۹
کاربرد نگاشت همدیس

اینك بااستفاده از نگاشت همدیس به‌حل تعدادی مسئلهٔ فیزیکی می‌پردازیم که شامل معادلهٔ لاپلاس بادومتغیر مستقل می‌باشند. مسائلی درهدایت گرما، پتانسیل الکترواستاتیك و جریان سیال بررسی خواهدشد. چون هدف این است که این مسائل روشهارا تشریح نمایند، آنها را درسطحی نسبتاً مقدماتی ارائه می کنیم.

۸۱. دمای‌مانا

درنظریهٔ هدایت‌گرما شار گذرنده ازسطح یك‌جسم جامد درنقطه‌ای ازآن سطح عبارت‌است از مقدار گرمایی که در جهت مشخصی عمود برسطح درواحد زمان و درواحد سطح‌ازآن نقطه جریان دارد. بنابراین شار برحسب واحدهایی از قبیل کالری درثانیه درسانتیمترمربع اندازه‌گیری می‌شود. در اینجا آن‌را با Φ نمایش می‌دهیم و بامشتق نرمال دمای T درنقطهٔ روی سطح تغییر می کند:

$$\Phi = -K\frac{dT}{dn} \qquad (K>0). \tag{۱}$$

عدد ثابت K به‌عنوان هدایت مخصوص گرمایی جسم جامد، که فرض می کنیم همگن باشد، مشهور است.

نقاط جسم‌جامد بامختصات دکارتی در فضای سه‌بعدی تعیین می‌شوند و ما توجه‌خود را به‌حالتهایی محدود می کنیم که دمای T فقط بامختصات x و y تغییر کند. چون T

بامختص درامتداد محور عمود بر صفحهٔ xy تغییر نمی کند پس جریان گرما دوبعدی وموازی آن صفحه است. فرض می کنیم، علاوه بر آن، کـه جریان درحالت ماناست؛ یعنی، T بازمان تغییر نمی کند.

فرض می‌شود که در درون جسم جامد انرژی گرمایی تـولید یا تلف نشود. یعنی هیچ چشمه یا چاهك گرمایی درآن نیست. همچنین تـابع دما، $T(x , y)$، وهمهٔ مشتقات جزئی مرتبه‌اول یادوم آن درهر نقطهٔ داخلی جسم جامد پیوسته‌اند. این عبارت وفرمول (۱) دربارهٔ شارگرما اصول موضوعهٔ نظریهٔ ریاضی هدایت گرما هستند؛ اصول موضوعه‌ای که درنقاط درون یك جسم جامد شامل توزیع پیوستهٔ چشمه‌ها و چاهکها نیز به‌کار می‌رود.

حال یك عنصر داخلی جسم جامدرا درنظر می گیریم، این عنصر به‌شکل یك منشور مستطیلی است به‌طول واحد عمود برصفحهٔ xy باقاعدهٔ Δx در Δy درآن صفحه (شکل ۶۰). نسبت زمانی جریان گرما به‌طرف راست درطول وجه سمت‌چپ عبارت از $-KT_x(x , y)\Delta y$ است وبـه‌طرف راست درطول وجه سمت‌راست عبارت از $-KT_x(x+\Delta x , y)\Delta y$. باکم کردن نسبت اولی از دومی نسبت اتلاف گرمـای عنصر را درمیان آن دووجه بـه‌دست می‌آوریم. اگر Δx خیلی کوچك باشد، نسبت حاصل را می‌توان چنین نوشت

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x , y)-T_x(x , y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y ,$$

یا

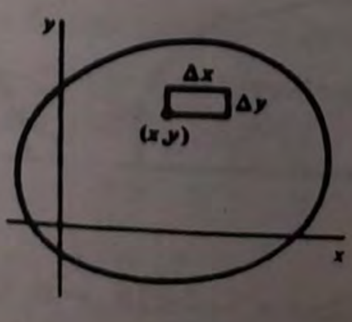
$$-KT_{xx}(x , y)\Delta x\,\Delta y . \qquad (۲)$$

البته دراینجاهمهٔ عبارات تقریبی هستند و وقتی Δx و Δy کوچکتر شوند، دقتشان افزایش می‌یابد.

به‌روشی مشابه نسبت اتلاف گرمای حاصل درمیان وجوه بالایی و پایینی این عنصر چنین به‌دست می‌آید

$$-KT_{yy}(x , y)\Delta x\,\Delta y . \qquad (۳)$$

گرما فقط از طریق این‌چهار وجه به‌عنصر داخل یاازآن خـارج‌می‌شود ودمـا درون‌عنصر ماناست. بنابراین مجموع عبارات (۲) و (۳) صفر است یعنی



شکل ۶۰

$$T_{xx}(x , y)+T_{yy}(x , y)=0 \qquad (۴)$$

پس تابع‌دما درهر نقطهٔ داخلی جسم‌جامد درمعادلهٔ لاپلاس صدق می کند.

باتوجه به‌معادلهٔ (۴) و پیوستگی تابع‌دما و مشتقات جزئی‌آن درحوزه‌ای که معرف داخل جسم‌جامد باشد، T تابع همسازی‌از x و yاست .

سطوح $T(x , y)=c$ ، که درآن c عدد حقیقی ثابتی است، **همدماهای** درون‌جسم جامدند. همچنین می‌توان آنها را به‌عنوان منحنیهایی در صفحهٔ xy درنظر گرفت زیرا $T(x , y)$ را می‌توان به‌عنوان دمای‌لایهٔ نازکی ازماده درآن‌صفحه تعبیر کرد که وجه‌های لایه عایق گرما هستند. همدماها عبارت‌اند از منحنیهای تراز تابع T .

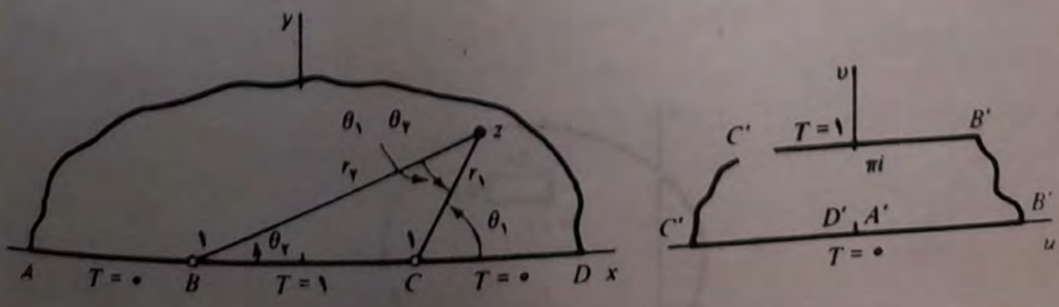
گرادیان T درهر نقطه برهمدماعموداست و شارماکزیمم دریك‌نقطه درجهت گرادیان درآن نقطه است. اگر $T(x , y)$ معرف‌دما دریك‌لایهٔ نازك باشد و S یك‌مزدوج همساز تابع T آنگاه درهر نقطه‌ای که تابع تحلیلی $T(x , y)+iS(x , y)$ همدیس باشدگرادیان T همان‌بردار مماس برمنحنی $S(x , y)=c$ است. منحنیهای $S(x , y)=c$ **خطوط‌جریان** نامیده می‌شوند.

اگر مشتق نرمال dT/dn، درامتداد قسمتی از کرانهٔ لایه صفر باشد، شار دما درامتداد آن‌قسمت صفر است. یعنی آن‌قسمت عایق گرما و بنابراین یك‌خط جریان است.

تابع T همچنین می‌تواندمعرف غلظت ماده‌ای باشد که در جسم جامد پخش می‌شود. درآن‌حالت K ضریب پخش است. بحث‌فوق واستنتاج معادلهٔ (۴) درمورد حالت مانای پخش‌هم به‌کار می‌رود.

۸۲. دمای‌مانا درنیم‌صفحه

حال فرمولی برای دمای مانا، $T(x , y)$ ، دریك ورقهٔ نازك نیمه نامتناهی $y\geqslant 0$ پیدا می کنیم که وجوه‌آن عایق‌اند ولبهٔ $y=0$ آن ، بجز تکهٔ $-1<x<1$ ، $y=0$ که دمایش همواره واحد است، دردمای صفر نگهداشته می‌شود (شکل ۶۱). تابع $T(x , y)$ باید کراندار باشد؛ اگر ورقهٔ مفروض را به‌عنوان حالت حدی ورقهٔ $0\leqslant y\leqslant y_0$ درنظر



شکل ۶۱

$$w=\log \frac{z-1}{z+1}\quad \left(\frac{r_1}{r_2}>0 , -\frac{\pi}{2}<\theta_1-\theta_2<\frac{3\pi}{2}\right)$$

بگیریم، که وقتی y افزایش می‌یابد لبهٔ بالایش در دمای ثابتی نگهداشته می‌شود، این شرط طبیعی خواهد بود. درواقع ازنظر فیزیکی معقول است که شرط کنیم وقتی y به بینهایت میل می‌کند $T(x, y)$ به صفر میل می‌نماید.

مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای را که باید حل نمود می‌توان چنین نوشت

$$T_{xx}(x, y)+T_{yy}(x, y)=0 \qquad (-\infty<x<\infty, y>0), \tag{1}$$

$$T(x, 0)=\begin{cases} 1 & |x|<1, \\ 0 & |x|>1; \end{cases} \tag{2}$$

بعلاوه، $|T(x, y)|<M$ که در آن M عددثابت مثبتی است.

این یک مسئلهٔ دیریکله برای نیمصفحهٔ بالایی صفحهٔ xy است. روش حل این خواهد بود که مسئلهٔ دیریکلهٔ جدیدی برای یک ناحیه درصفحهٔ uv به‌دست آوریم. این ناحیه عبارت خواهد بود از تصویر نیمصفحه تحت تبدیلی که درحوزهٔ $y>0$ تحلیلی و درامتداد کرانهٔ $y=0$، بجز درنقاط $(\pm 1, 0)$ که تعریف نشده است، همدیس است. پیدا کردن تابع همساز و کرانداری که درمسئلهٔ جدید صدق کند، کار ساده‌ای است. سپس، دوقضیهٔ فصل قبل را به کار می‌بریم تاجواب مسئله درصفحهٔ uv را به‌جواب مسئلهٔ اصلی درصفحهٔ xy تبدیل کنیم. بویژه، تابعی همساز از u و v به تابعی همساز از x و y تبدیل خواهد شد و شرایط کرانه‌ای در صفحهٔ uv بر تکه‌های متناظر کرانه درصفحهٔ xy ثابت خواهند ماند. اگر همان علامت T را برای نمایش این دوتابع دما در دوصفحه به کار بریم، نباید ابهامی پیش آید.

حال می‌نویسیم $z-1=r_1 \exp(i\theta_1)$ و $z+1=r_2\exp(i\theta_2)$، که در آن $-\pi/2<\theta_k<3\pi/2\,(k=1, 2)$. تبدیل

$$w=\log\frac{z-1}{z+1}=\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_2}+i(\theta_1-\theta_2) \quad \left(\frac{r_1}{r_2}>0, -\frac{\pi}{2}<\theta_1-\theta_2<\frac{3\pi}{2}\right) \tag{3}$$

برنیمصفحهٔ $y\geqslant 0$، بجز نقاط $z=\pm 1$، تعریف‌شده است، زیرا درآن ناحیه: $0\leqslant\theta_1-\theta_2\leqslant\pi$ (شکل ۶۱). حال درصورتی که $0\leqslant\theta_1-\theta_2\leqslant\pi$، مقدار لگاریتم، مقدار اصلی است و از شکل ۱۹ ضمیمهٔ ۲ توجه داریم که نیمصفحهٔ $y>0$ بروی نوار $0<v<\pi$ در صفحهٔ w نگاشته می‌شود. درواقع، همان‌شکل ۱۹ بود که تبدیل (۳) را در اینجا به‌ما القا کرد. قطعه محور x واقع بین $z=-1$ و $z=1$، که درآن $\theta_1-\theta_2=\pi$، بروی لبهٔ بالایی نوار نگاشته می‌شود و بقیهٔ محور x، که درآن $\theta_1-\theta_2=0$، بروی لبهٔ پایینی. شرایط تحلیلی و همدیس‌بودن موردلزوم، بوضوح به‌وسیلهٔ تبدیل (۳) برقرارند.

یک تابع همساز و کراندار ازمتغیرهای u و v که بر لبهٔ $v=0$ نوار، صفر و بر لبهٔ $v=\pi$ واحد است، بوضوح عبارت است از

$$T=\frac{1}{\pi}v\ ; \tag{4}$$

وچون قسمت موهومی تابع تام w/π است، همساز می‌باشد. اگر به‌وسیلهٔ رابطهٔ

$$w = \mathrm{Log}\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i \arg \frac{z-1}{z+1} \tag{۵}$$

آن‌را به‌مختصات x و y تغییر دهیم، درمی‌یابیم که

$$v = \arg\left(\frac{x-1+iy}{x+1+iy}\right) = \arg\left[\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}\right],$$

یا

$$v = \arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right).$$

در اینجا بردتابع آرکتانژانت از ۰ تا π است زیرا

$$\arg\frac{z-1}{z+1} = \theta_1 - \theta_2$$

و $0 \leqslant \theta_1 - \theta_2 \leqslant \pi$. حال عبارت (۴) به شکل زیر درمی‌آید

$$T = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) \qquad (0 \leqslant \arctan t \leqslant \pi). \tag{۶}$$

چون‌تابع(۴)درنوار $0<v<\pi$ همساز وتبدیل(۳) درنیمصفحهٔ $y>0$ تحلیلی‌است، می‌توان بااستفاده از قضیهٔ‌بخش ۷۹ نتیجه گرفت که تابع(۶) دراین نیمصفحه همساز است. شرایط کرانه‌ای دوتابع همساز برتکه‌های متناظر کرانه‌ها یکی هستند زیرا ازنوع $T=c$ اندکه درقضیهٔ بخش ۸۰ بررسی‌شد. بنابراین تابع کراندار (۶)جواب مطلوب مسئلهٔ‌اصلی است. البته می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که تابع (۶) درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند و دارای مقادیری است که وقتی نقطهٔ (x, y) از بالا به‌محور xها میل می‌کند به‌مقادیر نشان‌داده شده در شکل ۶۱ میل می‌نماید.

همدماهای $T(x, y)=c$ $(0<c<1)$ عبارت‌انداز دوایر

$$x^2+y^2-\frac{2}{\tan \pi c}y = 1$$

که مراکز آنها روی محور yهاست و از نقاط $(\pm 1, 0)$ می‌گذرند.

سرانجام توجه‌می‌کنیم که چون حاصلضرب یك‌تابع همساز درعددی ثابت نیز همساز است، تابع

$$T = \frac{T_0}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) \qquad (0 \leqslant \arctan t \leqslant \pi)$$

نمایش دمای‌مانادر نیمصفحهٔ‌مفروض‌است، هنگامی که به‌جای‌دمای‌واحددر لبهٔ $-1<x<1$، $y=0$ دمای ثابت T_0 را قرار دهیم.

۸۳. مسئله‌ای دراین‌باب

یك‌قاب نیمه‌نامتناهی درفضای سه‌بعدی‌را درنظرمی گیریم که به‌وسیلهٔ صفحات $x=\pm\pi/2$ و $x=$

و $y=0$ ساخته شده است ودوسطح اول در دمای صفر وآخری در دمای واحد نگهداری می‌شود. می‌خواهیم عبارتی برای دمای $T(x, y)$ درهر نقطهٔ داخلی قاب پیدا کنیم. این مسئله، همچنین مسئلهٔ یافتن دما در ورقهٔ نازکی است به‌شکل نوار نیمه نامتناهی $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ ، $y \geqslant 0$ که وجوه ورقه کاملا عایق هستند (شکل ۶۲).

مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای که در اینجا حل می‌کنیم عبارت است از

$$T_{xx}(x, y)+T_{yy}(x, y)=0 \quad \left(\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \ y>0\right), \tag{1}$$

$$T\left(\frac{-\pi}{2}, y\right)=T\left(\frac{\pi}{2}, y\right)=0 \quad (y>0), \tag{2}$$

$$T(x, 0)=1 \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

که در آن $T(x, y)$ کراندار است.

باتوجه به‌بخش ۳۹ و شکل ۹ ضمیمهٔ ۲ ، نگاشت

$$w=\sin z \tag{4}$$

این مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای را به‌مسئله‌ای که در بخش قبل بررسی‌شد تبدیل می کند(شکل ۶۱). بنابراین با به‌یادآوردن جواب (۶) آن‌بخش می نویسیم

$$T=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2v}{u^2+v^2-1}\right) \quad (0 \leqslant \arctan t \leqslant \pi). \tag{5}$$

تغییر متغیرهایی را که درمعادلهٔ (۴) بیان شده‌است می‌توان این‌طور نوشت

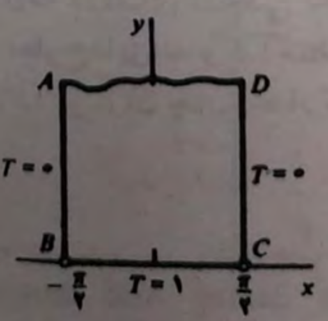
$$u=\sin x \cosh y, \quad v=\cos x \sinh y$$

و درنتیجه تابع همساز (۵) چنین می‌شود

$$T=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2\cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y+\cos^2 x \sinh^2 y-1}\right).$$

مخرج این کسر به‌شکل $\sinh^2 y-\cos^2 x$ درمی‌آید وخارج‌قسمت را می‌توان‌چنین‌نوشت

$$\frac{2\cos x \sinh y}{\sinh^2 y-\cos^2 x}=\frac{2\cos x/\sinh y}{1-(\cos x/\sinh y)^2}=\tan 2\alpha$$



شکل ۶۲

که در آن $\tan\alpha = \cos x/\sinh y$. بنابراین داریم $\pi T = 2\alpha$ و فرمول T چنین می‌شود

$$T = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right) \qquad \left(0 \leqslant \arctan t \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

دراینجا تابع آرکتانژانت دارای مقادیر ۰ تا $\pi/2$ است زیرا آوند آن نامنفی است.

حال چون $\sin z$ تام و تابع (۵) درنیمصفحهٔ $v>0$ همساز است، تابع (۶) درنوار $-\pi/2 < x < \pi/2$ ، $y>0$ همسازاست. همچنین تابع (۵) درشرایط کرانه‌ای $T=1$ درصورتی که $|u|<1$ و $v=0$ و $T=0$ درصورتی که $|u|>1$ و $v=0$، صدق می‌کند. درنتیجه تابع(۵) درشرایط کرانه‌ای (۲) و (۳) صدق می‌کند. درنتیجه تابع(۶) درشرایط کرانه‌ای (۲) و (۳) صدق می کند. بعلاوه، در سراسر نوار داریم $|T(x, y)| \leqslant 1$. بنابراین، فرمول (۶) فرمول دمای مطلوب است.

همدماهای $T(x, y) = c$ درقاب، عبارت‌اند از سطوح

$$\cos x = \tan\frac{\pi c}{2}\sinh y,$$

که‌هر کدام از آنها از نقاط $(0, \pm\pi/2)$ درصفحهٔ xy می گذرند. اگر K هدایت مخصوص گرمایی باشد شار گرما از سطح واقع در صفحهٔ $y=0$ بتوی قاب عبارت است از

$$-KT_y(x, 0) = \frac{2K}{\pi\cos x} \qquad \left(\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

شاری که از سطح واقع درصفحهٔ $x=\pi/2$ به‌طرف خارج می گذرد عبارت است از

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2K}{\pi\sinh y} \qquad (y>0).$$

مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای که دراین بخش بررسی‌شد را می‌توان باروش جدا کردن متغیرها نیز حل کرد. آن‌روش سرراست‌تراست اماجواب رابه‌شکل یک‌سری نامتناهی ارائه می‌دهد[1].

۸۴. دما در ربع صفحه‌ای با یک‌تکه کرانهٔ عایق

حال دمای‌مانا درورقهٔ نازکی به‌شکل یک‌ربع صفحه را چنان پیدا مــی کنیم کــه قسمتی در انتهای یک‌لبه عایق باشد، بقیهٔ آن‌لبه دردمــای مشخصی نگهداشته‌شود، و لبهٔ دوم دردمای مشخص دیگری نگهداشته شود. سطوح‌عایق‌اند و لذا مسئله دوبعدی است.

مقیاس دما و واحد طـول را می‌توان چنان اختیار کرد کــه مسئلهٔ مقدار کــرانه‌ای

۱. اساساً همین مسئله درتمرینات ۳ و۴ ، صفحات ۱۵۰–۱۵۱، کتاب R. V. Churchill, «Fourier Series and Boundary Value Problems,» 2d ed. 1963. کتاب فوق‌موجوداست بررسی شده‌است. همچنین بحث کوتاهی درمورد یکتایی جوابهای مسائل‌مقدار کرانه‌ای درفصل ۱۰

بخش ۸۴

مربوط به تابع دمای T عبارت باشد از

$$T_{xx}(x , y)+T_{yy}(x , y)=0 \quad (x>0 , y>0), \tag{۱}$$

$$\begin{cases} T_y(x , 0)=0 & 0<x<1 , \\ T(x , 0)=1 & x>1 , \end{cases} \tag{۲}$$

$$T(0 , y)=0 \quad (y>0), \tag{۳}$$

که در آن $T(x , y)$ در ربع‌صفحه کراندار است. ورقه و شرایط کرانه‌ای در شکل ۶۳ نشان داده‌شده‌اند.

شرایط (۲) مقدار مشتق نرمال تابع T را برقسمتی از خط کرانه‌ای و مقدار خود تابع را بربقیهٔ آن‌خط ازپیش تعیین می‌سازند. روش جداسازی متغیرها که درپایان بخش قبل بیان شد درمورد چنین مسائلی که درامتداد یک‌خط کرانه‌ای شرایط مختلفی دارند، مناسب نیست.

همچنانکه درشکل ۱۰ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده‌است، تبدیل

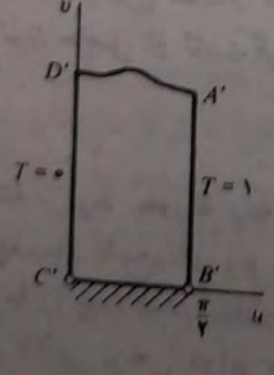
$$z=\sin w \tag{۴}$$

نگاشت‌یک‌یکی است ازنوار $0\leqslant u\leqslant \pi/2$ ، $0\leqslant v$ بروی ربع‌صفحهٔ $0\leqslant x$ ، $0\leqslant y$. حال ملاحظه‌می‌کنید که چون تبدیل مفروض یک‌بیک و بروست ازوجود معکوس آن مطمئن هستیم. ازآنجا که $\sin w$ درسراسر نوار بجز درنقطهٔ $w=\pi/2$ همدیس است، تبدیل معکوس باید درسراسر ربع‌صفحه بجز درنقطهٔ $z=1$ همدیس باشد.

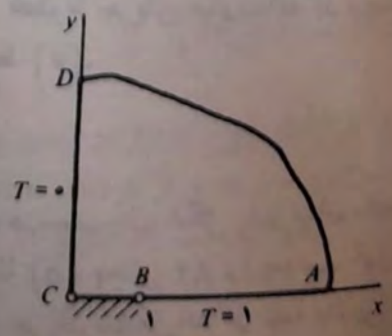
همچنانکه درشکل ۶۴ نشان داده‌شده است، این‌تبدیل‌معکوس پاره‌خط $0<x<1$ ، $y=0$ ازکرانهٔ ربع صفحه را بروی قاعدهٔ نوار می‌نگارد و بقیهٔ کرانه را بروی اضلاع‌نوار.

چون معکوس تبدیل (۴) در ربع صفحه، بجز وقتی که $z=1$ ، همدیس است، جواب مسئلهٔ مفروض را می‌توان با یافتن تابعی به‌دست آورد که درنوار همساز باشد و در شرایط کرانه‌ای داده شده درشکل ۶۴ صدق کند. ملاحظه کنید که این‌شرایط کرانه‌ای از نوع $T=c$ و $dT/dn=0$ هستند.

تابع دمای مطلوب ، T ، برای مسئلهٔ کرانه‌ای جدید بوضوح عبارت است از



شکل ۶۴



شکل ۶۳

بخش ۸۴

$$T=\frac{۲}{\pi}u\,,$$

(۵) تابع $۲u/\pi$ قسمت‌حقیقی تابع‌تام $۲w/\pi$ است. حال باید T را برحسب x و y بیان‌کنیم.
برای پیدا کردن u برحسب x و y ابتدا توجه می کنیم که بنابر رابطهٔ (۴) داریم

(۶)
$$x=\sin u\cosh v\,,\quad y=\cos u\sinh v\,;$$

بنابراین

(۷)
$$\frac{x^{۲}}{\sin^{۲}u}-\frac{y^{۲}}{\cos^{۲}u}=۱\,.$$

برای‌حل این‌معادله‌نسبت به u، بهتراست توجه‌کنیم که به‌ازای هر u مشخص، هذلولی(۷) دارای کانونهایی درنقاط $(\pm۱\,,\,۰)$، درصفحهٔ xy، و محوری عرضی به‌طول $۲\sin u$ است. در نتیجه تفاضل فواصل بین کانونها و نقطهٔ $(x\,,\,y)$ واقع برقسمتی از هذلولی در ربع اول عبارت است از

$$\sqrt{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}-\sqrt{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}=۲\sin u\,.$$

بنابراین باتوجه به‌رابطهٔ (۵) تابع دمای مطلوب درصفحهٔ xy عبارت است از

(۸)
$$T=\frac{۲}{\pi}\arcsin\frac{۱}{۲}\left[\sqrt{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}-\sqrt{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}\right]$$

که چون $۰\leqslant u\leqslant\pi/۲$، تابع آرکسینوس دارای برد ۰ تا $\pi/۲$ است.

اگر بخواهیم تحقیق کنیم که این‌تابع درشرایط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کند باید به‌خاطر بیاوریم که چون جذر مثبت است، $\sqrt{(x-۱)^{۲}}$ معرف $x-۱$ است درصورتی که $x>۱$، و معرف $۱-x$ است درصورتی که $۰<x<۱$. همچنین توجه کنید که دما در هر نقطه درامتداد قسمت عایق لبهٔ پایینی ورقه عبارت است از

$$T(x\,,\,۰)=\frac{۲}{\pi}\arcsin x\,.$$

می‌توان ازرابطهٔ(۵) تحقیق کرد که همدماهای $T(x\,,\,y)=c$ عبارت‌اند از قسمتهایی از هذلولیهای متحدالکانون (۷)، که در آن $u=\pi c/۲$، و در ربع اول واقع‌اند. چون تابع $۲v/\pi$ یک‌مزدوج همساز تابع (۵) است خطوط جریان عبارت‌اند از ربع بیضیهای متحدالکانون حاصل از ثابت گرفتن v در روابط (۶).

تمرینات

۱. در مسئلهٔ مربوط به‌ورقهٔ نیمه‌نامتناهی‌ای که درسمت‌چپ شکل ۶۱ نشان داده شده است یک‌مزدوج‌همساز تابع‌دمای $T(x\,,\,y)$ از رابطهٔ (۵) بخش ۸۲ را به‌دست آورید وخطوط جریان گرما را پیدا کنید. نشان‌دهید که خطوط جریان متشکل‌اند از نیمهٔ بالایی محور yها و نیمه‌های بالایی برخی دوایر درهردوطرف‌آن محور، مراکز این‌دوایر برپاره‌خط AB یا CD محور x واقع‌اند.

۲. نشان‌دهید که اگر تابع T بخش ۸۲ قید کراندار بودن را نداشته باشد، می‌توان به‌جای تابع‌همساز (۴) آن‌بخش، تابع همساز

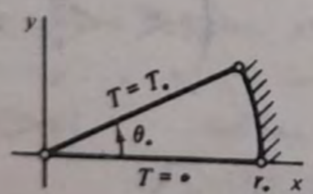
$$T = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi}w + A\cosh w\right) = \frac{1}{\pi}v + A\sinh u \sin v$$

را قرارداد که در آن A عدد حقیقی ثابت دلخواهی است. نتیجه بگیرید که، بدین‌ترتیب، جواب مسئلهٔ دیریکله برای‌نوار صفحهٔ uv (شکل ۶۱) یکتا نخواهد بود.

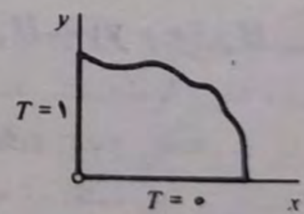
۳. فرض کنید که از مسئلهٔ دما درقاب نیمه‌نامتناهی بخش ۸۳ (شکل ۶۲) شرط کراندار بودن T، حذف‌شود. آنگاه‌باتوجه به‌اثرات ناشی ازافزودن‌قسمت موهومی تابع $A\sin z$ به‌جوابی که درآن بخش پیدا کردیم، که درآن A یک‌عدد حقیقی ثابت دلخواه است، نشان دهید که تعدادی نامتناهی جواب امکانپذیر است.

۴. بااستفاده از تابع $\operatorname{Log} z$، فرمولی برای‌دمای مانا و کراندار در ورقه‌ای که به‌شکل ربع صفحهٔ $x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0$ است پیدا کنید اگر وجوه کاملا عایق و لبه‌های آن دارای دمای $T(x, 0) = 0$ و $T(0, y) = 1$ باشند (شکل ۶۵). همدماها و خطوط جریان را بیابید و بعضی از آنهارا رسم کنید.

جواب $T = (2/\pi)\arctan(y/x)$.



شکل ٦٦



شکل ٦٥

۵. دمای‌مانا دریک‌جسم‌جامد به‌شکل گوهٔ استوانه‌ای دراز را پیدا کنید که صفحات کرانه‌ای $\theta = 0$ و $\theta = \theta_0$ بترتیب در دمای ثابت صفر و T_0 نگهداشته می‌شوند و سطح $r = r_0$ آن کاملا عایق است (شکل۶۶).

جواب $T = (T_0/\theta_0)\arctan(y/x)$.

۶. دمای مانا و کراندار $T(x, y)$ در جسم جامد نیمه نامتناهی $y \geqslant 0$ را چنان پیدا کنید که برقسمت $x < -1$ ، $y = 0$ از کرانه، $T = 0$ ، برقسمت $x > 1$ ، $y = 0$ از کرانه، $T = 1$، و نوار $-1 < x < 1$ ، $y = 0$ از کرانه عایق باشد (شکل ۶۷).

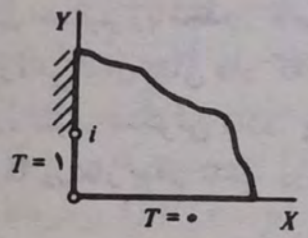
جواب $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin \frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right]$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

۹. فرمولی برای دمای $T(r,\theta)$ در ورقهٔ نیمدایره‌ای $r\leqslant 1$ ، $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ باسطوح عایق را چنان پیدا کنید که درامتداد لبهٔ شعاعی $\theta=0$ ، $T=1$ ودربقیهٔ کرانه $T=0$.
راهنمایی: این‌مسئله را می‌توان به‌مسئلهٔ تمرین ۸ تبدیل کرد.

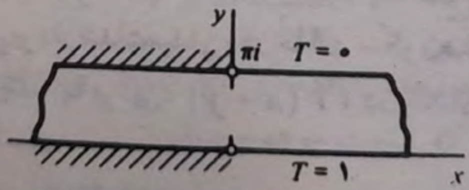
جواب $T=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{\theta}{2}\right)$.

۱۰. مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای برای ورقهٔ $X\geqslant 0$ ، $Y\geqslant 0$ درصفحهٔ Z را حل کنید که وجوهش عایق است وشرایط کرانه‌ای همانهایی است که درشکل ۷۰ نشان داده شده است.
راهنمایی: بااستفاده از تبدیل $z=i/Z$ مسئله را به‌مسئله‌ای که در بخش ۸۴ (شکل ۶۳) عنوان کردیم تبدیل کنید.



شکل ۷۰

۱۱. قسمتهای $x>0$ ، $y=0$ و $x<0$ ، $y=\pi$ از لبه‌های‌ورقهٔ نامتناهی $0\leqslant y\leqslant\pi$ و وجوه ورقه، عایق گرماهستند. هنگامی که $x>0$ شرایط $T(x,0)=1$ و $T(x,\pi)=0$ حفظ می‌شوند (شکل ۷۱). دماهای مانا در ورقه را پیدا کنید.
راهنمایی: این مسئله را می‌توان به‌مسئلهٔ تمرین ۶ تبدیل کرد.



شکل ۷۱

۱۲. یک‌ورقهٔ نازک باوجوه عایق، به‌شکل نیم بیضوی است در صفحهٔ uv ، که درشکل ۱۱ ضمیمهٔ۲ نشان داده‌شده است. دما روی قسمت بیضوی کرانه عبارت است از $T=1$. دما درامتداد پاره‌خط $-1<u<1$ ، $v=0$ عبارت است از $T=0$ وبقیهٔ کرانه در امتداد محور u عایق است. خطوط جریان گرما را پیدا کنید.

۱۳. بنابرتمرینات ۱۱ و ۱۲ بخش ۵۵، اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته ودرداخل R تحلیلی و غیرثابت باشد آنگاه تابع $u(x,y)$ مقادیرماکزیمم ومینیمم خودرا بر کرانهٔRاختیارمی کندونه‌هرگز درداخلR. باتعبیر $u(x,y)$

به‌عنوان یک‌دمای مانا، دلیلی فیزیکی بیان کنید که چرا مقادیرماکزیمم ومینیمم باید دارای این‌خاصیت باشند.

۸۵. پتانسیل الکترواستاتیک

دریک‌میدان الکترواستاتیک، شدت‌میدان دریک‌نقطه برداری است که نیروی واردشده بربار مثبت واحد را که درآن نقطه قرار داده شده است نمایش می‌دهد. پتانسیل الکترواستاتیک تابعی است عددی از مختصات فضایی به‌قسمی که درهر نقطه مشتق جهتی آن درهـرجهت عبارت است از منفی مؤلفه شدت میدان درآن‌جهت.

برای دو ذرهٔ باردار ساکن، اندازهٔ نیروی‌جاذبه یادافعه‌ای‌که ازیکی بردیگری وارد می‌شود باحاصلضرب بارها نسبت مستقیم وبامجذور فاصلهٔ بین دو ذره نسبت معکوس دارد. باتوجه به‌این‌قانون عکس‌مجذور، می‌توان نشان داد که دریک‌نقطه پتانسیل ناشی از یک‌ذرهٔ تک‌درفضا بافاصلهٔ بین نقطه و ذره نسبت معکوس دارد. پس می‌توان نشان‌داد که درهرناحیهٔ بی‌بار پتانسیل‌ناشی ازپخش بارها درخارج‌آن ناحیه درمعادلهٔ لاپلاس.برای فضای سه‌بعدی صدق می‌کند.

اگرشرایط به‌قسمی باشندکه پتانسیل V درهمهٔ صفحات موازی صفحهٔ xy یکی‌باشد آنگاه در ناحیه‌های بی‌بار، V تابع همسازی است از فقط دومتغیر x و y :

$$V_{xx}(x, y)+V_{yy}(x, y)=0 .$$

بردارشدت میدان درهر نقطه بـه‌موازات صفحهٔ xy است و مؤلفه‌های x و y آن، بترتیب، عبارت‌اند از $-V_x(x, y)$ و $-V_y(x, y)$. پس این‌بردار عبارت است ازمنفی گرادیان $V(x, y)$.

سطحی که در امتدادآن $V(x, y)$ ثابت باشد، یک‌سطح همپتانسیل است. دریک‌نقطه برسطح‌هادی، مؤلفهٔ مماسی بردارشدت‌میدان، درحالت سکون‌صفر است،زیرا بارها مجازند برچنین سطحی حرکت نمایند. بنابراین: $V(x, y)$، درامتداد سطح یک‌هادی ثابت و آن سطح یک‌سطح همپتانسیل است.

اگر U یک مزدوج همساز V باشد منحنیهای $U(x, y)=c$ درصفحهٔ xy خطوط‌شار نامیده می‌شوند. درصورتی که چنین‌منحنی یک‌منحنی همپتانسیل را درنقطه‌ای قطع کند که مشتق‌تابع تحلیلی $V(x, y)+iU(x, y)$ صفر نیست، دومنحنی درآن‌نقطه‌متعامدند وشدت میدان درآن نقطه برخط شار مماس است.

مسائل مقدارکرانه‌ای برای پتانسیل V، همان مسائل ریاضی‌ای‌هستند که برای دماهای مانای T بودند؛ و، همانند حالت دماهای‌مانا، روشهای متغیرهای مختلط محدود به مسائل دوبعدی‌اند. مثلا مسئله‌ای که دربخش ۸۳ (شکل ۶۲) عنوان شد را می‌توان به‌عنوان مسئلهٔ یافتن پتانسیل الکترواستاتیک دوبعدی در فضای خالی $-\pi/2<x<\pi/2$ ، $y>0$ تعبیر کرد که باصفحات هـادی $x=\pm\pi/2$ و $y=0$ ، که درفصل مشترکشان عـایق‌شده‌اند،

بخش ۸۶

ساخته شده است، درصورتی که دوسطح اول در پتانسیل صفر وسومی درپتانسیل واحد نگهداشته شود. این نوع مسائل در الکترونیك ظاهرمی‌شوند. اگر مقدار بار درداخل یك‌لولهٔ خلاء کم باشد، بعضی مواقع فضارا بی‌بار در نظرمی گیریم و می‌توانیم فرض کنیم که در آنجا پتانسیل درمعادلهٔ لاپلاس صدق می کند.

پتانسیل جریان مانای برق دریك‌ورقهٔ مسطح هادی نیز درنقاطی که عاری از چشمه و چاهك‌اند، همساز است. پتانسیل گرانشی مثال دیگری از تابع همساز در فیزیك است.

۸۶. پتانسیل درفضای استوانه‌ای

یك‌استوانهٔ دایره‌ای دراز توخالی از یك‌ورقهٔ نازك باجنس هادی درست‌شده و استوانه در امتداد دومولدش به دوقسمت مساوی تقسیم شده است. این قسمتها به‌وسیلهٔ نوارهای باریکی از مواد عایق ازهم جدا شده‌اند و به‌عنوان قطب مورداستفاده قرار می گیرند، یکی از آنها درپتانسیل صفر ودیگری در پتانسیل مشخص دیگری نگهداشته‌می‌شود. محورهای مختصات و واحدهای‌طول واختلاف پتانسیل را به‌صورتی که در شکل ۷۲ نشان داده‌شده اختیار می‌کنیم. آنگاه پتانسیل الکترواستاتیك $V(x, y)$ را برهرمقطع فضای بسته کـه از دوانتهای استوانه دورباشد، به‌عنوان یك‌تابع همساز دردرون دایرهٔ $x^2+y^2=1$ درصفحهٔ xy تعیین می‌نماییم؛ همچنین برنیمهٔ بالایی دایره، $V=0$ ، و برنیمهٔ پایینی آن، $V=1$.

تبدیل خطی کسری‌ای که نیمصفحهٔ بالایی را بروی دایرهٔ واحد به‌مرکز مبدأ، محور حقیقی مثبت را بروی نیمهٔ بالایی دایره ومحور حقیقی منفی را بروی نیمهٔ پایینی دایره می‌نگارد، درتمرین ۱۱ بخش ۳۴ بررسی شد. این نتیجه، درشکل ۱۳ ضمیمهٔ ۲ داده شده است؛ و اگر درآنجا z و w را تعویض نماییم درمی‌یابیم که معکوس تبدیل

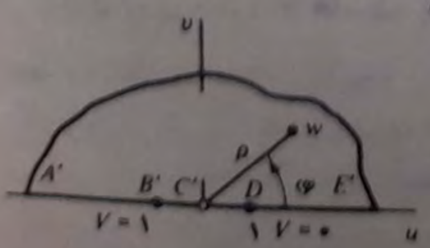
$$z=\frac{i-w}{i+w} \tag{1}$$

مسئلهٔ جدیدی برای V درنیمصفحه، که‌درشکل ۷۳ نمایش داده‌شده است، ارائه می‌دهد.

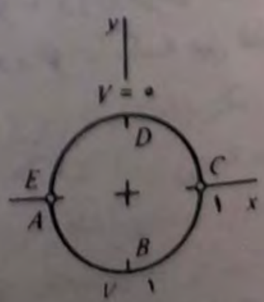
حال ملاحظه می کنید که قسمت موهومی تابع

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Log} w=\frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\rho+\frac{i}{\pi}\varphi \qquad (\rho>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi) \tag{2}$$

$w = i\,\frac{1-z}{1+z}$



شکل ۷۳



شکل ۷۲

تابع کرانداری‌است از u و v که مقدار ثابت لازم را بردوقسمت $\varphi=0$ و $\varphi=\pi$ محور uها اختیار می کند. بنابراین تابع همساز مطلوب برای نیمصفحه، عبارت است از

$$V=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{v}{u}, \tag{۳}$$

که درآن مقادیر تابع آرکتانژانت بین ۰ و π تغییر می کند.

معکوس تبدیل (۱)، عبارت است از

$$w=i\frac{1-z}{1+z}, \tag{۴}$$

که ازروی‌آن می‌توان u و v را برحسب x و y بیان کرد. پس‌معادلهٔ (۳) چنین می‌شود

$$V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right) \qquad (0\leqslant\arctan t\leqslant\pi). \tag{۵}$$

تابع (۵)، تابع پتانسیل برای فضای محدود به‌قطبهای استوانه‌ای است، زیرا در درون‌دایره همساز است ومقادیر لازم‌را برنیمدایره اختیار می کند. اگر بخواهیم این‌جواب را امتحان کنیم باید متوجه باشیم که

$$\lim_{t\to 0}\arctan t=0 \qquad (t>0)$$

و

$$\lim_{t\to 0}\arctan t=\pi \qquad (t<0).$$

منحنیهای همپتانسیل $V(x, y)=c$، درناحیهٔ دایره‌ای، قوسهایی هستند از دوایر

$$x^2+y^2+2y\tan\pi c=1,$$

هردایره از نقاط $(\pm 1, 0)$ می گذرد. همچنین پاره‌خطی ازمحور x ها که بین این‌دونقطه واقع است همپتانسیل $V(x, y)=1/2$ است. یك‌مزدوج همساز U از V عبارت است از $(-1/\pi)\operatorname{Log}\rho$، یعنی‌قسمت موهومی تابع $(-i/\pi)\operatorname{Log} w$. باتوجه به‌رابطهٔ (۴)، U را می‌توان چنین نوشت

$$U=\frac{-1}{\pi}\operatorname{Log}\left|\frac{1-z}{1+z}\right|.$$

ازروی این‌رابطه می‌توان تحقیق کرد که خطوط شار $U(x, y)=c$ قوسهایی هستند از دوایری که مرکزشان روی محور x هاست. پاره‌خطی ازمحور y ها که بین قطبها واقع است نیز یك‌خط شاراست.

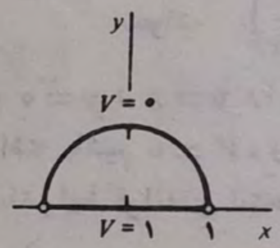
تمرینات

۱. تابع همساز (۳) بخش ۸۶ درنیمصفحهٔ $v\geqslant 0$ کراندار است و درشرایط کرانه‌ای که درشکل ۷۳ نشان داده شده است، صدق می کند. نشان‌دهید که اگر A یك‌عدد حقیقی ثابت

باشد و قسمت موهومی Ae^{w} را به‌آن تابع بیفزاییم، تابع حاصل درهمهٔ شرایط، بجزشرط کراندار بودن، صدق می کند.

۲. ثابت کنید که تبدیل (۴) بخش ۸۶ ، نیمهٔ بالایی ناحیهٔ دایره‌ای راکه در شکل ۷۲ نشان داده‌شده‌است، بروی ربع اول‌صفحهٔ w می‌نگارد و قطر CE را بـروی محور v مثبت. آنگاه پتانسیل الکترواستاتیک V را درفضایی کـه به‌وسیلهٔ نیم‌استوانهٔ $x^2+y^2=1$ ، $y\geq 0$ و صفحهٔ $y=0$ ساخته می‌شود، به‌قسمی پیدا کنید که برسطح استوانه‌ای ، $V=0$ ، و برسطح تخت، $V=1$ (شکل ۷۴).

جواب $V=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right)$.



شکل ۷۴

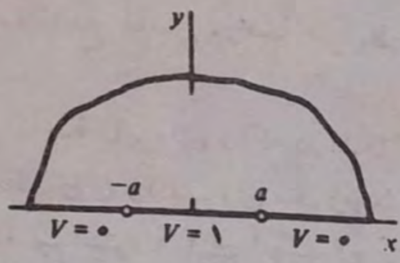
۳. پتانسیل الکترواستاتیک $V(r, \theta)$ را درفضای $0<r<1$ ، $0<\theta<\pi/4$ که بـه‌وسیلهٔ نیمصفحه‌های $\theta=0$ و $\theta=\pi/4$ و قسمت $0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ از سطح استوانه‌ای $r=1$ ساخته می‌شود به‌قسمی پیدا کنید که بر کرانه‌های تخت، $V=1$ ، و بر کرانهٔ استوانه‌ای، $V=0$ (رجوع کنید به‌تمرین ۲). تحقیق کنید که این‌تابع دراین شرایط کرانه‌ای صدق می کند.

۴. توجه کنید که همهٔ شاخه‌های $\log z$ ، یك مؤلفهٔ حقیقی دارند که همه جا ، بجز درمبدأ ، همسازاست. فرمولی برای‌پتانسیل الکترواستاتیك $V(x, y)$ درفضای بین‌دوسطح استوانه‌ای $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=r_0^2$ $(r_0\neq 1)$ که دارای یك محورهادی‌اند بنویسید به قسمی که برسطح اولی، $V=0$ ، و بردومی ، $V=1$.

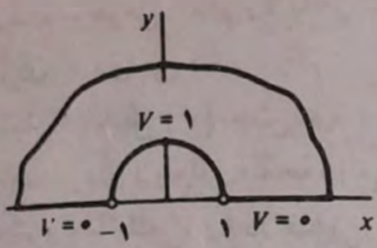
جواب $V=\frac{\operatorname{Log}(x^2+y^2)}{2\operatorname{Log} r_0}$.

۵. پتانسیل الکترواستاتیك $V(x, y)$ در فضای $y>0$ محدود به صفحهٔ هادی نـامتناهی $y=0$ را به قسمی پیدا کنید که نوار ($y=0$ ، $-a<x<a$) که ازبقیهٔ صفحه جداشده درپتانسیل $V=1$ نگهداشته شود و در مابقی صفحه $V=0$ (شکل ۷۵). تحقیق کنید که‌این تابع در شرایط کرانه‌ای صدق می کند.

جواب $(0\leqslant\arctan t\leqslant\pi)$ $V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\right)$.



شکل ۷۵



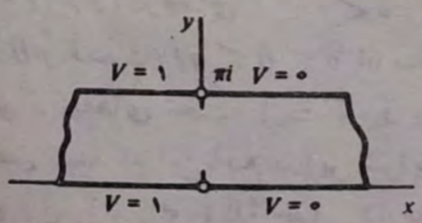
شکل ۷۶

۶. فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیک درفضایی که در شکل ۷۶ نشان داده شده ومحدود به دو نیمصفحه و یک‌نیم استوانه است پیدا کنید به قسمی که در سطح استوانه‌ای، $V=1$ و برسطوح تخت، $V=0$. بعضی ازمنحنیهای همپتانسیل در صفحهٔ xy را رسم کنید.

جواب $V=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$.

۷. پتانسیل V در فضای بین صفحات $y=0$ و $y=\pi$ را به قسمی پیدا کنید که برقسمتی از هریک ازآن صفحات که $x>0$ داشته باشیم $V=0$، و برقسمتهایی که $x<0$ داشته باشیم $V=1$ (شکل۷۷). نتیجه را باشرایط کرانه‌ای امتحان کنید.

جواب $(0\leqslant \arctan t\leqslant\pi)$ $V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin y}{\sinh x}\right)$.



شکل ۷۷

۸. فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیک V در فضای داخلی استوانهٔ دراز $r=1$ به قسمی پیدا کنید که بر ربع اول ($r=1$ ، $0<\theta<\pi/2$) سطح استوانه‌ای، $V=0$، و برمابقی آن سطح ($r=1$ ، $\pi/2<\theta<2\pi$)، $V=1$ (رجوع کنید به شکل ۲۴ و تمرین ۱۴ بخش۳۴). نشان دهید که برمحور استوانه $V=3/4$. فرمول حاصل را با شرایط کرانه‌ای امتحان کنید.

۹. با استفاده ازشکل ۲۵ ضمیمهٔ ۲، تابع دمای $T(x,y)$ ای بیابید که درحوزهٔ سایه زده شدهٔ صفحهٔ xy، که درآنجا نشان‌داده شده است، همساز باشد و درامتداد نیمدایرهٔ ABC، $T=0$، و در امتداد پاره خط DEF، $T=1$. تحقیق کنید که تابع حاصل در شرایط کرانه‌ای لازم صدق می کند (رجوع کنید به تمرین ۲).

۱۰. مسئلهٔ دیریکله

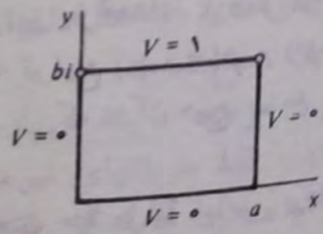
$$V_{xx}(x , y)+V_{yy}(x , y)=0 \qquad (0<x<a , 0<y<b),$$
$$V(x , 0)=0 , V(x , b)=1 \qquad (0<x<a),$$
$$V(0 , y)=V(a , y)=0 \qquad (0<y<b)$$

را برای $V(x , y)$ در یك مستطیل (شکل ۷۸)، می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل کرد[1]. جواب عبارت است از

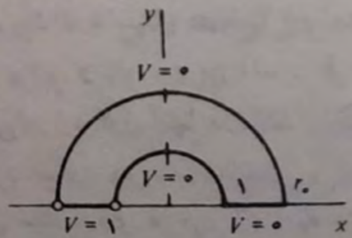
$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(m\pi y/a)}{m\sinh(m\pi b/a)}\sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (m=2n-1).$$

با پذیرفتن این فرمول، پتانسیل $V(r , \theta)$ در فضای $1<r<r_0$ ، $0<\theta<\pi$ را به‌قسمی پیدا کنید که برقسمتی از کرانه که $\theta=\pi$ داشته باشیم $V=1$ و بربقیهٔ کرانه، $V=0$ (شکل ۷۹).

جواب $\left[\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{\operatorname{Log} r_0}\right]$ $$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\alpha_n\theta}{\sinh\alpha_n\pi}\,\frac{\sin(\alpha_n \operatorname{Log} r)}{2n-1}.$$



شکل ۷۸

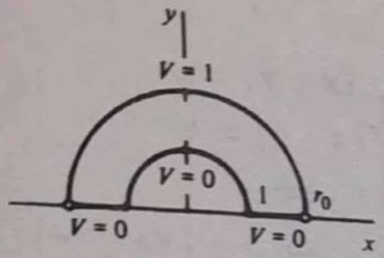


شکل ۷۹

۱۱. به کمك فرمول $V(x , y)$ درمورد مستطیل تمرین ۱۰، تابع پتانسیل $V(r , \theta)$ برای فضای $1<r<r_0$ ، $0<\theta<\pi$ را به قسمی پیدا کنید که برقسمت $r=r_0$ ، $0<\theta<\pi$ ازکرانه، $V=1$ و برمابقی کرانه، $V=0$ (شکل ۸۰).

جواب $(m=2n-1)$ $$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^m-r^{-m}}{r_0^{m}-r_0^{-m}}\,\frac{\sin m\theta}{m}.$$

۱. صفحات ۱۴۷ــ۱۴۸ کتاب زیر را ببینید
R. V. Churchill, «Fourier Series and Boundary Value Problems,» 2d ed. 1963.



شکل ۸۰

۸۷. جریان سیال دوبعدی

توابع همساز نقش مهمی در هیدرودینامیك و آئرودینامیك بازی می کنند. مجدداً، فقط نوع حالت ماناو دو بعدی مسئله را درنظرمی گیریم. یعنی فرض می کنیم که حرکت سیال در همهٔ صفحات موازی صفحهٔ xy برابرند و سرعت موازی آن صفحه و مستقل از زمان است. در این صورت کافی است حرکت یك لایهٔ جریان در صفحهٔ xy را در نظر بگیریم.

فرض کنیم بردار نمایش دهندهٔ عدد مختلط

$$V = p + iq$$

معرف سرعت یك ذرهٔ سیال درنقطهٔ (x , y) باشد، بنابراین مؤلفه‌های x و y بردارسرعت بترتیب $p(x , y)$ و $q(x , y)$ اند. فرض می‌شود که توابع $p(x , y)$ و $q(x , y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها درنقاط داخلی یك ناحیهٔ جریان که درآن هیچ چشمه یاچاهکی از سیال وجود ندارد پیوسته باشند.

گردش سیال روی هرمرز C، به عنوان انتگرال روی خط مؤلفهٔ مماسی بردارسرعت $V_T(x , y)$ نسبت به طول قوس σ روی C تعریف می‌شود:

$$\int_C V_T(x , y)\,d\sigma . \qquad (1)$$

بنابراین، نسبت گردش روی C به طول C عبارت از تندی متوسط سیال روی آن مرز است. درحساب دیفرانسیل و انتگرال متغیرهای حقیقی[1]، نشان داده شده است که انتگرال (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\int_C p(x , y)\,dx + q(x , y)\,dy . \qquad (2)$$

در صورتی که C مرز ساده و بسته‌ای واقع در یك حوزهٔ همبند سادهٔ جریان عاری از هر چشمه

۱. برای آن دسته از خواص انتگرال روی خط درحساب دیفرانسیل و انتگرال متغیرهای حقیقی که در این بخش و بخش آینده، به کارمی بریم، به‌عنوان مثال، صفحات ۲۹۳ به بعد کتاب زیر را ببینید

W. Kaplan, «Advanced Calculus,» 2d ed. 1973.

یا چاهك باشد، بنابر قضیهٔ گرین می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C p(x , y)dx+q(x , y)\,dy=\iint_R [q_x(x , y)-p_y(x , y)]dx\,dy, \tag{۳}$$

که درآن R ناحیهٔ بستهٔ محدود به C است.

به منظور تعبیر فیزیکی انتگران سمت راست رابطهٔ (۳)، فرض می‌کنیم C معرف دایره‌ای به‌شعاع r باشد که مرکزش در نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ و جهت‌آن عکس حرکت‌عقربه‌های ساعت‌گرفته شده است. بنابراین یك تندی متوسط روی C با تقسیم گردش بر $2\pi r$ به‌دست می‌آید و سرعت زاویه‌ای متوسط متناظر سیال حول محور دایره از تقسیم آن تندی متوسط بر r حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_R \frac{1}{2}[q_x(x , y)-p_y(x , y)]dx\,dy .$$

این عبارت یك مقدار متوسط تابع

$$\omega(x , y)=\frac{1}{2}[q_x(x , y)-p_y(x , y)] \tag{۴}$$

بر ناحیهٔ دایره‌ای R که به C محدود است را نمایش می‌دهد. وقتی r به صفر میل کند حدش مقدار ω در نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ است. بنابراین تابع $\omega(x , y)$ که دوران سیال نامیده‌می‌شود، سرعت زاویه‌ای‌حدی یك‌عنصر دایره‌ای ازسیال را نمایش‌می‌دهد وقتی‌که دایره درمرکزش، نقطهٔ (x , y)، جمع شود.

اگر در هر نقطه از یك حوزه، $\omega(x , y)=\circ$ آنگاه جریان درآن حوزه غیردورانی است. در اینجا فقط جریانهای غیر دورانی را در نظرمی گیریم و نیز فرض می کنیم سیال غیرقابل تراکم و بدون چسبندگی باشد.

فرض‌کنید D حوزهٔ همبند ساده‌ای باشد‌که در آن جریان غیر دورانی است. اگر C مرزسادهٔ بسته‌ای در D باشد، از رابطهٔ(۳) نتیجه می‌شود که گردش‌حول C صفراست؛ یعنی،

$$\int_C p(x , y)dx+q(x , y)dy=\circ$$

در نتیجه اگر $(x_\circ , y_\circ)$ نقطهٔ مشخصی در D باشد، می‌توانیم تابع

$$\varphi(x , y)=\int_{(x_\circ , y_\circ)}^{(x , y)} p(r , t)dr+q(r , t)dt \tag{۵}$$

را بر D تعریف کنیم. در اینجا متغیرهای انتگرالگیری را با r و t نمایش داده‌ایم تا آنها را ازحد بالای انتگرالگیری متمایزسازیم. مادامی‌که مسیر بین دو حد انتگرالگیری، مرزی درون D باشد، انتگرال رابطهٔ (۵) ازآن مسیر مستقل است. زیرا تفاضل انتگرالهای روی دومسیر عبارت‌است ازانتگرال روی یك مسیر بسته، و انتگرال‌آخری باید صفرباشد.

چون‌انتگرال روی‌خط(د) مستقل ازمسیراست، انتگرانش دیفرانسیل تابع $\varphi(x , y)$ است؛ یعنی،

$$p(x , y)=\varphi_x(x , y) \quad , \quad q(x , y)=\varphi_y(x , y) . \qquad (۶)$$

پس بردار سرعت $V=p+iq$ گرادیان φ است و مشتق جهتی φ در هر جهت مؤلفهٔ سرعت جریان در آن جهت را نمایش می‌دهد.

تابع $\varphi(x , y)$ ، پتانسیل سرعت نامیده می‌شود. از رابطهٔ (۵) واضح است که وقتی نقطهٔ مرجع (x_0 , y_0) تغییر کند، $\varphi(x , y)$ با یك ثابت جمعی تغییر می‌کند. منحنیهای تراز $\varphi(x , y)=c$ ، منحنیهای همپتانسیل نامیده می‌شوند. چون بردار سرعت V گرادیان $\varphi(x , y)$ است، در هر نقطه‌ای که V بردار صفر نباشد بر یك منحنی همپتانسیل عمود است.

درست مثل حالت جریان گرما ، این شرط که سیال غیرقابل تراکم فقط با جریان یافتن از کرانه‌های یك عنصر حجم به آن داخل یا از آن خارج می‌شود مستلزم این است که $\varphi(x , y)$ در معادلهٔ لاپلاس

$$\varphi_{xx}(x , y)+\varphi_{yy}(x , y)=0$$

در حوزه‌ای که سیال عاری از چشمه یا چاهك است ، صدق کند. با توجه به روابط (۶) و پیوستگی توابع p و q و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها ، نتیجه می‌شود که مشتقات مرتبه دوم φ در چنین حوزه‌ای پیوسته‌اند. بنابراین پتانسیل سرعت φ در آن حوزه ، تابعی همساز است.

۸۸. تابع جریان

بنابر بخش قبل ، بردار سرعت

$$V=p(x , y)+iq(x , y) \qquad (۱)$$

را ، برای یك حوزهٔ همبند ساده که جریان در آن غیردورانی است، می‌توان چنین نوشت

$$V=\varphi_x(x , y)+i\varphi_y(x , y) \qquad (۲)$$

که در آن φ پتانسیل سرعت است .

درصورتی که بردارسرعت، بردار صفر نباشد برمنحنی همپتانسیلی که از نقطهٔ (x , y) می‌گذرد عمود است. اگر، بعلاوه، $\psi(x , y)$ یك مزدوج همساز $\varphi(x , y)$ باشد ، بردار سرعت برمنحنی $\psi(x , y)=c$ مماس است . منحنیهای $\psi(x , y)=c$ ، خطوط جریان نامیده می‌شوند و تابع ψ ، تابع جریان است. بخصوص کرانه‌ای که سیال نمی‌تواند از آن عبور کند، یك خط جریان است.

تابع تحلیلی

$$F(z)=\varphi(x , y)+i\psi(x , y)$$

پتانسیل مختلط جریان نامیده می‌شود. توجه کنید که

$$F'(z)=\varphi_x(x , y)+i\psi_x(x , y)$$

یا بنابر معادلات کشی ـ ریمان داریم

$$F'(z)=\varphi_x(x , y)-i\varphi_y(x , y) ,$$

در نتیجه عبارت (۲) برای سرعت چنین خواهد شد

$$V=\overline{F'(z)} . \qquad (۳)$$

تندی، یا اندازهٔ سرعت، با فرمول زیرداده می‌شود

$$|V|=|F'(z)|\,.$$

بنابررابطهٔ (۳) بخش ۷۸ ، اگر φ درمیدان همبند سادهٔ D همساز باشد، یک‌مزدوج همساز φ درآن را می‌توان چنین نوشت

$$\psi(x\,,\,y)=\int_{(x_0\,,\,y_0)}^{(x\,,\,y)}-\varphi_t(r\,,\,t)dr+\varphi_r(r\,,\,t)dt$$

که در آن انتگرالگیری مستقل از مسیر است . بنابراین به کمك روابط (۶) بخش ۸۷ می‌توانیم بنویسیم

$$\psi(x\,,\,y)=\int_C -q(r\,,\,t)dr+p(r\,,\,t)dt \tag{۴}$$

که درآن C مرزی است در D از $(x_0\,,\,y_0)$ تا $(x\,,\,y)$.

در حساب دیفرانسیل وانتگرال متغیرهای حقیقی نشان داده شده است که سمت راست رابطهٔ (۴) نمایش انتگرالی مؤلفهٔ نرمال $V_N(x\,,\,y)$ نسبت به طول قوس σ روی C است که مؤلفه‌های x و y بردار V، بترتیب عبارت‌اند از $p(x\,,\,y)$ و $q(x\,,\,y)$. بنابراین فرمول (۴) را می‌توان چنین‌نوشت

$$\psi(x\,,\,y)=\int_C V_N(x\,,\,y)d\sigma\,. \tag{۵}$$

بدین ترتیب ازنظرفیزیکی، $\psi(x\,,\,y)$ نمایش نسبت‌زمانی جریان سیال درعرض C است. به عبارت دقیقتر، $\psi(x\,,\,y)$ معرف نسبت جریان برحجم، درعرض‌سطحی به ارتفاع واحد است که روی‌منحنی C عمود برصفحهٔ xy قراردارد.

چون φ و ψ توابعی همساز در صفحهٔ xy اند، نتایج بخشهای ۷۹ و ۸۰ را می‌توان به‌کار برد. یعنی تبدیل

$$z=f(w)=x(u\,,\,v)+iy(u\,,\,v)\,,$$

که درآن f تحلیلی است، $\varphi(x\,,\,y)$ و $\psi(x\,,\,y)$ را به توابعی همساز از u و v تبدیل می‌کند. این توابع جدید را ممکن است بترتیب به عنوان پتانسیل سرعت و تابع جریان‌در ناحیهٔ جدید صفحهٔ uv تعبیر کرد. خط جریان یا کرانهٔ طبیعی $\psi(x\,,\,y)=c$ در صفحهٔ xy به خط جریان یا کرانهٔ طبیعی $\psi[x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v)]=c$ در صفحهٔ uv تبدیل می‌شود.

تحت‌این‌مفروضات که جریان‌سیالات غیر دورانی ومانا وباچگالی یکنواخت ρ است، می‌توان نشان داد که فشار سیال $P(x\,,\,y)$ در حالت خاص معادلهٔ برنولی[1] صدق می‌کند :

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|V|^2=\text{ثابت} \tag{۶}$$

توجه کنید درآنجایی که تندی $|V|$ کمترین است فشار بیشترین است.

1. Bernoulli

۸۹. جریان حول یک گوشه

در صورتی که پتانسیل مختلط عبارت باشد از تابع

$$F(z) = Az \tag{۱}$$

که درآن A عدد ثابت حقیقی مثبتی است،

$$\varphi(x, y) = Ax \quad , \quad \psi(x, y) = Ay . \tag{۲}$$

خطوط جریان $\psi(x, y) = c$، عبارت‌اند از خطوط افقی $y = c/A$ و سرعت در هر نقطه عبارت است از

$$V = \overline{F'(z)} = A .$$

در اینجا نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ که در آن $\psi(x, y) = \circ$ می‌تواند هریک از نقاط محور x ها باشد. اگر نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ درمبدأ گرفته شود آنگاه $\psi(x, y)$ نسبت جریان درعرض هر مرزی است که از مبدأ به نقطهٔ (x, y) کشیده شود (شکل ۸۱). جریان یکنواخت و به راست است. می‌توان آن را به عنوان جریان یکنواخت در نیمصفحهٔ بالایی که به محور x محدود است یا جریان بین دو خط موازی $y = y_۱$ و $y = y_۲$ تعبیر کرد.

برای اینکه یک جریان را در ربع صفحهٔ $u \geqslant \circ$ ، $v \geqslant \circ$ تعیین کنیم توجه می کنیم که تبدیل

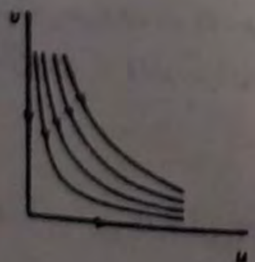
$$z = w^۲ \tag{۳}$$

ربع صفحه را بروی نیمصفحهٔ بالایی صفحهٔ xy می‌نگارد، کرانهٔ ربع صفحه بروی تمام محور x نگاشته می‌شود. چون $y = ۲uv$ ، تابع جریان $\psi(x, y) = Ay$ برای جریان در نیمصفحه متناظر است با تابع جریان

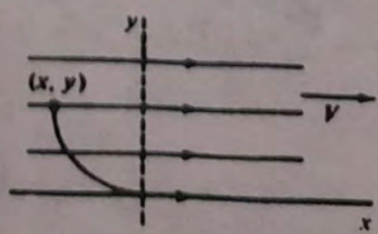
$$\psi(u, v) = ۲Auv \tag{۴}$$

برای جریان درربع صفحه، البته، این تابع بایستی در ربع صفحه همساز باشد و بر کرانه دارای مقادیر صفر.

خطوط جریان در ربع صفحه، عبارت انداز شاخه‌های هذلولی متساوی‌الساقین (شکل ۸۲)



شکل ۸۲



شکل ۸۱

$$2Auv = c \; .$$

پتانسیل مختلط عبارت از تابع $F(w) = Aw^2$ است وسرعت سیال عبارت از :

$$V = \overline{F'(w)} = 2A(u - iv) \; .$$

تندی

$$|V| = 2A\sqrt{u^2 + v^2}$$

با فاصلهٔ ذره‌از مبدأ نسبت مستقیم‌دارد. مقدار تابع جریان(۴) را دراینجا می‌توان به‌عنوان نسبت جریان در عرض پاره خط واصل مبدأ به نقطهٔ (u , v) تعبیر نمود.

در چنین مسائلی ساده‌ترین راه این است که ابتدا پتانسیل مختلط را به‌عنوان تابعی‌از متغیر مختلط درناحیهٔ جدیدبنویسیم. سپس تابع جریان، وسرعت را می‌توان از روی‌آن تابع پتانسیل به دست آورد.

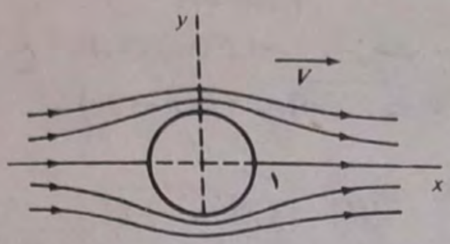
تابع ψ جریان معینی در ناحیه را مشخص می‌سازد. این سؤال راکه آیا متناظر با یك ناحیهٔ مفروض درست یك چنین تابعی، جز محتملا با یك ضریب ثابت یا یك ثابت جمعی، موجود است، در اینجا بررسی نخواهیم کرد. در بعضی مثالهای آتی، که درآنها سرعت‌در نقاط دور از مانع یکنواخت است، یا در فصل ۱۰، که چشمه و چاهك درکارند، وضعیت فیزیکی نشان می‌دهدکه جریان با شرایط مفروض مسئله به طور یکتا معین می‌شود.

همیشه به صرف دانستن مقادیر تابعی همساز بر کرانهٔ یك ناحیه، نمی‌توان آن را به طور یگانه‌ای، حتی تاسرحد یك عامل ثابت، تعیین کرد. مثلا، در بالا دیدیم که تابع $\psi(x , y) = Ay$ در نیمصفحهٔ $y > 0$ همساز وبر کرانه‌اش دارای مقادیر صفر است. تابع $\psi_1(x , y) = Be^x \sin y$ نیز درآن‌شرایط‌صدق‌می‌کند. معهذا، خط‌جریان $\psi_1(x , y) = 0$ نه‌فقط‌شامل‌خط $y = 0$ است بلکه‌خطوط $y = n\pi$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ رانیزدربرمی گیرد. دراینجا تابع $F_1(z) = Be^z$ پتانسیل‌مختلط برای جریان درنوار بین خطوط $y = 0$ و $y = \pi$ است، این دو کرانه خط جریان $\psi_1(x , y) = 0$ را تشکیل‌می‌دهند؛ اگر $B > 0$، سیال درامتداد کرانهٔ پایینی به‌راست ودرامتداد کرانهٔ بالایی به چپ جریان می‌یابد.

۹۰. جریان حول استوانه

فرض‌کنید استوانهٔ مستدیر و درازی به‌شعاع واحد در مقدار زیادی از سیال که با سرعت یکنواخت جریان دارد قرار گرفته باشد، محور استوانه برجهت جریان عمود است. برای معین‌کردن جریان مانا حول استوانه، استوانه را با دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم جریان دور از آن موازی محور x باشد (شکل ۸۳). تقارن نشان می‌دهد که‌آن قسمت از محور x را که درخارج دایره است می‌توان به عنوان یك کرانه تلقی کرد، لذا لازم است که فقط قسمت بالایی شکل را به عنوان ناحیهٔ جریان در نظر بگیریم.

کرانهٔ این ناحیهٔ جریان، متشکل از نیمدایرهٔ بالایی و قسمتهای محور x در خارج دایره، به وسیلهٔ تبدیل زیر بروی تمام محور u نگاشته می‌شود



شکل ۸۳

$$w = z + \frac{1}{z}. \qquad (1)$$

همچنانکه در شکل ۱۷ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است، این ناحیه بـروی نیمصفحهٔ $v \geqslant 0$ نگاشته می‌شود. پتانسیل مختلط برای جریان یکنواخت در آن نیمصفحه عبارت است از

$$F(w) = Aw ,$$

که در آن A عدد حقیقی ثابتی است. بنابراین پتانسیل مختلط برای این ناحیه در نـزدیکی دایره عبارت است از

$$F(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad (2)$$

وقتی $|z|$ افزایش یابد سرعت

$$V = A\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right) \qquad (3)$$

به A نزدیك می‌شود؛ یعنی، درنقاط دور از دایره جریان تقریباً یکنواخت و موازی محور x است.

بنابر فرمول(۳)، داریم $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$، لذا همان فـرمول، سرعتهـای جریان در ناحیهٔ پایینی را نیزنمایش می‌دهد، نیمدایرهٔ پایینی یك خط جریان است.

بنابرفرمول (۲)، تابع جـریان‌برای مسئلهٔ مفروض درمختصات قطبی عبارت است‌از

$$\psi(r, \theta) = A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta. \qquad (4)$$

خطوط جریان

$$A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = c$$

نسبت به‌محور y متقارن و دارای مجانبهایی به موازات محور x اند. توجه‌کنید کـه وقتی $c = 0$ خط جریان‌متشکل است‌از دایرهٔ $r = 1$ وقسمتهایی از محور x که درآن $|x| \geqslant 1$.

تمرینات

۱. بیان کنید چرا مؤلفه‌های سرعت را می‌توان از تابع جریان به وسیلهٔ فـرمولهای زیـر

به دست آورد

$$p(x, y)=\psi_y(x, y) \quad , \quad q(x, y)=-\psi_x(x, y) .$$

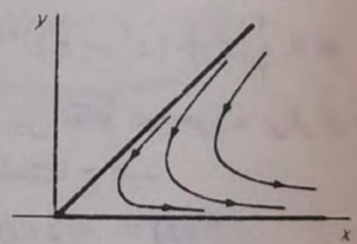
۲. در یك نقطهٔ داخلی ناحیهٔ جریان، تحت شرایطی که فرض کرده‌ایم ، فشار سیال نمی‌تواند از فشار در هر نقطهٔ دیگر همسایگی‌ای از آن نقطه کمتر باشد . صحت این مطلب را به کمك احکام بخشهای ۵۴ و ۸۸ تحقیق کنید.

۳. برای جریان حول یك گوشه ، که در بخش ۸۹ تشریح شد ، در چه نقطه‌ای از ناحیهٔ $x \geqslant ۰$ ، $y \geqslant ۰$ فشار سیال بیشترین مقدار را داراست؟

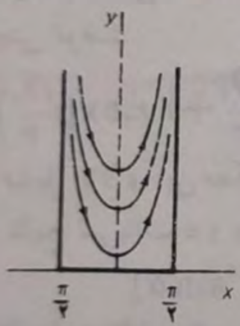
۴. نشان دهید که تندی سیال درنقاط روی ناحیهٔ استوانه‌ای ، دربخش ۹۰ ، عبارت است از $۲|A\sin\theta|$ و فشار سیال روی استوانــه در نقاط $z=\pm ۱$ بیشترین مقدار و در نقــاط $z=\pm i$ کمترین مقدار را داراست.

۵. پتانسیل مختلط برای جریان‌حول استوانهٔ $r=r_۰$ را چنان بنویسید که اگر نقطه‌ازاستوانه دور شود سرعت V به عدد حقیقی و ثابت A نزدیك شود.

۶. تابع جریان $\psi(r, \theta)=Ar^۴ \sin ۴\theta$ را برای سیال در ناحیهٔ زاویه‌ای $۰ \leqslant \theta \leqslant \pi/۴$ به دست آورید (شکل ۸۴) و یك یا دو خط جریان در داخل این ناحیه را ترسیم نمایید.



شکل ۸۴



شکل ۸۵

۷. پتانسیل مختلط $F(z)=A\sin z$ را بــرای جریــانی در درون ناحیهٔ نیمه نامتناهی $-\pi/۲ \leqslant x \leqslant \pi/۲$ ، $y \geqslant ۰$ به دست آوریــد (شکل ۸۵) . معادلات خطوط جریان را بنویسید .

۸. نشان دهید اگر پتانسیل سرعت برای جریان درناحیهٔ $r \geqslant r_۰$ عبارت باشد از $\varphi(r, \theta)=A \operatorname{Log} r$ ‏($A>۰$) ، خطوط جریان عبارت‌از نیمخطهای $r \geqslant r_۰$ ، $\theta=c$ اند و متناظر با چشمه‌ای به قدرت $۲\pi A$ در مبدأ نسبت جریان به خارج ازهر دایرهٔ کامل حول مبدأ برابر $۲\pi A$ است.

۹. پتانسیل‌مختلط $F(z)=A(z^۲+z^{-۲})$ رابرای‌جریانی درناحیهٔ $r \geqslant ۱$ ، $۰ \leqslant \theta \leqslant \pi/۲$ به دست‌آورید. فرمولهایی برای V و ψ بنویسید. چگونگی تغییر تندی $|V|$ درامتداد کرانهٔ ناحیه را ذکر کنید و تحقیق کنید که روی کرانه $\psi(x, y)=۰$.

۱۰. فرض کنید که جریان در فاصلهٔ بینهایت دور از استوانهٔ به شعاع واحد ، دربخش ۹۰،

در جهتی که با محور x ها زاویهٔ α می‌سازد یکنواخت باشد یعنی

$$\lim_{|z|\to\infty} V = A\exp(i\alpha) \qquad (A>0).$$

پتانسیل مختلط را پیدا کنید.

جواب $F(z)=A[z\exp(-i\alpha)+z^{-1}\exp(i\alpha)]$.

۱۱. تبدیل $z=w+1/w$ دایرهٔ $|w|=1$ را بروی پاره خطی می‌نگارد که نقاط $z=2$ و $z=-2$ را به هم وصل می کند، و حوزهٔ خارج آن دایره را بروی مابقی صفحهٔ z می‌نگارد. (رجوع کنید به تمرینات ۱۸ و ۱۹ بخش ۴۱). قراردهید

$$z-2=r_1\exp(i\theta_1), \quad z+2=r_2\exp(i\theta_2),$$

و

$$(z^2-4)^{1/2}=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2} \qquad (0\leqslant\theta_1<2\pi, 0\leqslant\theta_2<2\pi);$$

در این صورت تابع $(z^2-4)^{1/2}$ تکمقداری و همه جا تحلیلی است بجز روی بریدگی شاخه متشکل از قطعه خط بین نقاط $z=\pm 2$ محور x ها. نشان دهید که معکوس تبدیل $z=w+1/w$، به قسمی که به ازای هر نقطهٔ z که روی بریدگی شاخه نباشد $|w|>1$، را می‌توان چنین نوشت

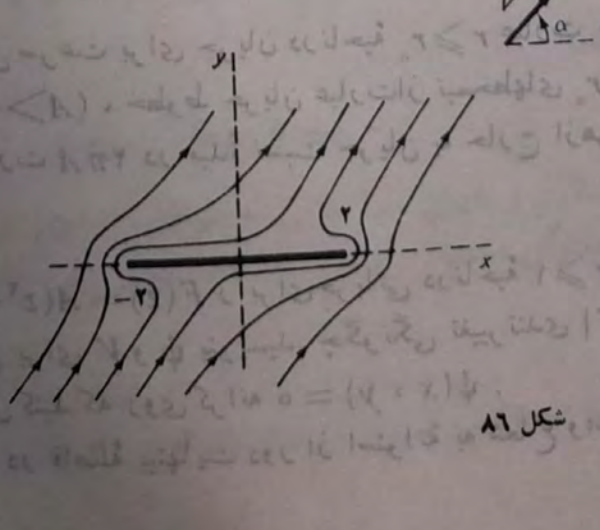
$$w=\frac{1}{2}[z+(z^2-4)^{1/2}]=\frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2}+\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)^2.$$

بدین ترتیب تبدیل بالا و این معکوس تناظر یک‌یکی بین نقاط دو حوزه برقرار می کنند.

۱۲. به‌کمک نتایج تمرینات ۱۰ و ۱۱ فرمول زیر را استنتاج کنید

$$F(z)=A[z\cos\alpha-i(z^2-4)^{1/2}\sin\alpha]$$

که‌عبارت‌از پتانسیل مختلط برای جریان مانا حول ورقهٔ درازی است که پهنای‌آن ۴ و مقطع عرضی آن پاره خط واصل دونقطهٔ $z=\pm 2$ در شکل ۸۶ است، با این فرض که سرعت سیال درفاصلهٔ بینهایت از ورقه عبارت‌باشد از $A\exp(i\alpha)$. شاخهٔ $(z^2-4)^{1/2}$ شاخه‌ای است که در تمرین ۱۱ مشخص شد و $A>0$.

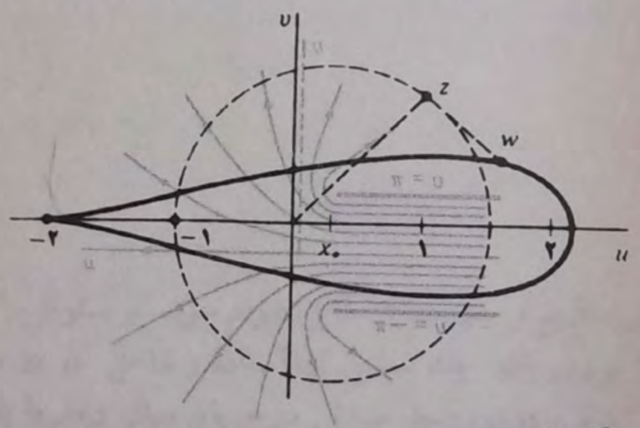


شکل ۸۶

۱۳. نشان دهید که اگر در تمرین ۱۲ داشته باشیم $\sin\alpha \neq 0$، تندی سیال درامتداد پاره خط واصل نقاط $z = \pm 2$ در نقاط انتهایی بینهایت است و درنقطهٔ وسط آن $A|\cos\alpha|$.

۱۴. برای سهولت، فرض کنید که در تمرین ۱۲، $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. سپس نشان دهید که سرعت سیال در سمت بالای پاره خطی که نمایش ورقه در شکل ۸۶ است، در نقطهٔ $x = 2\cos\alpha$، و درسمت پایین پاره خط درنقطه $x = -2\cos\alpha$، صفراست.

۱۵. یك دایره به‌مرکز x_0 $(0 < x_0 < 1)$ روی محور x ها ومار بر نقطهٔ $z = -1$، تحت تبدیل $w = z + 1/z$ واقع است. تك تك نقاط ناصفر $z = \exp(i\theta)$ را به طور هندسی می‌توان با اضافه کردن بردار $r^{-1}\exp(-i\theta)$ به‌بردار z نگاشت. با نگاشتن بعضی نقاط نشان دهید که تصویر دایره مقطعی از نوع نشان داده شده در شکل ۸۷ است و نقاط خارج دایره بروی نقاط خارج مقطع نگاشته می‌شوند. این حالت خاصی است از طرح هواشکن ژوکوفسکی[1]. (تمرینات ۱۶ و ۱۷ را نیز ببینید)



شکل ۸۷

۱۶. (الف) نشان‌دهید که نگاشت دایره درتمرین ۱۵ همدیس‌است بجز درنقطهٔ $z = -1$.

(ب) فرض کنید اعداد مختلط

$$t = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}, \quad \tau = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$

نمایش بردارهای واحدی باشند که بترتیب بریك قوس جهت‌دار در $z = -1$ و تصویر آن قوس تحت تبدیل $w = z + 1/z$ مماس‌اند. نشان دهید که $\tau = -t^2$ و بنابراین طرح ژوکوفسکی شکل ۸۷ در نقطهٔ $w = -2$ دارای یك نقطهٔ بازگشت است. زاویهٔ بین مماسها در نقطهٔ بازگشت صفراست.

۱۷. معکوس تبدیل $w = z + 1/z$ که در تمرین ۱۵ به‌کار رفت، با تعویض z و w، در تمرین ۱۱ داده‌شده است. پتانسیل مختلط برای‌جریان حول هواشکن، که در تمرین ۱۵ معرفی

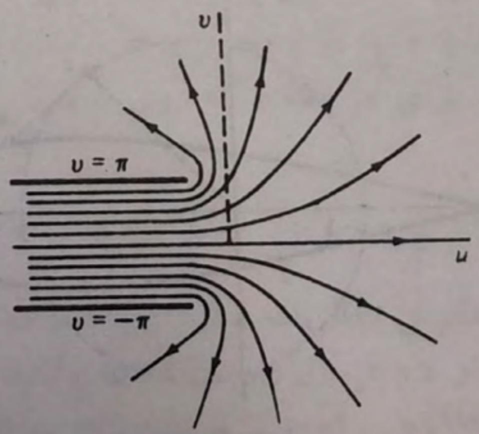
1. Joukowski

شد، را پیدا کنید در صورتی که سرعت V سیال در فاصلهٔ بینهایت دور از مبدأ عدد حقیقی و ثابت A باشد.

۱۸. توجه کنید که تحت تبدیل

$$w = e^z + z$$

هریك از قسمتهای مثبت ومنفی خط $y = \pi$ بروی نیمخط $u \leqslant -1$ ، $v = \pi$ نگاشته می‌شود. همین‌طور، $y = -\pi$ بروی $u \leqslant -1$ ، $v = -\pi$ نگاشته می‌شود ونوار $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ بروی صفحهٔ w. همچنین توجه کنید که وقتی x به $-\infty$ میل کند تغییر جهتها، $\arg(dw/dz)$، تحت این تبدیل به صفر میل می کند. نشان دهید که خطوط جریان یك سیال که ازمجرای باز متشکل از نیم خطهای صفحهٔ w جریان دارد (شکل ۸۸) عبارت‌اند از تصویر خطوط $y = c$ دراین نوار. این خطوط جریان، منحنیهای همپتانسیل میدان الکترواستاتیك درنزدیکی لبهٔ خازنی با صفحات موازی را نیز نمایش می‌دهد.



شکل ۸۸