|z|=3$ قرار دارد. پس دایره‌ی $|z|=3$ توسط این نگاشت به یک خط راست تبدیل می‌شود. زیرا از $-\dfrac{d}{c}$ عبور کرده است. اما دایره‌ی $|z|=2$ به یک دایره تبدیل می‌شود زیرا از $-\dfrac{d}{c}$ عبور نمی‌کند. در یک جمع‌بندی می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

نکته ۳: فرض کنیم $R=\left|\dfrac{d}{c}\right|$ باشد. نگاشت $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$، دایره‌ی $|z|=R$ را به یک خط راست و سایر دایره‌های به فرم $|z|=R'\neq R$ را به دایره تبدیل می‌کند.

نکته ۴: تبدیل $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ بر روی دایره $|cz+d|=\sqrt{|ad-bc|}$ طول‌های قطعه‌های بی‌نهایت کوچک را تغییر نمی‌دهد.

نکته ۵: تبدیل $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}$ ناحیه $|z|\leq 1$ را به داخل دایره $|w|\leq 1$ می‌نگارد که θ دلخواه و z_0 نقطه‌ای داخل دایره $|z|\leq 1$ است.

نکته ۶: نگاشت $w=e^{i\theta}(\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0})$، تبدیل‌های زیر را انجام می‌دهد:

۱) اگر z_0 به شکلی باشد که $\operatorname{Im}(z_0)<0$ (یعنی z_0 در نیم‌صفحه پایینی قرار داشته باشد، مثلاً $z_0=1-i$) آنگاه این نگاشت **ناحیه $\operatorname{Im}z\geq 0$** (یعنی نیم‌صفحه فوقانی) را به **بیرون دایره واحد** می‌نگارد و **ناحیه $\operatorname{Im}z\leq 0$** (یعنی نیم‌صفحه پایینی) را به **درون دایره واحد** می‌نگارد.

۲) اگر z_0 به شکلی باشد که $\operatorname{Im}z_0>0$ (یعنی z_0 در نیم‌صفحه بالایی قرار داشته باشد، مثلاً $z_0=i$) آنگاه این نگاشت **ناحیه $\operatorname{Im}z\geq 0$** (یعنی نیمه صفحه فوقانی) را به **داخل دایره واحد** می‌نگارد و **ناحیه $\operatorname{Im}z<0$** (یعنی نیم‌صفحه پایینی) را به **بیرون دایره واحد** می‌نگارد.

نکته ۷: هر نگاشت مانند $w=\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$، یک **ربع** صفحه‌ی مختصات را به داخل یا خارج **نیم‌دایره** می‌نگارد و برای این که متوجه شویم به نیم‌دایره **بالایی** و یا به نیم‌دایره **پایینی** می‌نگارد، می‌توانیم یک نقطه دلخواه را در آن امتحان کنیم.

مثال ۳۳: نگاشت $w=\dfrac{z-1}{z+1}$، ربع اول را به چه ناحیه‌ای می‌نگارد؟

☑ **پاسخ:** با توجه به این که $z_0=1$، لذا نگاشت فوق نیم‌صفحه‌ی فوقانی را به **داخل** دایره واحد می‌نگارد. باید معلوم کنیم ربع اول را به درون نیم‌دایره‌ی بالایی می‌نگارد یا درون نیم‌دایره‌ی پایینی. برای این کار یک نقطه در ربع اول را امتحان کنیم؛ برای این منظور نقطه‌ی $z=i+1$ را انتخاب می‌کنیم:

$$w=\frac{(i+1)-1}{(i+1)+1}=\frac{i}{i+2}=\frac{i(i-2)}{i^2-2^2}=\frac{-1-2i}{-5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

که نقطه‌ای در نیم‌دایره فوقانی دایره واحد است.

مثال ۳۴: نشان دهید نگاشت $w=\dfrac{i-z}{i+z}$، ناحیه $\operatorname{Im}z\geq 0$ را به درون دایره $|z|\leq 1$ و نگاشت $w=i\dfrac{1-z}{1+z}$، ناحیه $|z|\leq 1$ را به ناحیه $\operatorname{Im}z\geq 0$ می‌نگارد. (به عبارت دیگر بررسی کنید این دو نگاشت معکوس یکدیگر هستند)

☑ **پاسخ:** نگاشت $w=\dfrac{i-z}{i+z}$ را می‌توان به شکل $w=-(\dfrac{z-i}{z+i})$ یا به عبارت دیگر به فرم $w=e^{i\pi}(\dfrac{z-i}{z+i})$ نوشت. در واقع در مقایسه با نگاشت گفته شده $\theta=\pi$ و $z_0=i$ می‌باشد که گفتیم نیم صفحه‌ی فوقانی یعنی $\operatorname{Im}z>0$ را به داخل دایره واحد می‌نگارد. اما نگاشت $w=i(\dfrac{1-z}{1+z})$، عکس نگاشت اولی می‌باشد که می‌توان به شکل زیر از نگاشت $w=\dfrac{i-z}{i+z}$ به آن رسید:

$$w=\frac{i-z}{i+z}\Rightarrow wi+wz=i-z\Rightarrow wz+z=i-wi\Rightarrow z(w+1)=i(1-w)\Rightarrow z=i(\frac{1-w}{1+w})\xrightarrow{\text{معکوس}}w=i(\frac{1-z}{1+z})$$

مثال ۳۵: نگاشت $w=\frac{z^2-i}{z^2+i}$، ربع اول را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) درون نیم دایره بالایی دایره واحد
۲) درون نیم‌دایره پایینی دایره واحد
۳) درون دایره واحد
۴) بیرون دایره واحد

پاسخ: گزینه «۳» نگاشت فوق ترکیبی از نگاشت‌های مقابل است: $w_1=z^2\ ,\ w=\frac{w_1-i}{w_1+i}$

ابتدا ربع اول (یعنی ناحیه $0<\text{Arg}z<\frac{\pi}{2}$) تحت نگاشت $w_1=z^2$ به ناحیه $0<\text{Arg}w_1<\pi$ تبدیل می‌شود، سپس باید تصویر این ناحیه تحت نگاشت w حساب شود. با توجه به این که نقطه‌ی $z_0=i$ بالای محور حقیقی قرار دارد، لذا نیم‌صفحه‌ی فوقانی (یعنی $0<\text{Arg}z<\pi$) به درون دایره واحد نگاشته می‌شود.

مثال ۳۶: تبدیل دو خطی که نیمه بالایی صفحه z را به درون دایره یکه در صفحه w چنان بنگارد که $z=i$ به $w=0$ و نقطه $z=\infty$ به $w=-1$ تبدیل شود، کدام گزینه است؟

۱) $w=2(\frac{i-z}{i+z})$
۲) $w=2e^{i\frac{\pi}{2}}(\frac{i-z}{i+z})$
۳) $w=\frac{i-z}{i+z}$
۴) $w=e^{i\pi}(\frac{i-z}{i+z})$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم نگاشت فوق به صورت $w=e^{i\alpha}(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0})$ می‌باشد، اما با توجه به شرط صورت سؤال داریم:

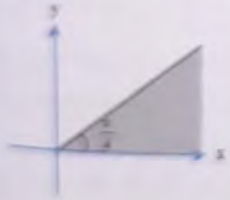
$$z=i\Rightarrow w=0\Rightarrow 0=e^{i\alpha}(\frac{i-z_0}{i-\bar{z}_0})\Rightarrow i=z_0$$

$$z=\infty\Rightarrow w=-1\Rightarrow -1=e^{i\alpha}(\frac{\infty-z_0}{\infty-\bar{z}_0})\Rightarrow -1=1\times e^{i\alpha}\Rightarrow e^{i\alpha}=-1$$

دقت کنید چون نقطه داده شده $z=\infty$ می‌باشد، لذا نسبت کسر داخل پرانتز را برابر یک قرار دادیم.

پس دو قسمت مجهول یعنی z_0 و $e^{i\alpha}$ مشخص شد و نگاشت فوق به صورت مقابل خواهد بود: $w=(-1)(\frac{z-i}{z+i})=\frac{i-z}{i+z}$

مثال ۳۷: نگاشتی که ناحیه نشان داده شده را به داخل دایره واحد می‌نگارد، کدام است؟



۱) $w=\frac{2z^4+i}{z^4-i}$
۲) $w=\frac{z^4+i}{z^4-i}$
۳) $w=\frac{2z^4-i}{z^4+i}$
۴) $w=\frac{z^4-i}{z^4+i}$

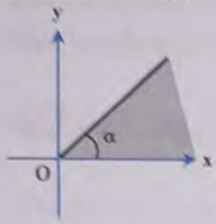
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که ناحیه‌ی نهایی درون دایره واحد است، لذا نمی‌توان با یک تبدیل خطی به آن رسید. ابتدا با تبدیل $w_1=z^4$ ناحیه فوق را به نیم صفحه‌ی بالایی نگاشته و سپس با تبدیل $w=\frac{w_1-i}{w_1+i}$، نیم صفحه‌ی فوقانی به داخل دایره واحد نگاشته می‌شود:

مثال ۳۸: ناحیه دوم صفحه مختلط z با کدام تبدیل به درون دایره واحد نگاشته می‌شود؟

۱) $w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2-1}{z^2+1}$
۲) $w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2+i}{z^2-i}$
۳) $w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2-i}{z^2+i}$
۴) $w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z^2+1}{z^2-1}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها ابتدا تحت نگاشت $w_1=z^2$ ربع دوم (یعنی ناحیه‌ی $\frac{\pi}{2}\le \text{Arg}z\le\pi$) به ناحیه $\pi\le\text{Arg}w_1\le 2\pi$ و یا به عبارت دیگر به ناحیه‌ی $\text{Im}(w_1)\le 0$ تبدیل می‌شود. با توجه به مطالبی که گفتیم، برای این که ناحیه $\text{Im}(w_1)\le 0$ به درون دایره واحد نگاشته شود باید $\text{Im}(z_0)<0$ و با توجه به گزینه‌ها باید $z_0=-i$ باشد.

مثال ۳۹: تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ای با زاویه α در ربع اول از صفحه z که در شکل زیر نمایش داده شده است، تحت نگاشت $w=\dfrac{i-z^{(\frac{\pi}{\alpha})}}{i+z^{(\frac{\pi}{\alpha})}}$ کدام است؟



۱) درون و روی نیم‌دایره یکه فوقانی
۲) درون نیم‌دایره یکه تحتانی
۳) بیرون دایره یکه
۴) درون و روی دایره یکه

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنیم $w_1=z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ و $w_2=\dfrac{i-w_1}{i+w_1}$ باشند. اگر نگاشت w_1 را در فرم قطبی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$z=re^{i\theta}\ \Rightarrow w_1=r^{\frac{\pi}{\alpha}}e^{i\frac{\pi}{\alpha}\theta}$$

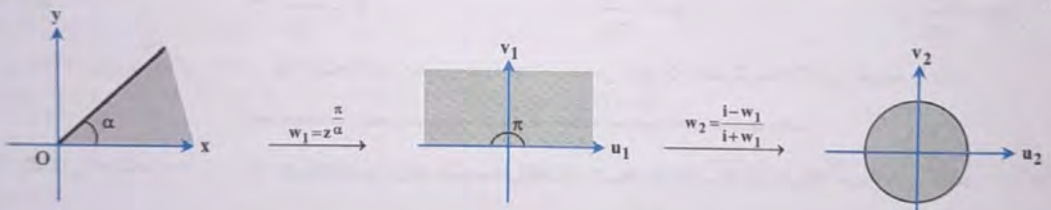
بنابراین نگاشت w_1، r را به توان $\frac{\pi}{\alpha}$ می‌رساند و θ را در $\frac{\pi}{\alpha}$ ضرب می‌کند. در صفحه‌ی z، ناحیه‌ای را داریم که در آن $0\le r<\infty$ و $0\le\theta\le\alpha$ است.

بنابراین در صفحه‌ی w_1 خواهیم داشت:

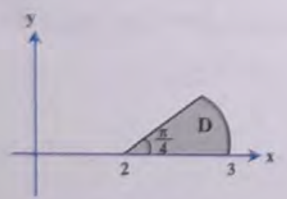
$$0\le r<\infty \text{ و } 0\le\theta\le\alpha\times\frac{\pi}{\alpha}=\pi$$

اکنون نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im}w_1>0$ را در اختیار داریم. حالا نگاشت $w_2=\dfrac{i-w_1}{i+w_1}=-\dfrac{w_1-i}{w_1+i}$ یک نگاشت موبیوس است که نقطه‌ی $+i$ را به مبدأ می‌نگارد.

در واقع w_2 را می‌توان به شکل $w_2=e^{i\pi}\dfrac{w_1-i}{w_1-\bar{i}}$ نوشت که فرم استاندارد موبیوس است. این نگاشت نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im}w_1\ge 0$ را به درون و روی دایره‌ی واحد می‌نگارد.



مثال ۴۰: ناحیه D در صفحه z، تحت کدام یک از نگاشت‌های زیر به ربع اول صفحه w تبدیل می‌شود؟



۱) $e^{\frac{\pi}{2}i}\dfrac{(z-2)^4+i}{(z-2)^2-i}$
۲) $e^{-\frac{\pi}{2}i}\dfrac{(z-2)^4+1}{(z-2)^4-1}$
۳) $e^{\frac{\pi}{2}i}\dfrac{(z+2)^4+i}{(z-2)^2-i}$
۴) $e^{-\frac{\pi}{2}i}\dfrac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}$

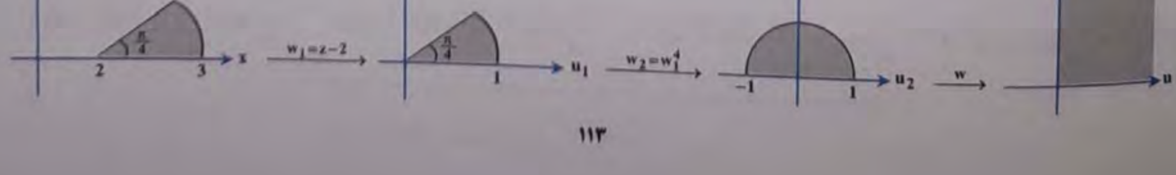
☑ **پاسخ :** گزینه «۴» همان‌طور که می‌دانیم نگاشتی مانند $w=e^{i\pi}(\dfrac{z-i}{z+i})$ و به عبارت دیگر $w=-(\dfrac{z-i}{z+i})$، نیم صفحه‌ی بالایی را به داخل دایره واحد می‌نگارد، به نظر می‌رسد در این تست باید روش معکوس را طی کنیم، یعنی دنبال نگاشتی باشیم که دایره واحد را به نیم صفحه‌ی بالایی بنگارد.

$$w=-(\frac{z-i}{z+i})\ \Rightarrow wz+iw=-z+i\ \Rightarrow z(w+1)=-i(w-1)\ \Rightarrow z=-i(\frac{w-1}{w+1})\xrightarrow{\text{معکوس}}w=-i(\frac{z-1}{z+1})$$

پس تحت این نگاشت دایره یکه تبدیل به نیم صفحه‌ی بالایی می‌شود. اما صورت سؤال در مورد «ربع اول» صحبت کرده است، برای این که ببینیم این نگاشت نیم‌دایره بالایی را به ربع اول صفحه می‌نگارد یا نیم‌دایره پایینی را، می‌توانیم یک نقطه مانند $z=i$ را از نیم‌دایره بالایی انتخاب کنیم:

$$w=-i(\frac{i-1}{i+1})=-i[\frac{(i-1)(i-1)}{i^2-1}]=-i(\frac{i^2+1-2i}{-2})=\frac{i}{2}(-1+1-2i)=-i^2=+1$$

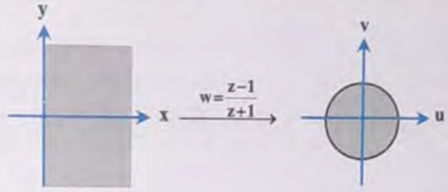
پس هر نقطه بر روی نیم‌دایره بالایی بر روی ربع اول نگاشته می‌شود. لذا باید اول صورت مسئله را به یک نیم دایره (بالایی) تبدیل کنیم: برای این کار ابتدا با نگاشت $w_1=z-2$ ناحیه را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و سپس با $w_2=w_1^4$، ناحیه را به نیم دایره بالایی تبدیل می‌کنیم.



پس نگاشت به شکل $w=-i[\frac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}]$ و چون $e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$ لذا نگاشت به صورت $w=e^{-\frac{\pi}{2}i}[\frac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}]$ می‌باشد.

توجه: یک راه ساده‌تر برای تبدیل D به ربع اول، استفاده از انتقال $(z-2)$ و بعد نگاشت $w=(z-2)^2$ است. ولی هدف ما با توجه به گزینه‌ها یافتن یک نگاشت کسری است.

نکته ۸: تبدیل $w=\frac{z-1}{z+1}$ ربع اول و چهارم (یعنی ناحیه $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$) را به دایره واحد تبدیل می‌کند.



تبدیل سه نقطه توسط نگاشت کسری

سه نقطه z_1، z_2 و z_3 را می‌توانیم با یک تبدیل کسری بر روی سه نقطه w_1، w_2 و w_3 بنگاریم. این نگاشت با معادله زیر بیان می‌گردد:

$$\boxed{\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}}$$

اگر یکی از نقاط، نقطه ∞ باشد، نسبت دو تفاضلی که شامل این نقطه هستند، را باید برابر ۱ فرض کرد.

مثال ۴۱: تبدیل خطی کسری که به ترتیب $-i$، ۰ و i را روی ۰، ∞ و ۱- می‌نگارد، کدام است؟

۱) $w=\frac{z-i}{2z}$ ۲) $w=\frac{z-i}{-2z}$ ۳) $w=\frac{z+i}{2z}$ ۴) $w=\frac{z+i}{-2z}$

پاسخ: گزینه «۴» دقت شود اگر $z=i$ را در گزینه‌ها قرار دهیم باید $w=-1$ حاصل شود که فقط گزینه (۴) این شرایط را دارد.

مثال ۴۲: نگاشتی که نقاط $z_1=0$، $z_2=1$ و $z_3=\infty$ را به ترتیب به نقاط $w_1=-1$، $w_2=-i$ و $w_3=1$ می‌نگارد، دایره $|z|=1$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) تمام محور حقیقی ۲) قسمت منفی محور موهومی ۳) تمام محور موهومی ۴) قسمت مثبت محور موهومی

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا با استفاده از رابطه‌ی بیان شده در بالا، تبدیل $w=f(z)$ را بدست می‌آوریم:

$$(\frac{w-w_1}{w-w_3})(\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1})=(\frac{z-z_1}{z-z_3})(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1})$$

با جایگذاری مقادیر مورد نظر داریم:

$$\frac{w+1}{w-1}\times\frac{-i-1}{-i+1}=\frac{z-0}{z-\infty}\times\frac{1-\infty}{1-0}$$

در سمت راست دقت کنید که: $\frac{1-\infty}{z-\infty}=1$ است (در واقع منظور، $\lim\limits_{z_3\to\infty}\frac{1-z_3}{z-z_3}=1$ است.)

در سمت چپ نیز داریم:

$$\frac{-i-1}{-i+1}=-\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=-\frac{2i}{2}=-i$$

در نتیجه خواهیم داشت: $z=-i\frac{w+1}{w-1}$. حال اگر $|z|=1$ باشد داریم:

$$|-i\frac{w+1}{w-1}|=1\Rightarrow|w+1|=|w-1|\Rightarrow(u+1)^2+v^2=(u-1)^2+v^2\Rightarrow 2u=-2u\Rightarrow u=0$$

در صفحه‌ی w خط $u=0$ همان محور موهومی است.

مثال ۴۳: تابع $H(u,v)=1+\frac{2}{\pi}\text{Im}[\ln(\frac{w+1}{w-1})]$، در صفحه $u-v$ در ناحیه‌ی بالای محور $u=0$، همساز است. اگر $w=f(z)$ نگاشتی خطی-کسری باشد که سه نقطه‌ی $w_1=-1$، $w_2=0$ و $w_3=1$ را به ترتیب به سه نقطه نظیر آن در صفحه z یعنی $z_3=1$، $z_2=-i$ و $z_1=-1$ بنگارد، آن‌گاه معادله‌ی $H(u,v)$ در صفحه‌ی $x-y$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{2}{\pi}[\arg(1+z)-\arg(1-z)]$ ۲) $\frac{1}{\pi}[\arg(1+z)-\arg(1-z)]$ ۳) $\frac{2}{\pi}[\arg(1-z)-\arg(1+z)]$ ۴) $\frac{1}{\pi}[\arg(1-z)-\arg(1+z)]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ضابطه‌ی نگاشت خطی ـ کسری گفته شده را می‌نویسیم:

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}=\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} \Rightarrow (\frac{z+1}{z-1})(\frac{-i-1}{-i+1})=(\frac{w+1}{w-1})(\frac{0-1}{0+1}) \Rightarrow \frac{w+1}{w-1}=(\frac{z+1}{z-1})(\frac{1+i}{1-i})$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه داده شده، خواهیم داشت:

$$H(u,v)=1+\frac{2}{\pi}\text{Im}[\text{Ln}\frac{(z+1)}{(z-1)}\cdot\frac{(1+i)}{(1-i)}]=1+\frac{2}{\pi}\text{Im}[\text{Ln}(\frac{z+1}{z-1})+\text{Ln}(\frac{1+i}{1-i})]$$

با توجه به رابطه $\frac{1+i}{1-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ خواهیم داشت:

$$H(u,v)=1+\frac{2}{\pi}\text{Im}[\text{Ln}(\frac{z+1}{z-1})+i\frac{\pi}{2}]=2+\frac{2}{\pi}\text{Im}[\text{Ln}\frac{z+1}{z-1}]$$

بدیهی است که $\text{Im}[\text{Ln}\frac{z+1}{z-1}]$ برابر آرگومان عدد مختلط $\frac{z+1}{z-1}$ می‌باشد و لذا داریم:

$$H(u,v)=2+\frac{2}{\pi}\arg(\frac{z+1}{z-1})=2+\frac{2}{\pi}[\arg(z+1)-\arg(z-1)]$$

با توجه به رابطه $\arg(z-1)=\pi+\arg(1-z)$ خواهیم داشت:

$$H(u,v)=2+\frac{2}{\pi}[\arg(z+1)-\pi-\arg(1-z)]=\frac{2}{\pi}[\arg(1+z)-\arg(1-z)]$$

تذکر: در بعضی مسائل بهتر است z را برحسب w به دست آورده و شرایط مسئله را برای w بررسی کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۴۴: تصویر قرص بسته $|z-2|\le 1$ تحت نگاشت $w=(1+i)z+2i$ کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز $2+4i$ و شعاع $\sqrt{2}$
۲) دایره‌ای به مرکز $2+2i$ و شعاع $\sqrt{2}$
۳) دایره‌ای به مرکز $2+4i$ و شعاع ۲
۴) دایره‌ای به مرکز $2+2i$ و شعاع ۲

پاسخ: گزینه «۱» به دست آوردن ناحیه موردنظر توسط نگاشت فوق به صورت هندسی با توجه به مطالبی که در مورد نگاشت $w=az+b$ گفتیم، ممکن است، اما به لحاظ جبری به دست آوردن ناحیه راحت‌تر است:

$$w=(1+i)z+2i \Rightarrow z=\frac{1}{1+i}(w-2i)$$

$$|z-2|\le 1 \Rightarrow |\frac{1}{1+i}(w-2i)-2|\le 1 \Rightarrow |w-2i-2-2i|\le|1+i| \Rightarrow |w-2-4i|\le\sqrt{2}$$

که معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $2+4i$ و شعاع $\sqrt{2}$ می‌باشد.

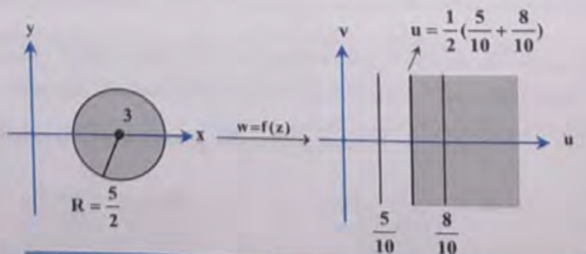
مثال ۴۵: تبدیل ناحیه‌ی $|z-3|<\frac{5}{2}$ تحت تابع تبدیل $w=f(z)=\frac{z+1}{2z-1}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$w=\frac{z+1}{2z-1}\Rightarrow z=\frac{w+1}{2w-1}\Rightarrow z-3=\frac{w+1}{2w-1}-3\Rightarrow z-3=\frac{4-5w}{2w-1}$$

با توجه به اینکه $|z-3|<\frac{5}{2}$، لذا داریم:

$$|\frac{4-5w}{2w-1}|<\frac{5}{2} \Rightarrow |\frac{10w-8}{10w-5}|<1 \Rightarrow |w-0.8|<|w-0.5|$$



مثال ۴۶: تصویر ناحیه $\{z: |z-1|<1\ ,\ \text{Im}(z)>0\}$ تحت تبدیل $w=\frac{z}{z-2}$ کدامیک از نواحی زیر است؟

۱) ربع اول
۲) ربع دوم
۳) ربع سوم
۴) ربع چهارم

پاسخ: گزینه «۳»

$$w=\frac{z}{z-2}\Rightarrow zw-2w-z=0\Rightarrow z(w-1)=2w\Rightarrow z=\frac{2w}{w-1}\Rightarrow z-1=\frac{w+1}{w-1}\xrightarrow{|z-1|<1}|\frac{w+1}{w-1}|<1\Rightarrow|w+1|<|w-1|$$

با توجه به نامساوی فوق ملاحظه می‌گردد نقاطی مدنظر هستند که فاصله آنها تا نقطه $u=-1$ کوچکتر از فاصله این نقاط تا نقطه $u=1$ باشد، پس ربع دوم و یا سوم می‌تواند جواب باشد. از طرفی داریم:

$$\text{Im}(z)>0\Rightarrow \text{Im}(\frac{2w}{w-1})>0\Rightarrow \text{Im}[\frac{w(\bar{w}-1)}{|w-1|^2}]>0\Rightarrow \text{Im}[|w|^2-w]>0\Rightarrow \text{Im}(w)<0$$

و لذا ناحیه سوم، جواب است.

مثال ۴۷: نقش ناحیه محصور بین دوایر $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط نگاشت $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟

۱) $v>\frac{1}{2}$ و $u>\frac{1}{2}$ ۲) $v<-\frac{1}{2}$ و $u>\frac{1}{2}$ ۳) $v<-\frac{1}{2}$ و $u<\frac{1}{2}$ ۴) $v>-\frac{1}{2}$ و $u<\frac{1}{2}$

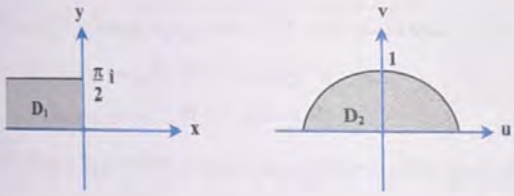
پاسخ: گزینه «۲»

$$w=\frac{1}{z}\Rightarrow z=\frac{1}{w}\Rightarrow z-1=\frac{1-w}{w}\quad \text{و}\quad z-i=\frac{1-iw}{w}\Rightarrow\left|\frac{w-1}{w}\right|<1\quad \text{و}\quad \left|\frac{w+i}{w}\right|<1\Rightarrow |w-1|<|w|\quad \text{و}\quad |w+i|<|w|$$

$|w-1|<|w|$ یعنی نقاطی که فاصله آنها تا نقطه $u=1$ کمتر از فاصله آنها تا نقطه $u=0$ باشد، که واضح است باید $u>\frac{1}{2}$ باشد و به همین ترتیب از نامساوی $|w+i|<|w|$ نامساوی $v<-\frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود.

تذکر ۲: نوع دیگری از مسائل که مطرح می‌شوند، به این صورت است که دو ناحیه داده می‌شوند و تبدیلی که این نواحی را به یکدیگر تبدیل کرده است، سؤال می‌شود که از جمله تستهای نسبتاً مشکل می‌باشد، که تقریباً اکثر آنها را با مقایسه نقاط تبدیل شده به یکدیگر می‌توان به روش کوتاه حل کرد.

مثال ۴۸: تبدیلی که حوزه D_1 را بر روی حوزه D_2 می‌نگارد، کدام است؟



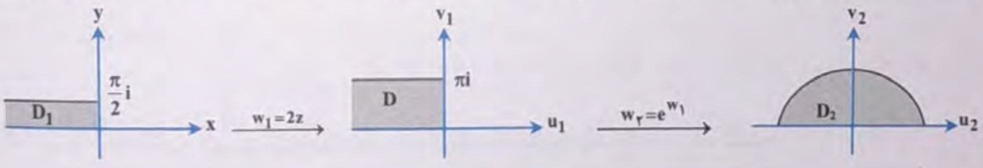
۱) $w=e^z$

۲) $w=z+\frac{1}{z}$

۳) $w=\frac{\pi i}{\pi i-4z}$

۴) $w=e^{2z}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا تحت تبدیل $w_1=2z$ ناحیه D_1 به ناحیه D و سپس با تبدیل $w_2=e^{w_1}$ ناحیه D به ناحیه D_2 تبدیل می‌شود.



مثال ۴۹: تبدیلی که قطاع $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ از دایره‌ی واحد در صفحه z را به روی نیمه بالایی صفحه w می‌نگارد کدام است؟

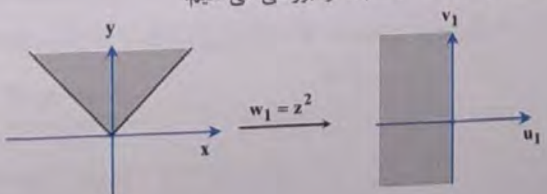
۱) $w=-\left(\frac{z^3+1}{z^3-1}\right)^3$ ۲) $w=\left(\frac{z^3-1}{z^3+1}\right)^3$ ۳) $w=\left(\frac{z^3+1}{z^3-1}\right)^3$ ۴) $w=-\left(\frac{z^3-1}{z^3+1}\right)^3$

پاسخ: گزینه «۴» این قطاع ابتدا به وسیله تبدیل $w_1=z^3$ به روی نیم‌دایره نگاشته می‌شود و سپس توسط تبدیل $w_2=-i\frac{w_1-1}{w_1+1}$ این ناحیه به روی ربع اول و در نهایت توسط تبدیل $w_3=(w_2)^2$ ناحیه به نیم‌صفحه بالایی صفحه w نگاشته می‌شود.

مثال ۵۰: نگاشتی که ناحیه $y\geq|x|$ را به داخل دایره یکه می‌نگارد، کدام است؟

۱) $w=\frac{1+z^2}{-2i(1-z^2)}$ ۲) $w=\frac{1+z^2}{i(1-z^2)}$ ۳) $w=\frac{1-z^2}{i(1+z^2)}$ ۴) $w=\frac{1-z^2}{2i(1+z^2)}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها ابتدا اثر نگاشت $w_1=z^2$ را بررسی می‌کنیم:



حالا طبق یک نگاشت خطی ـ کسری باید نیم‌صفحه چپ به دایره واحد نگاشت شود. می‌توانیم ابتدا با دوران $w_2=e^{i\frac{\pi}{2}}w_1=iw_1$ ناحیه را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم تا نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Im}w_1<0$ بدست آید. سپس از نگاشت موبیوس استفاده می‌کنیم که نیم‌صفحه‌ی پایینی را به درون دایره‌ی واحد تصویر کند. این نگاشت می‌تواند به شکل $w_3=e^{i\alpha}\frac{w_2-z_0}{w_2-\bar{z}_0}$ باشد که $\operatorname{Im}z_0<0$ است. با انتخاب $z_0=-i$ خواهیم داشت:

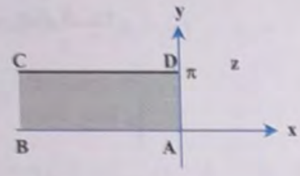
$$w_3 = e^{i\alpha}\frac{w_2+i}{w_2-i} = e^{i\alpha}\frac{iw_1+i}{iw_1-i} = e^{i\alpha}\frac{w_1+1}{w_1-1} = e^{i\alpha}\frac{z^2+1}{z^2-1}$$

با توجه به دلخواه بودنِ α می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که: $e^{i\alpha} = \frac{1}{-i} = i$ شود. به ازای $\alpha = \frac{\pi}{2}$ داریم: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ بنابراین: $w_3 = i\frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{z^2+1}{i(1-z^2)}$

مثال ۵۱: **نگاشتی که ناحیه‌ی بسته $\{z = x+iy : x \le 0, 0 \le y \le \pi\}$ را به روی نیم قرص واحد $\begin{cases} |w| \le 1 \\ v = \operatorname{Im} w \ge 0 \end{cases}$ بنگارد، کدام است.**

۱) $w = e^z$ ۲) $w = e^{-z}$ ۳) $w = 2e^z$ ۴) $w = 2e^{-z}$

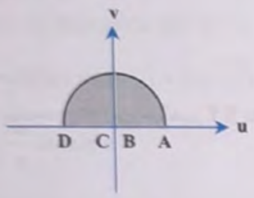
پاسخ: گزینه «۱» ناحیه‌ی تعریف شده در صفحه‌ی z، مطابق شکل مقابل است.



می‌دانیم که تحت تبدیل e^z می‌توان نوار نیمه متناهی را به دایره‌ی واحد نگاشت:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases}$$

مرز ناحیه‌ی داده شده از یک پاره‌خط و دو نیم‌خط تشکیل شده است، آن‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:



AB نیم‌خط: $x \le 0, y = 0 \rightarrow \begin{cases} 0 < r \le 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$

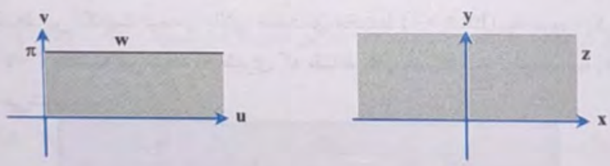
DC نیم‌خط: $x \le 0, y = \pi \rightarrow \begin{cases} 0 < r \le 1 \\ \theta = \pi \end{cases}$

AD پاره‌خط: $x = 0, 0 \le y \le \pi \rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

مثال ۵۲: **نگاشتی که ناحیه $\{w \mid \operatorname{Re}(w) \ge 0 \ , \ 0 \le \operatorname{Im}(w) \le \pi\}$ در صفحه‌ی w را به ناحیه $\operatorname{Im}(z) \ge 0$ در صفحه‌ی z می‌نگارد، کدام است؟**

۱) $z = \cosh w$ ۲) $z = \sinh w$ ۳) $z = \cos w$ ۴) $z = \sin w$

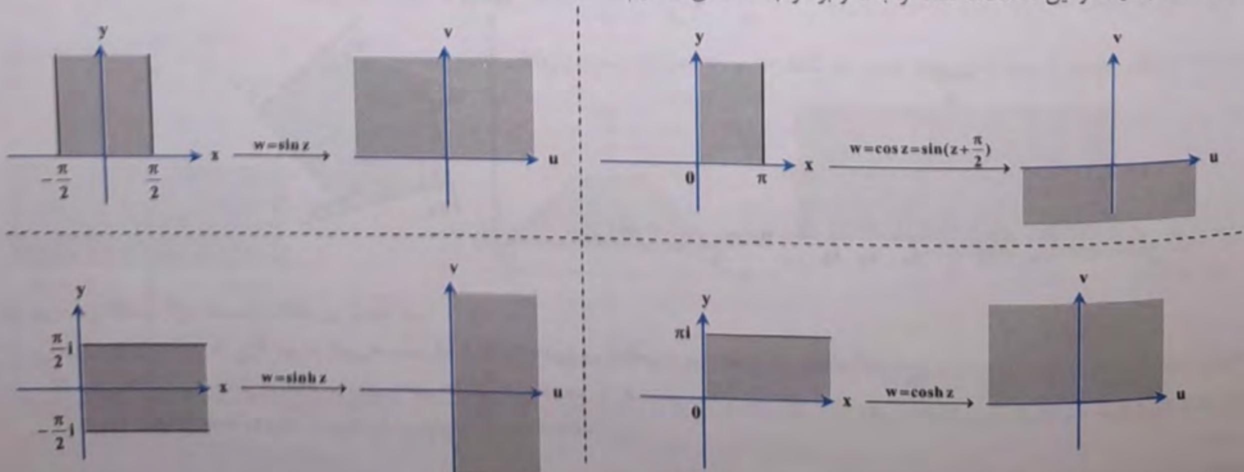
پاسخ: گزینه «۱»



با توجه به ضابطه $\cosh w$ بر حسب u و v و همچنین نوشتن $z = x+iy$ داریم: $y = \sinh u . \sin v \quad , \quad x = \cosh u . \cos v$

در ناحیه داده شده $0 \le v \le \pi$ است و $u \ge 0$. بنابراین $0 \le \sin v \le 1$ و $-1 \le \cos v \le 1$ و $0 \le \sinh u < \infty$ و $1 \le \cosh u < \infty$. به این ترتیب در صفحه‌ی z خواهیم داشت: $-\infty < x < +\infty$ و $0 \le y < \infty$. در نتیجه نگاشت $z = \cosh w$ نوار داده شده را به نیم صفحه‌ی $\operatorname{Im}(z) \ge 0$ تصویر می‌کند.

توضیح کامل‌تر: تصویر نوارهای قائم و افقی به عرض یا طول π توسط نگاشت‌های معروف زیر، موضوع برخی از تست‌ها هستند و لازم است آن‌ها را به خاطر داشته باشید. در این نگاشت‌ها دامنه را با z و برد را با w نشان داده‌ایم.



در واقع همان‌طور که قبلاً گفتیم، می‌توانید فقط $w=\sin z$ را به خاطر بسپارید و سپس $\cos z$ را به صورت $\sin(z+\frac{\pi}{2})$ بررسی کنید. $\sinh z$ و $\cosh z$ همان رفتار توابع مثلثاتی را برای نوارهای افقی ارائه می‌دهند.

تذکر ۳: تعداد کمی از سؤالاتی که مطرح می‌شوند، مسائلی هستند که در آنها ناحیه در صفحه w و نگاشتی که این ناحیه را از صفحه z تبدیل کرده به عنوان داده‌های مسئله هستند و ناحیه اولیه (ناحیه در صفحه z) سؤال می‌شود.

مثال ۵۳: ناحیه‌ای از صفحه z که تصویرش تحت تبدیل $w=z^2$ حوزه‌ای مستطیلی در صفحه w و محدود به خطوط $u=1$، $u=2$، $v=1$ و $v=2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\begin{cases}2\le x^2-y^2\\ 0\le xy\le 1\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}1\le x^2-y^2\le 2\\ 1\le xy\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}1\le x^2-y^2\le 2\\ \frac{1}{2}\le xy\le 1\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}0\le x^2-y^2\le 1\\ xy\ge 2\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$w=z^2=x^2-y^2+i2xy=u+iv \Rightarrow \begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$$

اکنون در صفحه‌ی w می‌خواهیم $1\le u\le 2$ و $1\le v\le 2$ باشد. پس در صفحه‌ی z داریم:

$$\begin{cases}1\le x^2-y^2\le 2\\ 1\le 2xy\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1\le x^2-y^2\le 2\\ \frac{1}{2}\le xy\le 1\end{cases}$$

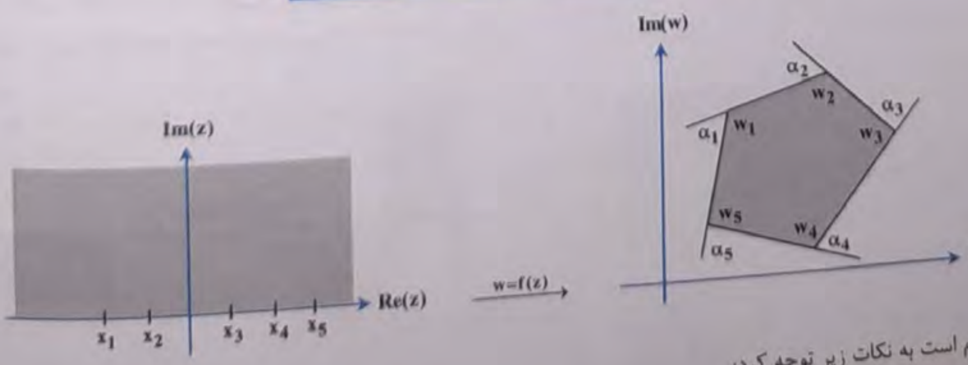
نگاشت کریستوفل ـ شوارتز

از جمله نگاشت‌هایی که کاربردهای عملی زیادی داشته و برعکس در آزمون‌های کارشناسی ارشد کمتر مورد توجه طراحان سؤال قرار گرفته است نگاشت کریستوفل ـ شوارتز می‌باشد. توسط این نگاشت نیمه‌ی بالای صفحه‌ی مختلط $(\operatorname{Im} z>0)$ به درون یک چند ضلعی با رئوس $w_1,\dots,w_n$ و زوایای خارجی $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ $(-\pi<\alpha_n<\pi)$ نگاشته می‌شود، به طوری که نقاط $x_1,\dots,x_n$ به ترتیب به $w_1,\dots,w_n$ نگاشته می‌شوند. نگاشت کریستوفل ـ شوارتز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(z)=A\left(\int_{z_0}^{z}(z-x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}\times\dots\times(z-x_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}dz\right)+B$$

این نگاشت را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$f'(z)=A(z-x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(z-x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\dots(z-x_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}$$



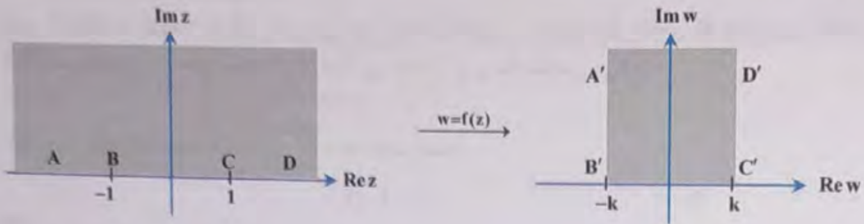
در مورد این نگاشت لازم است به نکات زیر توجه کرد:

۱) در معادلات فوق A و B اعداد ثابتی هستند که با توجه به اندازه و موقعیت چند ضلعی تعیین می‌گردند.

۲) $x_1,x_2,\dots,x_n$ نقاطی متمایز بر روی محور حقیقی در صفحه‌ی z هستند.

۳) هر سه نقطه از نقاط $x_1,x_2,\dots,x_n$ را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد.

مثال ۵۴: تبدیلی که نگاشت نشان داده شده در شکل زیر را انجام می‌دهد، کدام است؟



۱) $w=\frac{2k}{\pi}\text{Arc}\sin z$

۲) $w=\frac{4k}{\pi}\text{Arctg}z$

۳) $w=-\frac{2k}{\pi}\text{Arc}\sin z$

۴) $w=-\frac{4k}{\pi}\text{Arctg}z$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نگاشت کریستوفل ـ شوارتز، برای این سؤال داریم:

$\alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{2}\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=1$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی نگاشت، نتیجه می‌شود:

$$f(z)=A\int(z+1)^{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}}(z-1)^{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}}dz+B=A\int(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}dz+B=A\int(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}dz+B=A\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}+B=A(\arcsin z)+B$$

با توجه به متقارن بودن شکل واضح است که $z=0$ باید به $w=0$ نگاشته شود، در نتیجه داریم:

$f(0)=0\Rightarrow A[\arcsin(0)]+B=0\Rightarrow B=0$

همچنین واضح است نقطه $x=-1$ به نقطه‌ی k تبدیل شده، پس: $f(-1)=-k$ و داریم:

$f(-1)=A[\arcsin(-1)]=A(-\frac{\pi}{2})$

بنابراین $A(-\frac{\pi}{2})=-k$ و لذا $A=\frac{2k}{\pi}$. پس تبدیل موردنظر عبارت است از:

$f(z)=\frac{2k}{\pi}\arcsin z$

مثال ۵۵: نگاشت $w=\int\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{4}}}$، ناحیه $\text{Im}\,z>0$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع

۲) مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۳) مربع

۴) مستطیل

پاسخ: گزینه «۲» با تجزیه‌ی مخرج می‌توانیم نگاشت داده شده را به این صورت بنویسیم:

$$w=\int\frac{dz}{(1-z)^{\frac{3}{4}}(1+z)^{\frac{3}{4}}}=\int(1-z)^{-\frac{3}{4}}(1+z)^{-\frac{3}{4}}dz$$

برای آن‌که به فرم استاندارد نگاشت کریستوفل ـ شوارتز برسیم، لازم است عوامل زیر انتگرال به صورت $(z-x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(z-x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}$ در آیند.

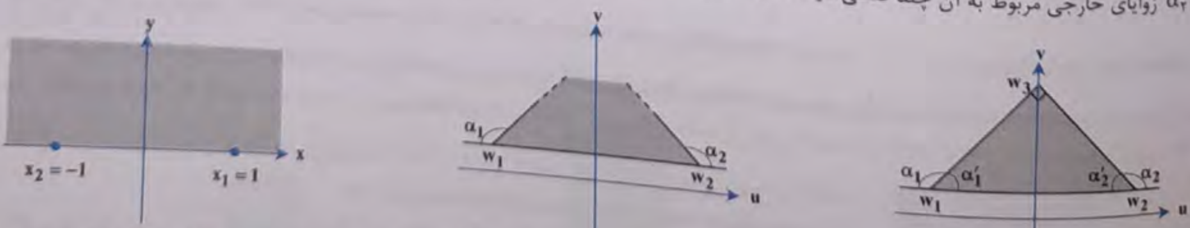
بنابراین از ۱− در پرانتز اول فاکتور می‌گیریم:

$$w=(-1)^{-\frac{3}{4}}\int(z-1)^{-\frac{3}{4}}(z+1)^{-\frac{3}{4}}dz$$

این یک نگاشت کریستوفل ـ شوارتز است که عدد ثابت $c=(-1)^{-\frac{3}{4}}$ هم در آن ضرب شده است. با ضرب یک عدد ثابت، نوع چند ضلعی تغییر نخواهد کرد. بنابراین این ضریب ثابت تأثیری بر جواب ما ندارد. این نگاشت نقاط $x_1=1$ و $x_2=-1$ را بـه نقـاط $w_1=f(1)$ و $w_2=f(-1)$ مـی‌نگـارد. بنـابراین یـک چند ضلعی ایجاد می‌کند که w_1 و w_2 دو تا از رئوس آن هستند. رأس دیگر ممکن است در بی‌نهایت باشد یا یک نقطه از صفحه‌ی w باشد. این بستگی به زوایای داخلی در نقاط w_1 و w_2 دارد. از طرفی داریم: $-\frac{\alpha_1}{\pi}=-\frac{3}{4}$ و $-\frac{\alpha_2}{\pi}=-\frac{3}{4}$ به عبارتی $\alpha_1=\alpha_2=\frac{3\pi}{4}$ است.

α_1 و α_2 زوایای خارجی مربوط به آن چند ضلعی در نقاط w_1 و w_2 هستند. بنابراین زوایای داخلی برابرند با:

$\alpha'_1=\alpha'_2=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$



بنابراین تنها رأس باقی مانده از امتداد اضلاع زوایای α'_1 و α'_2 بدست می‌آید. با توجه به آن‌که $\alpha'_1=\alpha'_2=\frac{\pi}{4}$ است، زاویه‌ی سوم ۹۰ درجـه خواهـد بـود و یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود. در شکل بالا ابتدا w_1 و w_2 و زوایای خارجی را نشان داده‌ایم، سپس بـا امتـداد اضـلاع بـه رأس سـوم رسیده‌ایم.

توجه: برای پاسخ دادن به سؤال نیازی نیست محل دقیق w_1 و w_2 مشخص شود.

نقاط ثابت یک نگاشت

نقاطی که نگاشت $w = f(z)$ آنها را بر روی خود آنها می‌نگارد و به عبارت دیگر نقاطی که تحت این نگاشت ثابت نگهداشته مـی‌شـوند را نقـاط ثابـت یک نگاشت می‌نامیم و ریشه‌های معادله $f(z) = z$ این نقاط را برای ما مشخص می‌کند.

مثال ۵۶: نقاط ثابت نگاشت $w = \frac{2iz-1}{z+2i}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $-i$ و ۱
۳) $\pm i$
۴) i و -1

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$\frac{2iz-1}{z+2i} = z \Rightarrow z^2 + 2iz = 2iz - 1 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$$

نگاشت‌های ترکیبی و متوالی

در این قسمت نگاشت‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که ترکیب متوالی نگاشت‌ها هستند و یا ضابطه‌ی آن‌ها به فرم معمول و آشنای نگاشت‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم، نیست.

مثال ۵۷: تبدیل یافته‌ی دایره $z = \cos t + i \sin t$، $(0 \le t < 2\pi)$ تحت نگاشت $w = \frac{z}{\bar{z}}$ کدام است؟

۱) دایره به شعاع ۲ و مرکز $(0,-1)$
۲) دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز مبدأ
۳) دایره به شعاع یک و مرکز مبدأ
۴) دایره به شعاع یک و مرکز $(0,-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. برای دایره‌یِ $z = \cos t + i \sin t$ داریم $z = e^{it}$. با جایگذاری در w داریم:

$$w = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{e^{it}}{e^{-it}} = e^{i2t}$$

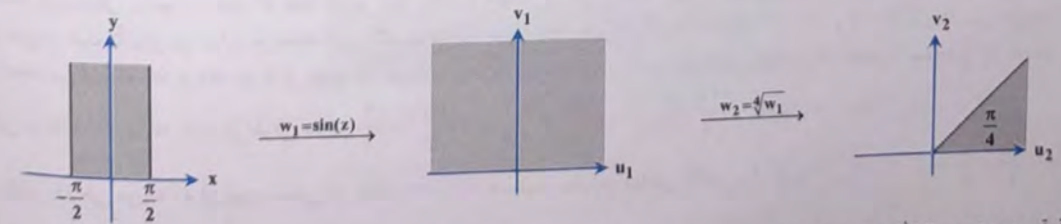
می‌دانیم منحنی $w = e^{i2t}$ دایره‌ی واحد را در صفحه‌ی w نشان می‌دهد. $(|w| = 1)$.

مثال ۵۸: نوار نیمه متناهی $\{y \ge 0 \ , \ |x| \le \frac{\pi}{2}\}$، تحت نگاشت $w = \sqrt[4]{\sin z}$ به کدام ناحیه نگاشته می‌شود؟

(با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Berkeley)

۱) قسمتی از ربع اول که بالای خط $u = v$ قرار دارد.
۲) قسمتی از ربع اول که زیر خط $u = v$ قرار دارد.
۳) قسمتی از ربع اول که بالای خط $v = u + 1$ قرار دارد.
۴) قسمتی از ربع اول که زیر خط $v = u + 1$ قرار دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا تأثیر نگاشت $\sin(z)$ و سپس $\sqrt[4]{\sin z}$ را بررسی می‌کنیم. ناحیه‌ی داده شده دارای بخش‌هایی در ربع اول و دوم است. در این ناحیه $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ و $y \ge 0$ است.



بخش‌های حقیقی و موهومی $\sin z$ چنین هستند:

$u = \mathrm{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y$ $\qquad$ $v = \mathrm{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y$

در ناحیه‌ی داده شده داریم $-1 \le \sin x \le 1$ و $0 \le \cos x \le 1$ و $1 \le \cosh y < \infty$ و $0 \le \sinh y < \infty$. پس خواهیم داشت $-\infty < u < +\infty$ و $0 \le v < \infty$. پس نگاشت $w_1 = \sin z$ ناحیه داده شده را به نیم صفحه‌ی بالایی $v \ge 0$ تصویر مـی‌کنـد. در ایـن ناحیـه $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le r < \infty$ اسـت. اکنـون نگاشت $w_2 = \sqrt[4]{w_1}$ این ناحیه را به ناحیه‌ی $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ و $0 \le r < \infty$ تصویر خواهد کرد. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مثال ۵۹: تصویر ناحیه $2\mathrm{Im}\, z > \mathrm{Ln}2$ تحت نگاشت $w = e^{iz} \sin z$ کدام است؟

۱) درون دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$
۲) درون دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{4}$
۳) درون دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$
۴) درون دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا نگاشت داده شده را به شکل مقابل باز نویسی می‌کنیم:

$$w=e^{iz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\Rightarrow w=\frac{e^{2iz}}{2i}-\frac{1}{2i}$$

با توجه به نگاشت فوق که در واقع ترکیبی از چند نگاشت است، ابتدا ناحیه‌ی $\operatorname{Im} z>\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$، به صورت زیر تحت نگاشت $w_1=e^{2iz}$ به ناحیه‌ی $|w_1|<\frac{1}{2}$ تبدیل می‌شود:

$$w_1=e^{2iz}=e^{2i(x+iy)}=e^{-2y}.e^{2ix}\Rightarrow |w_1|=e^{-2y}$$

چون ناحیه داده شده به صورت $\operatorname{Im} z>\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$ و یا $y>\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$|w_1|<e^{-2\times\frac{1}{2}\operatorname{Ln}2}\Rightarrow |w_1|<e^{-\operatorname{Ln}2}\Rightarrow |w_1|<\frac{1}{2}$$

از طرفی تصویر ناحیه‌ی $|w_1|<\frac{1}{2}$ تحت نگاشت $w_2=\frac{1}{2i}w_1$ به صورت مقابل است:

$$|w_1|=|2iw_2|<\frac{1}{2}\Rightarrow |w_2|<\frac{1}{4}$$

$$w=w_2-\frac{1}{2i}\Rightarrow w+\frac{1}{2i}=w_2\xrightarrow{\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}}w-\frac{i}{2}=w_2\Rightarrow |w_2|=\left|w-\frac{i}{2}\right|\xrightarrow{|w_2|<\frac{1}{4}}\left|w-\frac{1}{2}i\right|<\frac{1}{4}$$

که معادله دایره‌ای به شعاع $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{4}$ است.

تذکر: در این تست با توجه به «گزینه‌ها» چون تمام تصویرهای نهایی دایره می‌باشند، فقط اندازه‌هایی که تغییر می‌کنند را در نگاشت‌ها مورد بررسی قرار دادیم و از دوران و چرخش‌هایی که نگاشت‌ها ایجاد می‌کردند، صرف‌نظر کردیم. (دایره را هر چقدر بچرخانیم باز هم دایره است!)

مثال ۶۰: دیسک $|z|<1$، تحت نگاشت $w=\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{-2}$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Stanford)

۱) نیم‌صفحه بالایی به جز نیم خط $u\le 0, v=0$

۲) تمام صفحه به جز نیم خط $u\le 0, v=0$

۳) نیم صفحه پایینی به جز نیم خط $u\ge 0, v=0$

۴) تمام صفحه به جز نیم خط $u\ge 0, v=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌توانیم با معکوس کردن کسر، علامت منفی را از توان حذف کنیم:

$$w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

ابتدا بخش‌های حقیقی و موهومی $w_1=\frac{1+z}{1-z}$ را مشخص می‌کنیم.

$$w_1=\frac{(1+x)+iy}{(1-x)-iy}\times\frac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy}=\frac{(1-x^2-y^2)+2iy}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}(w_1)=\dfrac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}=\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2-2x+1}\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\operatorname{Re} w_1=\dfrac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1}\\ \operatorname{Im}(w_1)=\dfrac{2y}{(1-x)^2+y^2}=\dfrac{2y}{x^2+y^2-2x+1}\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\operatorname{Im} w_1=\dfrac{2r\sin\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\end{cases}$$

حالا توجه کنید که در دیسک $|z|<1$ داریم: $0\le r<1$ و $-1\le\sin\theta\le 1$ و $-1\le\cos\theta\le 1$. در مخرج کسرهای فوق عبارت $r^2-2r\cos\theta+1$ را داریم. این عبارت یک چند جمله‌ای درجه دو بر حسب r است. $\Delta=4\cos^2\theta-4\le 0$ است. بنابراین، این چند جمله‌ای، تغییر علامت نمی‌دهد. به ازای $r=0$ مقدارش $+1$ است، پس همواره نامنفی خواهد بود: $0\le r^2-2r\cos\theta+1$

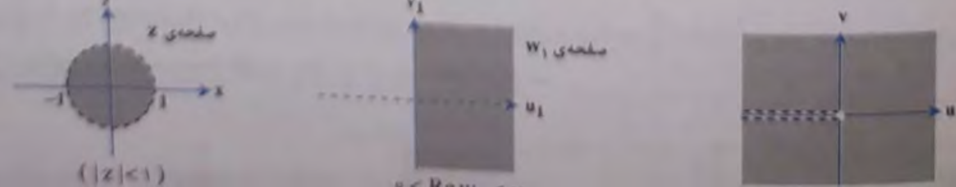
همچنین در صورت کسرها $1\le 1-r^2<0$ و $-2\le 2r\sin\theta\le 2$ است. به این ترتیب، $0<\operatorname{Re} w_1<\infty$ و $-\infty<\operatorname{Im} w_1<+\infty$ خواهد بود. پس نگاشت $w_1=\frac{1+z}{1-z}$ ناحیه‌ی $|z|<1$ را به نیم‌صفحه‌ی $\operatorname{Re} w_1>0$ در صفحه‌ی w_1 می‌نگارد.

باید ببینیم نگاشت $w=w_1^2$ این نیم صفحه را به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌کند. در صفحه‌ی w_1 داریم $-\frac{\pi}{2}<\arg w_1<\frac{\pi}{2}$ و $0\le|w_1|<\infty$.

نگاشت $w=w_1^2$ آرگومان را دو برابر می‌کند و اندازه‌ها را به توان ۲ می‌رساند. بنابراین در صفحه‌ی w داریم:

$$\begin{cases}-\pi<\arg w=2\arg w_1<\pi\\ 0\le|w|=|w_1|^2<\infty\end{cases}$$

به عبارتی در صفحه‌ی w داریم $-\pi<\theta<\pi$. نیم‌خط $\theta=\pi$ بخشی از تصویر نیست. روی این نیم‌خط داریم $v=0$ و $u\le 0$.



$(|z|<1)$

$0<\operatorname{Re} w_1<\infty$

$-\infty<\operatorname{Im} w_1<+\infty$

$-\pi<\arg w<\pi$

می‌بینیم که همه‌ی صفحه‌ی w به جز نیم‌خط $(u\le 0, v=0)$ بدست آمده است.

مثال ۶۱: تحت تبدیل $w = i\text{Arctg}\frac{1-z}{1+z}$ درون و روی دایره واحد از صفحه z به کدام ناحیه در صفحه w تصویر می‌شود؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{2} \le \text{Im}\, w \le k\pi + \pi$

۲) $2k\pi + \pi \le \text{Im}\, w \le 2k\pi + 2\pi$

۳) $2k\pi \le \text{Im}\, w \le 2k\pi + \pi$

۴) $k\pi \le \text{Im}\, w \le k\pi + \frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا بررسی می‌کنیم تحت نگاشت $w_1 = \frac{1-z}{1+z}$، ناحیه $|z| \le 1$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود:

$$w_1 = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow w_1 + w_1 z = 1 - z \Rightarrow z(w_1 + 1) = 1 - w_1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1-w_1}{1+w_1} \xrightarrow{|z|\le 1} \left|\frac{1-w_1}{1+w_1}\right| \le 1 \Rightarrow |1-w_1| \le |1+w_1| \Rightarrow (1-u_1)^2 + v_1^2 \le (1+u_1)^2 + v_1^2$$

$$\Rightarrow 1 + u_1^2 - 2u_1 \le 1 + u_1^2 + 2u_1 \Rightarrow 4u_1 \ge 0 \Rightarrow u_1 \ge 0$$

پس ناحیه به نیم صفحه سمت راست تبدیل شد. از طرفی از فصل اول کتاب می‌دانیم $\text{Arctg} z = \frac{i}{2}\text{Ln}\frac{i+z}{i-z}$ و بنابراین نگاشت $w = i\text{Arctg} w_1$ به صورت مقابل ساده می‌شود:

$$w = i\left(\frac{i}{2}\right)\text{Ln}\left(\frac{i+w_1}{i-w_1}\right) \Rightarrow w = -\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{i+w_1}{i-w_1}\right)$$

اما می‌دانیم تصویر $u_1 \ge 0$ تحت نگاشت $w_2 = \frac{i+w_1}{i-w_1}$، نیم صفحه پایینی صفحه یعنی $v_2 \le 0$ می‌باشد و حالا باید ببینیم این ناحیه تحت نگاشت $w_3 = \text{Ln} w_2$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود:

$$w_3 = \text{Ln} w_2 \Rightarrow w_2 = e^{w_3} \Rightarrow u_2 + iv_2 = e^{iu_3}(\cos v_3 + i\sin v_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = e^{u_3}\cos v_3 \\ v_2 = e^{u_3}\sin v_3 \xrightarrow{v_2 \le 0} e^{u_3}\sin v_3 \le 0 \xrightarrow{e^{u_3} > 0} \sin v_3 \le 0 \Rightarrow 2k\pi + \pi \le v_3 \le 2k\pi + 2\pi \end{cases}$$

با توجه به نگاشت $w_4 = \frac{1}{2}w_3$، ناحیه به صورت مقابل خواهد شد:

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \le v_4 \le k\pi + \pi \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} \le \text{Im}\, w_4 \le k\pi + \pi$$

اما مواظب باشید علامت منفی را فراموش نکنید و به اشتباه گزینه (۱) را انتخاب کنید؛ چون $w = -w_4$ و ناحیه‌ی فوق با دورانی به اندازه π همراه خواهد بود، بنابراین تصویر نهایی به صورت زیر می‌باشد:

$$k\pi \le \text{Im}\, w \le k\pi + \frac{\pi}{2}$$

مثال ۶۲: اگر $D = \{z : -\frac{\pi}{2} \le \text{Re}\, z \le \frac{\pi}{2}\}$ نگاشت $w = \tan\frac{z}{2}$ نوار بیکران D را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

۱) $\{w : |w| \le 1\}$

۲) $\{w : |w| > 1\}$

۳) $\{w : -\frac{\pi}{2} \le \text{Re}\, w \le \frac{\pi}{2}\}$

۴) $\{w : -1 \le \text{Re}\, w \le 1\}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$w = \text{tg}\frac{z}{2} = \frac{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}}{i(e^{i\frac{z}{2}} + e^{-i\frac{z}{2}})} = \frac{e^{iz} - 1}{i(e^{iz} + 1)} \Rightarrow w = -i\left(\frac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1}\right)$$

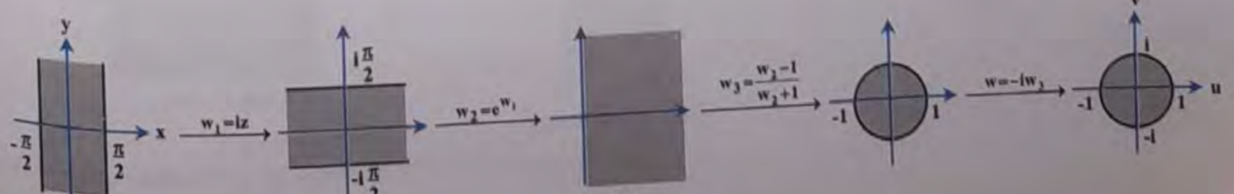
نگاشت $w = \text{tg}\frac{z}{2}$ را می‌توان ترکیبی از نگاشت‌های مقابل در نظر گرفت:

$$w_1 = iz \quad , \quad w_2 = e^{w_1} \quad , \quad w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1} \quad , \quad w = -iw_3$$

همان‌طور که در شکل مشخص است، ابتدا توسط نگاشت $w_1 = iz$، ناحیه‌ی مزبور 90° می‌چرخد و بعد از آن با نگاشت $w_2 = e^{w_1}$ ناحیه به وجود آمده به ربع‌های اول و چهارم به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \Rightarrow e^{-\infty} < r < e^{+\infty} \Rightarrow 0 < r < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سپس با نگاشت $w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$ (همانطور که در متن درس اشاره شد، ربع اول و چهارم، یعنی ناحیه $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ را به دایره واحد تبدیل می‌کند) ناحیه به دایره واحد نگاشته می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w = -iw_3$ دایره فقط می‌چرخد.



محاسبه‌ی مساحت تبدیل یافته یک ناحیه

فرض کنید ناحیه D از صفحه‌ی z توسط نگاشت $w=f(z)$ به ناحیه‌ی D' در صفحه‌ی w تصویر شود. اگر سؤال از ما مساحت ناحیه D' را بخواهد، می‌توانیم مانند مسائلی که تاکنون حل کرده‌ایم، ابتدا D را تحت نگاشت $w=f(z)$ به D' تبدیل کرده و پس از این‌که ناحیه D' را در صفحه‌ی w ترسیم کردیم، مساحت ناحیه را با فرمول‌های هندسی محاسبه مساحت و یا روش‌های دیگر حساب کنیم. این راه در برخی سؤالات ممکن است سخت و با حجم محاسبات بالا باشد. برای همین راه دومی هم وجود دارد و آن، این است که از فرمول مقابل استفاده کنیم: $\text{مساحت ناحیه } D' = \iint_{D'} du\,dv$

یعنی محاسبه‌ی انتگرال‌گیری دوگانه روی ناحیه D'، اما ممکن است سؤال کنید هنوز که مجبوریم ناحیه D' را به‌دست بیاوریم؟ جواب این است که فرمول هنوز نهایی نشده است! ما می‌توانیم ژاکوبین دستگاه جدید را حساب کرده و به جای انتگرال‌گیری روی ناحیه D' روی همان ناحیه D انتگرال‌گیری را انجام دهیم. (یعنی اصلاً لازم نیست D' را بدست بیاوریم).

اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، آنگاه ژاکوبین به صورت مقابل تعریف می‌شود: $J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=u_x v_y-u_y v_x$

در واقع فرمول نهایی به این صورت است:

$$\boxed{\text{مساحت ناحیه } D' = \iint_D |J|\,dx\,dy}$$

یادتان باشد زمانی می‌توانیم از فرمول انتگرال دوگانه استفاده کنیم که **نگاشت در ناحیه‌ی D یک به یک باشد**. در واقع یک به یک بودن نگاشت $w=f(z)$ در ناحیه D، شرط لازم برای استفاده از این فرمول است.

صورت دیگر فرمول: با کمی دقت مشخص است $|J|$ همان $|f'(z)|^2$ است البته به شرط این‌که $w=f(z)$ تحلیلی باشد (وقتی f تحلیلی باشد، آنگاه شرایط کوشی ریمان برقرارند و می‌توانیم در فرمول ژاکوبین مثلاً به جای v_y، مساوی آن یعنی u_x و به جای u_y مساوی آن یعنی $-v_x$ را قرار دهیم و در این صورت $J=u_x^2+v_x^2$ و می‌دانیم این مقدار مساوی $|f'(z)|^2$ است) بنابراین فرمول را می‌توان به فرم زیر نیز نوشت:

$$\boxed{\text{مساحت ناحیه } D' = \iint_D |f'(z)|^2\,dx\,dy}$$

این فرمول در سؤالاتی که f بر حسب z داده شده و $f(z)$ تابعی تحلیلی است، بسیار اثربخش‌تر است.

مثال ۶۳: مساحت شکل حاصل از تبدیل دایره یکه، تحت نگاشت $f(z)=z+\frac{z^2}{2}$، در صفحه w چقدر است؟(از سؤالات پایان ترم دانشگاه Harward)

۱) π　　۲) $\frac{3\pi}{2}$　　۳) 2π　　۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم D دایره‌ی $x^2+y^2\le 1$ و D' تصویر آن باشد. $\text{مساحت ناحیه‌ی } D' = \iint_D |f'(z)|^2\,dydx$

با محاسبه‌ی $|f'(z)|^2$ ادامه می‌دهیم: $|f'(z)|=|1+z|^2=|1+x+iy|^2=(x+1)^2+y^2=x^2+y^2+2x+1$

اکنون در مختصات قطبی برای ناحیه‌ی D داریم: $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$. در نتیجه مقدار S در دستگاه قطبی چنین بدست می‌آید:

$$S=\iint_D (x^2+y^2+2x+1)dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2+2r\cos\theta+1)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{2r^3}{3}\cos\theta+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$\Rightarrow S=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)d\theta=\left[\frac{3}{4}\theta+\frac{2}{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{4}(2\pi)=\frac{3\pi}{2}$$

مثال ۶۴: مساحت تصویر ناحیه‌ی $D=\{x+iy\,|\,0\le x\le \mathrm{Ln}2;-\frac{\pi}{4}\le y<\frac{\pi}{4}\}$، تحت نگاشت $f(z)=e^{4z}$ کدام است؟

۱) $(2^8-1)\pi$　　۲) $\frac{2^8-1}{2}\pi$　　۳) $(2^7-1)\pi$　　۴) $\frac{(2^7-1)}{2}\pi$

پاسخ: گزینه «۱» نگاشت $f(z)=e^{az}$ در ناحیه‌ی D به شرطی یک‌به‌یک است که بازه‌ی تغییر ay بازه‌ای با طول کمتر از 2π باشد.

برای مثال نگاشت $f(z)=e^{2z}$ در ناحیه‌ی $0\le y<\pi$ یک‌به‌یک است؛ زیرا در این ناحیه $0\le 2y<2\pi$ است. اما این نگاشت در ناحیه‌ی $0\le y<\frac{3\pi}{2}$ یک‌به‌یک نیست؛ زیرا در این صورت داریم $0\le 2y<3\pi$ و طول این بازه بیشتر از 2π است.

در این سؤال چون در ناحیه‌ی D داریم $-\frac{\pi}{4}\le y<\frac{\pi}{4}$ بنابراین $-\pi\le 4y<\pi$ است. بازه‌ی $[-\pi,\pi)$ به طول 2π است، لذا می‌توانیم از انتگرال دوگانه استفاده کنیم.

روش اول: ابتدا $|f'(z)|^2$ را حساب می‌کنیم:

$$J=|f'(z)|^2=|4e^{4z}|^2=16e^{8x}$$

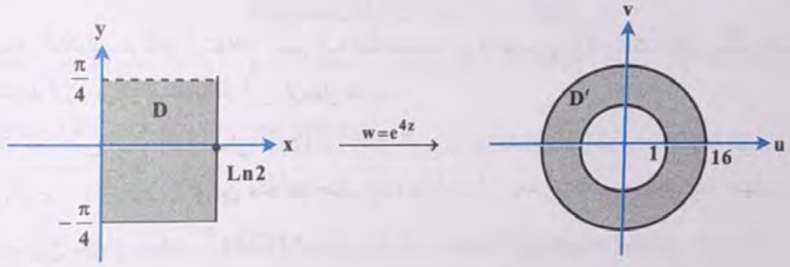
کران‌های x و y در ناحیه‌ی D واضح هستند: $-\frac{\pi}{4}\le y<\frac{\pi}{4}$ ، $0\le x\le Ln2$، بنابراین مساحت D' (تصویر D) برابر است با:

$$\text{مساحت ناحیه } D'=\int_0^{Ln2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}16e^{8x}dy\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{Ln2}16e^{8x}dx=\pi e^{8x}\Big|_0^{Ln2}=(2^8-1)\pi$$

روش دوم: برای نشان دادن اینکه جواب یکسان بدست می‌آید، از روش عادی هم مساحت را حساب می‌کنیم.
یعنی ناحیه‌ی D' را بدست می‌آوریم و مساحت آن را به صورت مستقیم محاسبه می‌کنیم. در نگاشت $f(z)=e^{4z}$ داریم:

$$w=f(z)=e^{4x}e^{4iy}\Rightarrow\begin{cases}r=e^{4x}\\ \theta=4y\end{cases}$$

در ناحیه‌ی D داریم $0\le x\le Ln2$ و $-\frac{\pi}{4}\le y<\frac{\pi}{4}$، بنابراین در صفحه‌ی w و آن هم در مختصات قطبی $1\le r\le 16$ و $-\pi\le\theta\le\pi$ است.
پس ناحیه‌ی D' بین دو دایره‌ی $r=1$ و $r=16$ قرار دارد.



پس مساحت D' برابر است با: $\text{مساحت ناحیه } D'=$ مساحت دایره‌ای با شعاع ۱۶ − مساحت دایره‌ای با شعاع یک $=(16^2-1)\pi=(2^8-1)\pi$

مثال ۶۵: نگاشت $w=e^{3z}$ ناحیه‌ی $D=\{x+iy\,|-\infty<x\le0\ ,\ 0\le y\le\pi\}$ را به ناحیه‌ی D' در صفحه‌ی w تصویر می‌کند. مساحت D' کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) $\frac{5}{2}\pi$

پاسخ: گزینه «۲»

روش نادرست: در اینجا $0\le\arg w=3y\le3\pi$ است، پس طول این بازه بیشتر از 2π است و نباید انتگرال دوگانه بگیریم. یعنی اگر از راه انتگرال برویم به پاسخ غلط زیر می‌رسیم:

$$\text{مساحت ناحیه } D'=\iint_D|f'(z)|^2dxdy$$

$$|f'(z)|^2=|3e^{3z}|^2=9e^{6x}$$

$$\text{مساحت } D'=\int_{-\infty}^0\int_0^\pi 9e^{6x}dydx=\int_{-\infty}^0 9\pi e^{6x}dx=\frac{9\pi}{6}e^{6x}\Big|_{-\infty}^0=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$$

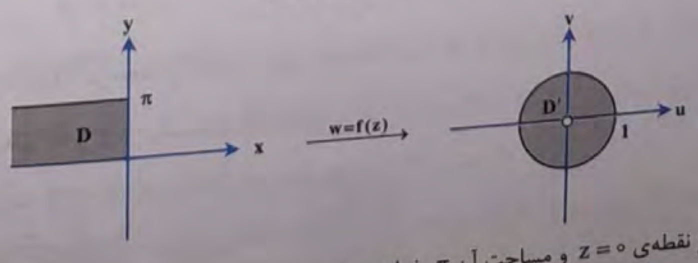
با حل هندسی مسأله خواهیم دید که این پاسخ غلط است.

روش صحیح: راه حل هندسی و بدست آوردن ناحیه D':

$$w=e^{3z}=e^{3x}e^{i3y}\Rightarrow\theta=3y\ ,\ r=e^{3x}$$

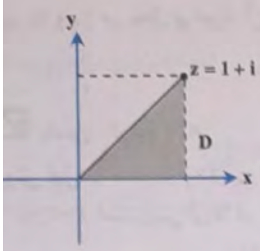
در ناحیه‌ی D، $-\infty<x\le0$ و $0\le y\le\pi$ است. پس در ناحیه‌ی D' داریم:

$$0<r\le1\ ,\ 0\le\theta\le3\pi$$



بنابراین D' دیسک واحد است به جز نقطه‌ی $z=0$ و مساحت آن π خواهد بود.

مثال ۶۶: نگاشت $f(x+iy)=x^2+iy^2$ ناحیه‌ی D را به ناحیه‌ای با کدام مساحت تصویر خواهد کرد؟



۱) ۱

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که چون در ناحیه‌ی D، $x\geq 0$ و $y\geq 0$ است، این نگاشت یک به یک است. اگر در ناحیه‌ی D، x یا y تغییر علامت می‌داد دیگر x^2 و y^2 توابعی یک به یک نبودند؛ یعنی $f(z)$ یک به یک نبود. با توجه به آن‌که نوشتن ضابطه‌ی f به صورت $f(z)$ مشکل است، استفاده از فرمول ژاکوبین تنها راه است:

$$\begin{cases}u=x^2\\ v=y^2\end{cases}\Rightarrow J=\begin{vmatrix}2x & 0\\ 0 & 2y\end{vmatrix}=4xy\Rightarrow \text{مساحت ناحیه } D'=\iint_D 4xy\,dydx$$

ناحیه‌ی D بین خطوط $y=0$ و $y=x$ در محدوده‌ی $0\leq x\leq 1$ قرار دارد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{مساحت ناحیه } D'=\int_0^1\int_0^x 4xy\,dydx=\int_0^1 2xy^2\Big|_0^x dx=\int_0^1 2x^3dx=\frac{x^4}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

مثال ۶۷: نگاشت $w=f(z)$ تحلیلی و برای آن $|f'(z)|=2$ است. اگر دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ در صفحه‌ی z توسط این نگاشت به صفحه‌ی w نگاشته شود، آنگاه مساحت شکل حاصل در صفحه‌ی w چند برابر π است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۳» اگر $|f'(z)|^2$ عدد ثابت باشد، آنگاه داریم:

$$\text{مساحت ناحیه } D'=\iint_D|f'(z)|^2dy\,dx=|f'(z)|^2\iint_D dy\,dx=|f'(z)|^2\times(\text{مساحت ناحیه } D)$$

در واقع مساحت ناحیه D' از ضرب کردن $|f'(z)|^2$ در مساحت ناحیه D بدست می‌آید:

$$\text{مساحت ناحیه } D'=2^2\times(\text{مساحت ناحیه } D)=4\times(\pi\times 2^2)=16\pi$$

تذکر ۴: در برخی سؤالات راحت‌تر است که از مختصات قطبی کمک بگیریم، در این صورت ژاکوبین را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$J=\begin{vmatrix}u_r & u_\theta\\ v_r & v_\theta\end{vmatrix}=u_rv_\theta-u_\theta v_r$$

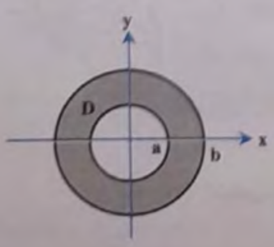
مثال ۶۸: نگاشت $w=\text{Ln}z$ ناحیه‌ی $D: 0<a\leq|z|\leq b$ را به ناحیه‌ی D' در صفحه‌ی w تصویر می‌کند. مساحت D' کدام است؟ (شاخه اصلی Ln مدنظر است)

۱) $\pi\text{Ln}(\frac{b}{a})$ ۲) $2\pi\frac{\text{Ln}(b)}{\text{Ln}(a)}$ ۳) $\pi\frac{\text{Ln}(b)}{\text{Ln}(a)}$ ۴) $2\pi\text{Ln}(\frac{b}{a})$

پاسخ: گزینه «۴» در دستگاه قطبی داریم:

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow w=\text{Ln}r+i\theta$$

بنابراین $u=\text{Re}(w)=\text{Ln}r$ و $v=\text{Im}(w)=\theta$ است. اگر ژاکوبین دستگاه قطبی را حساب کنیم، داریم:



$$J=\begin{vmatrix}u_r & u_\theta\\ v_r & v_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{r} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{r}$$

ناحیه‌ی D، بین دو دایره‌ی $r=a$ و $r=b$ قرار دارد. بنابراین $-\pi<\theta\leq\pi$ و $a\leq r\leq b$ است.

$$\text{مساحت } D'=\iint_{D'}du\,dv=\iint_D\frac{1}{r}dr\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\int_a^b\frac{1}{r}dr\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}[\text{Ln}(r)]_a^b\,d\theta=2\pi\text{Ln}(\frac{b}{a})$$

نکته ۹: فرض کنید نگاشت $w=f(z)$ دارای نقطه‌ی بحرانی $z=a$ باشد و به ازای هر $k=1,\dots,n-1$ داشته باشیم $f^{(k)}(a)=0$ ولی $f^{(n)}(a)\neq 0$ در این صورت زوایا در صفحه‌ی z که دارای رأس $z=a$ هستند، وقتی به صفحه‌ی w نگاشته می‌شوند، در n ضرب می‌شوند.

مثال ۶۹: نگاشت $w = z^2 - 2z$ نیم‌خط‌های $C_1 : x = 1 , y \geq 0$ و $C_2 : y = x - 1 , x \geq 1$ را به ترتیب به منحنی‌های γ_1 و γ_2 تصویر می‌کند. زاویه‌ی بین γ_1 و γ_2 در محل برخورد آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: با استفاده از نکته‌ی فوق، توجه کنید که نگاشت $f(z) = z^2 - 2z$ یک چند جمله‌ای است و همه‌جا مشتق‌پذیر است. محل برخورد C_1 و C_2 در $x = y = 1$ است. پس آن‌ها در نقطه‌ی $z = 1$ برخورد می‌کنند. در این نقطه داریم:

$$f'(z) = 2z - 2 \Rightarrow f'(1) = 0$$
$$f''(z) = 2 \qquad \Rightarrow f''(1) \neq 0$$

چون مشتق مرتبه ۲ غیر صفر و مشتق مرتبه‌ی اول صفر است، بنابراین این نگاشت زاویه‌ی C_1 و C_2 را ۲ برابر خواهد کرد. و چون در صفحه‌ی z زاویه‌ی بین دو خط C_1 و C_2، $\frac{\pi}{4}$ است، پس γ_1 و γ_2 زاویه‌ی $\frac{\pi}{2}$ با هم دارند. (به شکل دقت کنید.)

روش دوم: یافتن γ_1 و γ_2 از طریق نگاشت: بخش‌های حقیقی و موهومی w را مشخص می‌کنیم:

$$w = (x+iy)^2 - 2(x+iy) = (x^2 - y^2 - 2x) + i(2xy - 2y)$$

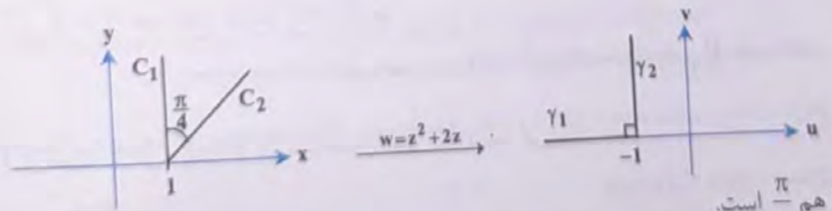
بنابراین $u = x^2 - y^2 - 2x$ و $v = 2xy - 2y$ است. روی نیم‌خط C_1 داریم $x = 1$ و $y \geq 0$. بنابراین داریم:

$$\gamma_1 : \begin{cases} u = -1 - y^2 \leq -1 \\ v = 2y - 2y = 0 \end{cases}$$

پس γ_1 نیم‌خط افقی $v = 0$ است با شرط $u \leq -1$. روی C_2 داریم: $y = x - 1$ و $x \geq 1$. بنابراین داریم:

$$\gamma_2 : \begin{cases} u = x^2 - (x-1)^2 - 2x = -1 \\ v = 2x(x-1) - 2(x-1) = 2(x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

پس γ_2 نیم‌خط $u = -1$ است با شرط $v \geq 0$.



γ_1 و γ_2 بر هم عمودند و زاویه‌ی آن‌ها با هم $\frac{\pi}{2}$ است.