۳
توابع مقدماتی

حال توابع مقدماتی گوناگونی را که در حساب دیفرانسیل متغیرهای حقیقی بررسی شد درنظرمی گیریم وبه تعریف توابع متناظر ازیك متغیر مختلط می‌پردازیم ، به عبارت‌صریح، توابعی تحلیلی ازمتغیر z تعریف می کنیم که وقتی $z=x+i0$ ، به توابع مقدماتی‌مذکور تبدیل شوند. ابتدا تابع نمایی مختلط را تعریف می کنیم و سپس آن را برای تعریف سایر توابع مقدماتی به‌کار می بریم.

۲۱. تابع نمایی

اگر قرار باشدکه تابع f از متغیر مختلط z وقتی z حقیقی است به تابع نمایی معمولی تحویل یابد، لازم می‌آیدکه به ازای هر عدد حقیقی x

$$f(x+i0)=e^{x} \qquad (۱)$$

ازآنجاکه به‌ازای هر x حقیقی $d(e^{x})/dx=e^{x}$ طبیعی است که شرایط زیر را اضافه کنیم:

$$f \text{ تام است و به ازای هر } z \text{ ، } f'(z)=f(z) \text{ .} \qquad (۲)$$

تابع f که برتمام صفحهٔ مختلط با رابطهٔ

$$f(z)=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود ، بوضوح در شرایط (۱) و (۲) صدق می کند. قرار می گذاریم که وقتی‌در

اینجا مقادیــر عددی $\cos y$ و $\sin y$ را محاسبه می‌کنیم y را برحسب رادیان بگیریم. می‌توان نشان داد (تمرین ۱۴ بخش ۲۲) که تابع تعریف شده با رابطهٔ (۳) تنها تـابعی است که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند و می‌نویسیم $f(z)=e^z$.

پس تابع نمایی آنالیز مختلط به ازای هر z با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\,. \tag{۴}$$

همان‌طور که ذکر کرده‌ایم این تابع، در صورتی کـه $y=0$، به تابع نمایی در حساب دیفرانسیل متغیرهای حقیقی تحویل می‌یابد، تام است، و به‌ازای هر z درفرمول مشتقگیری زیر صدق می‌کند

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z\ . \tag{۵}$$

توجه می‌کنیم که وقتی z عدد موهومی محض $i\theta$ باشد، رابطهٔ (۴) چنین می‌شود

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\ .$$

این همان فرمول اویلر است کـه قبلا در بخش ۵ مطرح شد. بدین ترتیب تعریف علامت $e^{i\theta}$ که در آنجا داده شد با تعریف (۴) سازگار است.

قرارداد می‌کنیم که وقتی $z=1/n$، مقدار e^z ریشهٔ n ام مثبت e است که با رابطهٔ (۴) داده‌می‌شود؛ یعنی، بایداز $e^{1/n}$، $\sqrt[n]{e}$ استنباط‌شود. این‌یك استثناء برای‌قراردادی است (بخش ۶) که معمولا می‌بایست $e^{1/n}$ را به‌عنوان هریك از ریشه‌های nام تعبیر کرد.

سرانجام باید توجه داشت کـه، برای راحتی، اغلب به جای e^z، $\exp z$ نوشته می‌شود.

۲۲. خواص دیگر $\exp z$

تعریف

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{۱}$$

عدد مختلط e^z را به صورت قطبی عرضه می‌نماید

$$e^z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{که در آن}\quad \rho=e^x\ ،\ \varphi=y\ . \tag{۲}$$

بنابراین e^x هنگ e^z و y یك آوند e^z است. یعنی

$$|e^z|=e^x\quad ,\quad \arg e^z=y\ . \tag{۳}$$

با تبدیل $w=e^z$ از تعریف (۱) درمی‌یابیم که نقطهٔ ناصفر

$$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{۴}$$

تصویر

$$z=\mathrm{Log}\,\rho+i\varphi \tag{۵}$$

است، که درآن لگاریتم طبیعی به‌کار رفته‌است. جهت روشن‌شدن مطلب، معادلهٔ $e^z=-1$ را نسبت به z حل می‌کنیم. چون عبارت (۴) صورت قطبی -1 است وقتی که $\rho=1$ و

$\varphi=\pi+2n\pi\,(n=0, \pm1, \pm2, \dots)$؛ از فرمول (۵) نتیجه می‌شود کـه هر عدد $z=(1+2n)\pi i$ یك جواب است.

چون $|e^z|=e^x$ و به ازای هر عدد حقیقی x، $e^x>0$ می‌فهمیم که به ازای هر عدد مختلط z، $|e^z|>0$. بنابراین

$$\text{به ازای هر عدد مختلط } z \text{ ، } e^z\neq 0 . \tag{۶}$$

این بدان معنی است که تحت تبدیل $w=e^z$ نقطهٔ $w=0$ نمی‌تواند تصویـر هیچ نقطه‌ای از در صفحهٔ z باشد. بنابراین نشان داده‌ایم که برد تابع نمایی تمام صفحه مختلط است به استثنای مبدأ.

هر نقطه در برد تابع‌نمایی عملا تصویر تعدادی نامتناهی نقطه درصفحهٔ z است؛ زیرا بنابر تعریف (۱) در مورد تابع نمایی، هردو نقطه درصفحهٔ z دارای یك تصویرند هرگاه قسمتهای حقیقی آنها برابر وتفاضل قسمتهای موهومی‌آن دو مضرب صحیحی از 2π باشد. یعنی، تابع نمایی تابعی است با دوره‌ای موهومی محض $2\pi i$:

$$\text{به ازای هر } z \text{ ، } e^{z+2\pi i}=e^z . \tag{۷}$$

باوجود این، اگرحوزهٔ تعریف را به نوار $-\pi<\operatorname{Im} z\leqslant\pi$ (شکل ۱۸) محدود کنیم، نگاشت $w=e^z$ یك بیك و بروی بـرد است. یعنی اگر w یك نقطهٔ ناصفر دلخواه و به صورت قطبی $w=\rho(\cos\Phi+i\sin\Phi)$، که درآن $\Phi=\operatorname{Arg} w$، نوشته شده‌باشد آنگاه بنابر روابط (۴) و (۵) نقطهٔ $z=\operatorname{Log}\rho+i\Phi$ دارای تصویر w و تنها نقطه‌دارای این خاصیت در نوار است. تـوجه کنید کـه در واقع وقتی حوزهٔ تعریف به هر نـوار $y_0<\operatorname{Im} z\leqslant y_0+2\pi$ محدود شود، نگاشت یك‌بیك و بروی برد است.

خاصیت جمعی

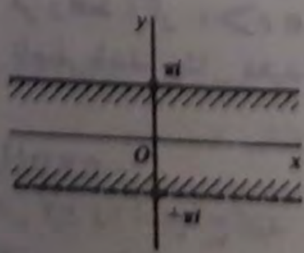
$$(\exp z_1)(\exp z_2)=\exp(z_1+z_2) \tag{۸}$$

از حالت حقیقی نتیجه می‌شود. بـرای اثبات این مطلب می‌نـویسیم $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ پس

$\exp z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ که در آن $\rho_1=e^{x_1}$، $\varphi_1=y_1$،

$\exp z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ که در آن $\rho_2=e^{x_2}$، $\varphi_2=y_2$.

بنابر فرمول (۵) بخش ۵ برای حاصلضرب دو عدد مختلط به صورت قطبی داریم



شکل ۱۸

$$(\exp z_1)(\exp z_2)=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$
$$=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)].$$

اما $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$ و $z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$ و در نتیجه درستی خاصیت (۸) ثابت می‌شود. توجه کنید که این خاصیت برای حالتی که z_1 و z_2 هردو موهومی‌محض باشند، در بخش ۵ به دست آمد.

به روشی مشابه می‌توانیم اتحاد زیر را استنتاج کنیم

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2}=\exp(z_1-z_2). \qquad (9)$$

از اتحاد فوق و با توجه به اینکه $e^0=1$، نتیجه می‌شود که $1/e^z=e^{-z}$. یك اتحاد مفید دیگر عبارت است از

$$(e^z)^n=e^{nz} \qquad (n=1,2,\dots). \qquad (10)$$

تمرینات

۱. نشان دهید که

(الف) $\exp(2\pm 3\pi i)=-e^2$؛ (ب) $\exp\dfrac{2+\pi i}{4}=\sqrt{e}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$؛

(ج) $e^{z+\pi i}=-e^z$.

۲. بیان کنید چرا تابع $2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ تام است.

۳. همهٔ z هایی را پیدا کنید که (الف) $e^z=-2$؛ (ب) $e^z=1+\sqrt{3}i$؛

(ج) $\exp(2z-1)=1$.

جواب (الف) $z=\operatorname{Log}2+(2n+1)\pi i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots)$؛

(ج) $z=\dfrac{1}{2}+n\pi i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

۴. عبارات $|\exp(2z+i)|$ و $|\exp(iz^2)|$ را برحسب x و y بنویسید و سپس نشان دهید که $|\exp(2z+i)+\exp(iz^2)|\leqslant e^{2x}+e^{-2xy}$.

۵. ثابت کنید که $|e^{-2z}|<1$ اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} z>0$.

۶. فرض کنیم z یك عدد مختلط ناصفر باشد. نشان دهید که اگر $z=re^{i\theta}$ آنگاه

(الف) $\bar{z}=re^{-i\theta}$؛

(ب) $\exp(\operatorname{Log} r+i\theta)=z$.

۷. اتحادهای (۹) و (۱۰) بخش ۲۲ را استنتاج کنید.

۸. نشان دهید که $e^{-nz}=1/(e^z)^n \quad (n=1,2,\dots)$.

۹. نشان دهید که

(الف) به ازای هر z ، $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$ ؛

(ب) $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ اگر و فقط اگر $z = n\pi$ که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

۱۰. (الف) نشان دهید که اگر e^z حقیقی باشد آنگاه $\operatorname{Im} z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)؛

(ب) اگر e^z موهومی محض باشد چه محدودیتی روی z گذاشته می‌شود؟

۱۱. مطلوب است بررسی رفتار (الف) $\exp(x+iy)$ وقتی x به $-\infty$ میل کند؛

(ب) $\exp(2+iy)$ وقتی y به ∞ میل کند.

۱۲. ثابت کنید که تابع $\exp \bar{z}$ در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

۱۳. به دو روش نشان دهید که تابع $\exp(z^2)$ تام است. مشتق آن چیست؟

جواب $2z\exp(z^2)$.

۱۴. نشان دهید که اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در شرایط (۱) و (۲) بخش ۲۱ صدق کند، باید همان تابع تعریف شده در رابطهٔ (۳) آن بخش باشد.

راهنمایی: معادلات $u_x = u$ و $v_x = v$ را به‌دست بیاورید و سپس نشان دهید که توابع حقیقی φ و ψای از متغیر حقیقی y موجودند به قسمی که $u(x, y) = e^x\varphi(y)$ ، $v(x, y) = e^x\psi(y)$. با استفاده از معادلات کشی ـ ریمان، معادلهٔ دیفرانسیل $\varphi''(y) + \varphi(y) = 0$ که جوابش عبارت است از $\varphi(y) = a\cos y + b\sin y$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند، را به‌دست آورید. سپس نشان دهید که $\psi(y) = a\sin y - b\cos y$ و برای پیدا کردن a و b از این که $u(x, 0) + iv(x, 0) = e^x$، استفاده کنید.

۱۵. $\operatorname{Re}(e^{1/z})$ را برحسب x و y بنویسید. چرا این تابع در هر حوزه که شامل مبدأ نباشد همساز است؟

۱۶. فرض کنید تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در یك حوزهٔ D تحلیلی باشد. بیان کنید چرا توابع

$$U(x, y) = e^{u(x, y)}\cos[v(x, y)],$$
$$V(x, y) = e^{u(x, y)}\sin[v(x, y)]$$

در D همسازند و چرا $V(x, y)$ در واقع یك مزدوج همساز $U(x, y)$ است.

۲۳. توابع مثلثاتی

از فرمولهای

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \text{و} \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد حقیقی x داریم

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

بنابراین، طبیعی است که توابع سینوس و کسینوس از متغیر مختلط z را با روابط زیر تعریف کنیم

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\,,\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,. \tag{۱}$$

توابع سینوس وکسینوس تام‌اند زیرا این توابع ترکیبات خطی (تمرین ۶ بخش ۲۰) توابع تام e^{iz} و e^{-iz} می‌باشند. بادانستن مشتقات توابع نمایی روابط (۱) درمی‌یابیم که

$$\frac{d}{dz}\sin z=\cos z\,,\quad \frac{d}{dz}\cos z=-\sin z\,. \tag{۲}$$

چهار تابع مثلثاتی دیگر با روابط معمولی برحسب توابع سینوس و کسینوس تعریف می‌شوند:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\,,\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}\,,$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z}\,,\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}\,. \tag{۳}$$

توجه کنید که $\tan z$ و $\sec z$ درهر حوزه‌ای که $\cos z\neq 0$ و $\cot z$ و $\csc z$ درهر حوزه‌ای که $\sin z\neq 0$ تحلیلی‌اند. بامشتقگیری ازعبارات سمت‌راست معادلات (۳) این فرمولها را بدست می‌آوریم

$$\frac{d}{dz}\tan z=\sec^2 z\,,\quad \frac{d}{dz}\cot z=-\csc^2 z\,,$$
$$\frac{d}{dz}\sec z=\sec z\tan z\,,\quad \frac{d}{dz}\csc z=-\csc z\cot z\,. \tag{۴}$$

از تعریف $\sin z$ نتیجه‌می‌شود که اگر $z=x+iy$

$$\sin z=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=(\cos x+i\sin x)\frac{e^{-y}}{2i}-(\cos x-i\sin x)\frac{e^{y}}{2i}$$
$$=\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right).$$

پس قسمتهای حقیقی وموهومی $\sin z$ به‌شکل ذیل نمایانده می‌شود:

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y. \tag{۵}$$

بهمین روش، یا بااستفاده از اولین فرمول از فرمولهای (۲)، درمی‌یابیم که

$$\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y. \tag{۶}$$

بنابر دوفرمول اخیر واضح است که

$$\sin(iy)=i\sinh y\,,\quad \cos(iy)=\cosh y \tag{۷}$$

وهمچنین $\sin z$ و $\cos z$، بترتیب، مزدوجهای مختلط $\sin z$ و $\cos z$ اند.

همچنین ازفرمولهای (۵) و (۶) خاصیت‌دوره‌ای بودن $\sin z$ و $\cos z$ واضح است:

$$\sin(z+2\pi)=\sin z \text{ ، } \sin(z+\pi)=-\sin z \text{ ،} \tag{۸}$$
$$\cos(z+2\pi)=\cos z \text{ ، } \cos(z+\pi)=-\cos z \text{ .} \tag{۹}$$

خاصیت دوره‌ای بودن هر یك از توابع مثلثاتی دیگر بسادگی از اتحادهای (۸) و (۹) نتیجه می‌شود. مثلا

$$\tan(z+\pi)=\tan z \text{ .} \tag{۱۰}$$

۲۴. خواص بیشتری از توابع مثلثاتی

با استفاده از فرمولهای (۱) یا فرمولهای (۵) و (۶) بخش قبل خواننده می‌تواند نشان دهد که

$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y \text{ ،} \tag{۱}$$
$$|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y \text{ .} \tag{۲}$$

ازاین‌دو عبارت واضح است که قدرمطلقهای $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند، درحالی که درمتغیرهای حقیقی، قدرمطلق سینوس و کسینوس هیچ‌وقت از واحد بزرگتر نیست.

اتحادهای مثلثاتی معمولی بامتغیرهای مختلط نیز برقرارند:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1 \text{ ،} \tag{۳}$$
$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2 \text{ ،} \tag{۴}$$
$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2 \text{ ،} \tag{۵}$$
$$\sin(-z)=-\sin z \text{ ، } \cos(-z)=\cos z \text{ ،} \tag{۶}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z \text{ ،} \tag{۷}$$
$$\sin 2z=2\sin z\cos z \text{ ، } \cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z \text{ ،} \tag{۸}$$

وغیره. اثباتها می‌توانند کاملا برمبنای خواص تابع‌نمایی بناشوند.

مقدار مشخصی از z را که به‌ازای آن $f(z)=0$، صفرتابع مفروض f نامند. صفرهای توابع سینوس و کسینوس همه حقیقی‌اند. درواقع

$$\sin z=0 \text{ اگر وفقط اگر } z=n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{۹}$$

و

$$\cos z=0 \text{ اگر وفقط اگر } z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{۱۰}$$

برای اثبات‌حکم (۹)، ابتدا فرض می کنیم که $\sin z=0$. بنابرعبارت (۱) نتیجه می‌شود که

$$\sin^2 x+\sinh^2 y=0 \text{ ؛}$$

بنابراین x و y باید درمعادلات زیرصدق کنند

$$\sin x=0 \quad \text{،} \quad \sinh y=0 \text{ .}$$

پس بوضوح $x=n\pi \ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ و $y=0$ ، یعنی $z=n\pi$. بالعکس، اگر $z=n\pi$ که درآن n یك عدد صحیح است، $\sin z=0$. بنابراین درستی حکم (۹) را

تحقیق کرده‌ایم. حکم(۱۰) به‌روشی مشابه ثابت می‌شود.
با توجه به حکم (۱۰)، $\tan z$ دارای تکینهایی در نقاط $z=(n+۱/۲)\pi$ $(n=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$ است و درهرجای دیگر تحلیلی است.

تمرینات

۱. نشان دهید که به‌ازای هرعدد مختلط z، $e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

۲. صحت فرمولهای مشتقگیری(۴) بخش۲۳ را تحقیق کنید.

۳. فرمولهای (۶) و (۷) بخش ۲۳ را استنتاج کنید.

۴. فرمول(۱) بخش۲۴ را استنتاج کنید وآنگاه نشان دهید که
$$|\sinh y|\leqslant|\sin z|\leqslant\cosh y.$$

۵. فرمول(۲) بخش۲۴ را استنتاج کنید ونشان‌دهید که $|\sinh y|\leqslant|\cos z|\leqslant\cosh y$.

۶. نشان دهید که $|\sin z|\geqslant|\sin x|$ و $|\cos z|\geqslant|\cos x|$.

۷. صحت اتحادهای (۳) و (۴) بخش۲۴ را تحقیق کنید.

۸. ثابت کنید که (الف) $۱+\tan^۲ z=\sec^۲ z$؛ (ب) $۱+\cot^۲ z=\csc^۲ z$.

۹. صحت اتحادهای زیر را تحقیق کنید

(الف) $۲\sin(z_۱+z_۲)\sin(z_۱-z_۲)=\cos۲z_۲-\cos۲z_۱$؛

(ب) $۲\cos(z_۱+z_۲)\sin(z_۱-z_۲)=\sin۲z_۱-\sin۲z_۲$.

۱۰. نشان دهید که به‌ازای هرz، $\cos(i\bar{z})=\overline{\cos(iz)}$ ونشان دهید که $\sin(i\bar{z})=\overline{\sin(iz)}$ اگر وفقط اگر $z=n\pi i$ $(n=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$.

۱۱. حکم (۱۰) بخش۲۴ را ثابت کنید.

۱۲. به‌کمك اتحاد(الف) تمرین۹، نشان‌دهید که اگر $\cos z_۱=\cos z_۲$ آنگاه $z_۱+z_۲$ یا $z_۲-z_۱$ مضرب‌صحیحی از۲πاست.وقتی$\sin z_۱=\sin z_۲$،نتیجهٔمشابهی به‌دست آورید.

۱۳. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\sin z=\cosh۴$ را بامساوی قراردادن قسمتهای حقیقی‌وموهومی $\sin z$ و $\cosh۴$ پیدا کنید.

جواب $(۲n+۱/۲)\pi\pm۴i$ $(n=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$.

۱۴. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\cos z=۲$ را پیدا کنید.

جواب $۲n\pi+i\cosh^{-۱}۲$ یعنی $۲n\pi\pm i\,\mathrm{Log}(۲+\sqrt{۳})$ $(n=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$.

۱۵. به‌دو روش نشان‌دهید که هریك ازتوابع ذیل همه‌جاهمساز است: (الف)$\sin x\sinh y$؛ (ب) $\cos۲x\sinh۲y$.

۱۶. فرض کنیم تابع$f(z)$ درحوزهٔD تحلیلی باشد. بیان کنیدچراتوابع $\sin f(z)$ و $\cos f(z)$ درآن حوزه تحلیلی‌اند. همچنین بنویسید $w=f(z)$ و بیان کنید چرا
$$\frac{d}{dz}\sin f(z)=\cos w\frac{dw}{dz}\quad,\quad\frac{d}{dz}\cos f(z)=-\sin w\frac{dw}{dz}.$$

۱۷. نشان‌دهید که نه $\sin \bar{z}$ درجایی تابعی تحلیلی از z است و نه $\cos \bar{z}$.

۲۵. توابع هذلولی‌گون

سینوس هذلولی گون و کسینوس‌هذلولی گون با یك‌متغیر مختلط همان‌طور تعریف می‌شوند که با یك متغیر حقیقی، یعنی

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \qquad (1)$$

تانژانت هذلولی گون z با رابطهٔ

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

تعریف مـی‌شود و آنگاه $\coth z$ ، $\operatorname{sech} z$ و $\operatorname{csch} z$ ، بترتیب، بـه‌عنوان معکوسهای $\tanh z$ ، $\cosh z$ و $\sinh z$ تعریف می‌شوند.

چون e^z و e^{-z} تام‌اند، از تعریف(۱) نتیجه می‌شود که توابع سینوس هذلولی گون و کسینوس‌هذلولی گون‌تام‌اند. تابع $\tanh z$ در هر حوزه‌ای که‌در آن $\cosh z \neq 0$، تحلیلی است.

حساب و جبر توابع‌هذلولی گون بسهولت از تعاریف‌فوق استنتاج می‌شوند. فرمولها همانهایی هستند که برای توابع متناظر از یك متغیر حقیقی ثابت شده‌اند؛ پس

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z, \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z, \quad \frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z, \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \quad \frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z. \qquad (4)$$

بعضی‌از اتحادهای کثیرالاستعمال عبارت‌انداز

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \qquad (5)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \qquad (6)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \qquad (7)$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z. \qquad (8)$$

توابع هذلولی گون بستگی نزدیکی به‌توابع‌مثلثاتی تعریف شده دربخش ۲۳دارند. درواقع بایادآوری‌اینکه چگونه‌همهٔ این‌توابع برحسب توابع‌نمایی‌تعریف شده‌اند، روابطی پیدا می کنیم ازقبیل

$$\sinh(iz) = i \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \qquad (9)$$

$$\sin(iz) = i \sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z. \qquad (10)$$

قسمتهای حقیقی وموهومی توابع سینوس هذلولی گون و کسینوس هذلولی گـون در

فرمولهای

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \tag{11}$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \tag{12}$$

نشان داده شده‌اند، که در آنها $z = x + iy$. خواننده می‌تواند به طرق گوناگون عبارات زیر را به‌دست آورد

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \tag{13}$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y. \tag{14}$$

توابع سینوس هذلولی گون و کسینوس هذلولی گون دوره‌ای با دورهٔ $2\pi i$ هستند و تانژانت هذلولی گون دوره‌ای با دورهٔ πi است. همچنین $\sinh z = 0$ وقتی که $z = n\pi i$ و $\cosh z = 0$ وقتی که $z = (n + 1/2)\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$، درواقع اینها تنها صفرهای $\sinh z$ و $\cosh z$ هستند.

تمرینات

۱. فرمولهای مشتقگیری (۲) و (۴) بخش ۲۵ را استنتاج کنید.

۲. اتحادهای (۵) و (۷) بخش ۲۵ را ثابت کنید.

۳. بنویسید $\sinh z = \sinh(x + iy)$ و $\cosh z = \cosh(x + iy)$ و نشان دهید که چگونه فرمولهای (۱۱) و (۱۲) بخش ۲۵، از اتحادهای (۶)، (۷) و (۹) آن بخش نتیجه می‌شوند.

۴. فرمول (۱۴) بخش ۲۵ را استنتاج کنید وسپس نشان دهید که

$$|\sinh x| \leqslant |\cosh z| \leqslant \cosh x.$$

۵. نشان دهید که $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$ و $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$. سپس نشان دهید که $\tanh(z + \pi i) = \tanh z$.

۶. ثابت کنید که $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$.

۷. با استفاده از احکام (۹) و (۱۰) بخش ۲۴ و فرمولهای (۱۰) بخش ۲۵ همهٔ صفرهای $\sinh z$ و $\cosh z$ را به‌دست آورید.

۸. با استفاده از نتایج حاصل در تمرین ۷، همهٔ صفرها و تکینهای تابع تانژانت هذلولی گون را پیدا کنید.

۹. همهٔ ریشه‌های معادلات زیر را پیدا کنید (الف) $\cosh z = 1/2$؛ (ب) $\sinh z = i$؛ (ج) $\cosh z = -2$.

جواب (الف) $(2n \pm 1/3)\pi i$؛ (ب) $(2n + 1/2)\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

۱۰. چرا تابع $\sinh(e^z)$ تام است؟ قسمت حقیقی این تابع را به‌صورت تابعی از x و y بنویسید و بیان کنید چرا این تابع باید همه‌جا همساز باشد.

$\ln z = \operatorname{Ln} r + i\theta$
$= \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$ تابع چند مقداری
$\theta = \Theta + 2n\pi$ $r \neq 0$
$-\pi < \Theta \leq \pi$

۲۶. تابع لگاریتمی

فرض کنیم، همان‌طور که درحساب متغیرهای حقیقی تعریف‌شده است، $\operatorname{Log} r$ نمایش لگاریتم طبیعی عدد حقیقی ومثبت r باشد. حال تابع لگاریتمی آنالیز مختلط را بارابطهٔ

$$\log z = \operatorname{Log} r + i\theta \tag{1}$$

که درآن $r = |z|$ و $\theta = \arg z$ تعریف می کنیم. این تابعی چند مقداری است که به‌ازای همهٔ اعداد مختلط ناصفر تعریف می‌شود.

تعریف(۱) تعریفی‌طبیعی است به‌این‌معنی که بانوشتن $z = re^{i\theta}$ واستفاده از خواص معمولی لگاریتم طبیعی درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی برای بسط صوری $\log(re^{i\theta})$، مطرح می گردد.

اگر Θ معرف‌مقدار اصلی $\arg z$ $(-\pi < \Theta \leqslant \pi)$ باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\theta = \Theta + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

پس عبارت(۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log z = \operatorname{Log} r + i(\Theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2}$$

توجه کنید که به‌ازای هر z دلخواه درحوزهٔ تعریف، مقادیر $\log z$ دارای‌یک‌قسمت حقیقی‌اند و تفاضل قسمتهای موهومی آنها مضارب صحیحی از 2π است.

مقدار اصلی $\log z$ مقداری‌است که ازفرمول(۲) وقتی $n = 0$، به‌دست می‌آید. این مقدار را با $\operatorname{Log} z$ نشان می‌دهیم و با رابطهٔ زیر تعیین می کنیم

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\Theta \qquad (r > 0, \; -\pi < \Theta \leqslant \pi). \tag{3}$$

نگاشت $w = \operatorname{Log} z$ تکمقداری وحوزهٔ تعریفش مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط ناصفر است؛ برد آن عبارت‌است‌از نوار $-\pi < \operatorname{Im} w \leqslant \pi$.

توجه کنید که $\operatorname{Log} z$ به لگاریتم طبیعی معمولی ازمتغیر حقیقی تحویل می‌یابدهرگاه حوزهٔ تعریف به‌محورحقیقی مثبت محدود گردد. زیرا اگر z یك عدد حقیقی مثبت r باشد، $|z| = r$ و $\Theta = 0$؛ پس رابطهٔ(۳) چنین می‌شود $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r$.

دربخش ۲۲ دیدیم که باتعویض z و w رابطهٔ $z = e^w$ تناظر یك‌بیکی بین‌نقاط ناصفر صفحهٔz ونقاط نوار $-\pi < \operatorname{Im} w \leqslant \pi$ ازصفحهٔ w برقرارمی کند. نقطهٔ $z = r\exp(i\Theta)$ متناظر با نقطهٔ $w = \operatorname{Log} r + i\Theta$ درصفحهٔ w است. بنابراین، وقتی حوزهٔ تعریف تابع e^w به‌نوار $-\pi < \operatorname{Im} w \leqslant \pi$ محدود گردد، معکوس‌آن تابع لگاریتمی اصلی $\operatorname{Log} z$ است. یعنی

$$w = \operatorname{Log} z \quad \text{اگر وفقط اگر} \quad z = e^w.$$

نگاشت $z = e^w$ همچنین تناظر یك‌بیکی بین نقاط ناصفر صفحهٔ z و نقاطی ازصفحهٔw برقرار می کندکه درنوار $(2k-1)\pi < \operatorname{Im} w \leqslant (2k+1)\pi$، که درآن k عدد صحیح ثابتی است، واقع‌اند. وقتی که حوزهٔ تعریف e^w به‌این‌نوار محدود گردد تابع معکوس ازفرمول(۲)، وقتی $n = k$، به‌دست می‌آید.

۲۷. شاخه‌های $\log z$

تابع

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\Theta \qquad (r>0,\ -\pi<\Theta\leqslant\pi) \tag{1}$$

درحوزهٔ $r>0,\ -\pi<\Theta<\pi$ پیوسته است. این مطلب بادرنظر گرفتن توابع مؤلفه‌ای

$$u(r,\Theta)=\operatorname{Log} r,\quad v(r,\Theta)=\Theta \tag{2}$$

دیده می‌شود. هریك ازاین توابع مؤلفه‌ای، وبنابراین $\operatorname{Log} z$، درحوزهٔ مذکور پیوسته‌است. باتوجه به‌این‌مطلب که u حتی درمبدأ تعریف نشده است ونیزاینکه مقدار تابع مؤلفه‌ای v درهر نقطه برمحور حقیقی‌منفی، مساوی π ولی درهرهمسایگی آن نقطه نقاطی‌هستند که مقدار v درآنها نزدیك به $-\pi$ است، معلوم می‌شود که این‌حوزه بزرگترین حوزهٔ ممکنی است که $\operatorname{Log} z$ درآن پیوسته است.

u و v توابع مؤلفهٔ $\operatorname{Log} z$ درحوزهٔ $r>0,\ -\pi<\Theta<\pi$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته نسبت به r و Θ هستند واین مشتقات جزئی همه‌جا دراین‌حوزه درصورت قطبی(۲)، بخش۱۸، معادلات کشی‌ـ‌ریمان صدق می‌کنند. پس، از قضیهٔ بخش۱۸ نتیجه می‌گیریم که تابع $\operatorname{Log} z$ در حوزهٔ $r>0,\ -\pi<\Theta<\pi$ تحلیلی است. بعلاوه اگر $z=re^{i\Theta}$،

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = e^{-i\Theta}\left(\frac{1}{r}+i0\right)=\frac{1}{re^{i\Theta}};$$

یعنی

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z=\frac{1}{z}\qquad (|z|>0,\ -\pi<\operatorname{Arg} z<\pi). \tag{3}$$

چون $\operatorname{Log} z$ درمبدأ یا برمحور حقیقی منفی پیوسته‌نیست نمی‌تواند درآنجا مشتقپذیر باشد.

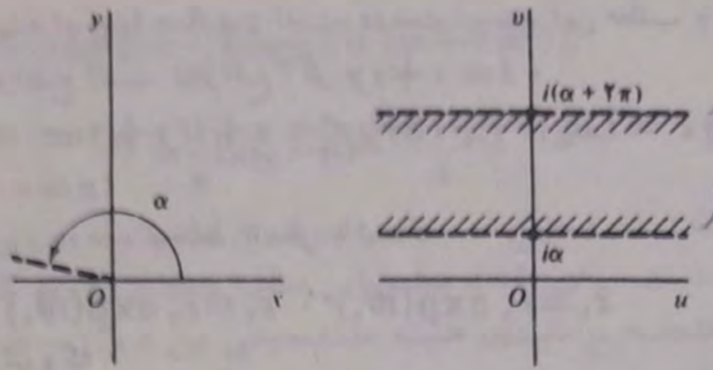
علامت $\operatorname{Log} z$ اغلب هم برای نمایش مقدار اصلی $\log z$ به‌کار می‌رود، مثلا در رابطهٔ(۱)، وهم برای‌تابع تحلیلی حاصل‌ازتحدید $\operatorname{Log} z$ به‌حوزهٔ $r>0,\ -\pi<\Theta<\pi$. باتوجه به‌متنی که این علامت درآن ظاهر می‌شود، می‌توان دریافت که به‌چه‌منظوری به کار رفته است.

اگر درتعریف(۱) بخش قبل مقدار θ را چنان محدود کنیم که برای αای مشخص اما دلخواه $\alpha<\theta<\alpha+2\pi$، تابع

$$\log z=\operatorname{Log} r+i\theta\qquad (r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi) \tag{4}$$

درسراسرحوزهٔ تعیین‌شده تکمقداری وپیوسته می‌شود. اگر $w=\log z$، برد تابع عبارت‌از نوار افقی $\alpha<\operatorname{Im} w<\alpha+2\pi$ خواهد بود (شکل۱۹).

درسراسرحوزهٔ تعریف‌تابع(۴)، توابع‌مؤلفه‌ای‌نسبت‌به‌متغیرهای r و θ دارای‌مشتقات جزئی مرتبه اول‌پیوسته‌اند و درهر نقطهٔ آن حوزه، این مشتقات جزئی درصورت‌قطبی‌معادلات کشی - ریمان صدق می‌کنند. بـدین‌ترتیب $\log z$، به‌صورت تعریف شده بـا رابطهٔ (۴)،



تصویر log z

شکل ۱۹

درسراسر حوزهٔ تعریفش تحلیلی است و

$$\frac{d}{dz}\log z=\frac{1}{z} \qquad (|z|>\circ \text{ ، } \alpha<\arg z<\alpha+\text{۲}\pi). \qquad (\text{۵})$$

یك شاخه از تابع چند مقداری f هر تابع تکمقداری F است که درحوزه‌ای تحلیلی ودرهر نقطهٔ z ازآن‌حوزه، مقدار $F(z)$ یکی‌از مقادیر $f(z)$ باشد.

باتوجه به‌این تعریف، تابع $\operatorname{Log} z$ که درنقاط حوزهٔ $r>\circ$ ، $-\pi<\Theta<\pi$ تعریف شده‌است شاخه‌ای ازتابع لگاریتمی(۱) بخش قبل‌را تشکیل می‌دهد. این شاخه را شاخهٔ اصلی می‌نامند. تابع(۴) شاخه‌ای ازهمان تابع‌چند مقداری است.

بنابر تعریف‌نقطهٔ تکین (بخش۱۹)، هرنقطهٔ محور حقیقی منفی، $\Theta=\pi$، و مبدأ، یك نقطهٔ تکین شاخهٔ اصلی $\operatorname{Log} z$ است. پرتو $\Theta=\pi$ بریدگی شاخه برای شاخهٔ اصلی نامیده می‌شود، بریدگی شاخه عبارت‌از منحنی یا خطی ازنقاط تکین است که درتعریف یك شاخهٔ تابع چند مقداری به‌کار رفته است. پرتو $\theta=\alpha$ یك بریدگی شاخه برای شاخهٔ(۴) تابع لگاریتمی است. نقطهٔ تکین $z=\circ$، مشترك بین همهٔ بریدگیهای شاخه برای آن تابع چند مقداری، یك نقطهٔ شاخه نامیده می‌شود.

۲۸. خواص بیشتر لگاریتم

خواص دیگری ازلگاریتم درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی بابرخی‌تغییرات،دراینجا صادق است.

ابتدا درستی اتحاد

$$e^{\log z}=z \qquad (z\neq\circ) \qquad (\text{۱})$$

را تحقیق می‌کنیم. این بدان معنی است که بدون توجه به‌اینکه چه‌مقداری از $\log z$ را انتخاب‌کنیم عدد $e^{\log z}$ همیشه مساوی z است. برای تحقیق این مطلب می‌نویسیم $z=re^{i\theta}$ و $\log z=\operatorname{Log} r+i\theta$ که درآن، θ مقدار دلخواهی از $\arg z$ است. پس

$$e^{\log z}=e^{\operatorname{Log} r+i\theta}=e^{\operatorname{Log} r}e^{i\theta}=re^{i\theta}=z\,.$$

معهذا، اینکه همیشه $\log e^z$ مساوی z است، درست نیست. این مطلب با توجه به چند مقداری بودن $\log e^z$ واضح است. درواقع اگر $z=x+iy$ ،

$$\log e^z = \mathrm{Log}|e^z| + i \arg e^z = x + i(y + 2n\pi) = z + 2n\pi i \qquad (2)$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

فرض کنیم z_1 و z_2 دوعدد مختلط ناصفر باشند که

$$z_1 = r_1 \exp(i\theta_1) \;,\; z_2 = r_2 \exp(i\theta_2) \,.$$

بسادگی نشان داده می‌شود که

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \,. \qquad (3)$$

✓ , Log(z1z2) ≠ Lo
+ L

البته این بدان‌معنی‌است که هرمقدار $\log(z_1z_2)$ را می‌توان به‌صورت مقداری از $\log z_1$ بعلاوهٔ مقداری از $\log z_2$ بیان کرد وبالعکس، هرمقدار $\log z_1$ بعلاوهٔ هرمقدار $\log z_2$ مقداری از $\log(z_1z_2)$ است. عبارت(۳) بیدرنگ از این امر نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Log}(r_1 r_2) = \mathrm{Log}\, r_1 + \mathrm{Log}\, r_2 \quad \text{و} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \,،$$

همچنانکه دربخش۵ نشان داده شد.

به‌روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2 \,. \qquad (4)$$

برای روشن ساختن عبارت(۳)، مثلا، می‌نویسیم

$$z_1 = z_2 = -1 \quad \text{و} \quad \log(z_1 z_2) = \log 1 = 0 \,.$$

رابطهٔ (۳) وقتی $\log z_1 = \pi i$ و $\log z_2 = -\pi i$ صادق است اما وقتی، مثلا، $\log z_1 = \log z_2 = \pi i$ ، صادق نیست. بنابراین، باید توجه کرد که اگر درعبارت(۳)، وهمین‌طورعبارت(۴)، همه‌جا $\log$ با Log جایگزین شود؛ این‌عبارات درحالت کلی برقرار نیستند.

فرض کنیم $z = r\exp(i\Theta)$ یك عدد مختلط ناصفر باشد که درآن Θ نمایش مقدار اصلی آوند z بوده n یك عدد صحیح مثبت است. با به‌خاطرآوردن فرمول (بخش۶) برای ریشه‌های nام یك عدد مختلط ناصفر و تعریف تابع چند مقداری لگاریتم، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned}
\log(z^{1/n}) &= \log\left[\sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n}\right] \\
&= \log\sqrt[n]{r} + i\left(\frac{\Theta + 2k\pi}{n} + 2p\pi\right) \\
&= \frac{1}{n}\log r + i\,\frac{\Theta + 2(pn + k)\pi}{n}
\end{aligned}$$

که درآن k عددصحیحی بین 0 و $n-1$، به‌انضمام خود $n-1$، و p یك‌عدد صحیح است. ازطرف دیگر

$$\frac{1}{n}\log z=\frac{1}{n}[\operatorname{Log} r+i\,(\Theta+2q\pi)]$$
$$=\frac{1}{n}\operatorname{Log} r+i\,\frac{\Theta+2q\pi}{n}$$

که درآن q یك عدد صحیح است. پس بوضوح هریك از مقادیر $\log z^{1/n}$ یك مقدار $(1/n)\log z$ است. برای اثبات عکس این مطلب به‌یاد می‌آوریم که باقیماندهٔ تقسیم یك عددصحیح برعددصحیح مثبت n، همیشه عددصحیحی بین ۰ و $n-1$، به‌انضمام‌خود $n-1$، است. یعنی به‌ازای هرعددصحیح q عددصحیح p وعددصحیح kای بین ۰ و $n-1$، به‌انضمام خود $n-1$، موجود است به‌قسمی که $q=pn+k$. پس نتیجه می گیریم که

$$\log(z^{1/n})=\frac{1}{n}\log z \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{5}$$

که درآن متناظر بایك مقدار $\log(z^{1/n})$ که درسمت چپ گرفته شده باید مقدار مناسبی از $\log z$ درسمت راست انتخاب شود وبالعکس.

ملاحظه‌کنید که عبارت(۵) توأم باخاصیت(۱)، فرمول

$$z^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{6}$$

را نتیجه می‌دهد. به‌ازای یك z مشخص، سمت‌راست رابطهٔ(۶) درست n مقدار متمایز به‌خود می‌گیرد، که مقادیر $z^{1/n}$ هستند.

برای توضیح بیشتر این‌مطلب که چگونه نتایجی ازقبیل‌عبارت(۵)، شامل‌لگاریتمهای چند مقداری، باید به‌معنی تساوی مجموعه‌ها تعبیرشوند، توجه می کنیم که درحالت کلی

$$\log(z^n)\neq n\log z \qquad (n=2,3,\ldots).$$

مثلا درحالت خاصی که $z=i$ و $n=2$، مقادیر $\log(i^2)$ اعداد

$$(2k+1)\pi i \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

هستند درحالی که مقادیر $2\log i$ اعداد $(4k+1)\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ می‌باشند. بالنتیجه مجموعهٔ مقادیر $\log(i^2)$ با مجموعهٔ مقادیر $2\log i$ یکی نیستند و $\log(i^2)\neq 2\log i$.

عبارت $\log(z^n)=n\log z$ به‌ازای مقادیرخاص z و n، وقتی تابع لگاریتم چند مقداری رابایك شاخهٔ تکمقدارآن جایگزین کنیم، ممکن است‌درست باشد یانادرست. برای مثال توجه‌می کنیم که

$\operatorname{Log}[(1+i)^2]=2\operatorname{Log}(1+i)$ درحالی که $\operatorname{Log}[(-1+i)^2]\neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$.

تمرینات

۱. نشان دهید که (الف) $\operatorname{Log}(-ei)=1-(\pi/2)i$؛

(ب) $\operatorname{Log}(1-i)=\frac{1}{2}\operatorname{Log}2-(\pi/4)i$.

۲. نشان‌دهید که اگر $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ آنگاه (الف) $\log 1 = 2n\pi i$ ؛
(ب) $\log(-1)=(2n+1)\pi i$ ؛ (ج) $\log i=(2n+1/2)\pi i$ ؛
(د) $\log(i^{1/2})=(n+1/4)\pi i$.

۳. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\log z=(\pi/2)i$ را پیدا کنید.

جواب $z=i$.

۴. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $e^z=-3$ را پیدا کنید.

جواب $z=\operatorname{Log}3+(2n+1)\pi i$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

۵. فرمول(۴) بخش۲۸ را ثابت کنید.

۶. باانتخاب مقادیر ناصفر مشخصی برای z_1 و z_2 نشان‌دهید که فرمول(۴) بخش ۲۸ همیشه برقرار نیست هر گاه درهمه‌جا Log را جایگزین log نماییم.

۷. نشان دهید که اگر $\operatorname{Re}z_1>0$ و $\operatorname{Re}z_2>0$ آنگاه

$$\operatorname{Log}(z_1z_2)=\operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2 .$$

۸. ثابت کنید که اگر $z=re^{i\theta}$ $(r>0 ,\ -\pi/2<\theta<\pi/2)$. آنگاه

$$\operatorname{Log}z^2=2\operatorname{Log}z$$

۹. نشان دهید که (الف) اگر

$$\log z=\operatorname{Log}r+i\theta \quad (r>0 ,\ \pi/4<\theta<9\pi/4),$$

آنگاه $\log(i^2)=2\log i$ ؛ (ب) اگر

$$\log z=\operatorname{Log}r+i\theta \quad (r>0 ,\ 3\pi/4<\theta<11\pi/4),$$

آنگاه $\log(i^2)\neq 2\log i$.

۱۰. ثابت کنید که اگر z عددمختلط ناصفری باشد،

$$z^n=\exp(n\log z) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

با به‌خاطر آوردن اینکه چگونه در بخش۶ نوشتیم $z^0=1$ و $z^{-n}=(z^{-1})^n$ وقتی که $n=-1, -2, \ldots$، نشان‌دهید که عملا وقتی $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ این نتیجه درست است.

۱۱. نشان‌دهید که به‌ازای همهٔ نقاط z در نیم‌صفحهٔ $x>0$ تابع $\operatorname{Log}z$ را می‌توان‌چنین نوشت

$$\operatorname{Log}z=\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$$

که در آن $-\pi/2<\arctan t<\pi/2$. با استفاده از این عبارت برای $\operatorname{Log}z$ وهمچنین قضیهٔ بخش۱۷، اثبات دیگری برای تحلیلی بودن شاخهٔ اصلی $\operatorname{Log}z$ در $x>0$ و برقراری فرمول(۳) بخش۲۷ در آن حوزه، ارائه دهید. اما توجه کنید که اشکالاتی درمورد تانژانت معکوس ومشتق آن در بقیهٔ حوزهٔ تحلیلی کامل $\operatorname{Log}z$، $-\pi<\Theta<\pi$ ، $r>0$، بخصوص روی خط $x=0$ پیش می‌آید.

۱۲. به‌دوطریق نشان دهید که تابع $\mathrm{Log}(x^2+y^2)$ درهرحوزه‌ای که شامل مبدأ نباشد همساز است.

۱۳. نشان‌دهید که(الف) تابع $\mathrm{Log}(z-i)$ همه‌جا تحلیلی‌است بجزروی نیمخط $y=1$ ، $x\leqslant 0$ ؛ (ب) تابع

$$\frac{\mathrm{Log}(z+4)}{z^2+i}$$

همه‌جا تحلیلی است بجز درنقاط $\pm(1-i)/\sqrt{2}$ و روی نیمخط $y=0$ ، $x\leqslant -4$.

۱۴. بنویسید $z=r\exp(i\theta)$ و نشان‌دهید که

$$\mathrm{Re}[\log(z-1)]=\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-2r\cos\theta+r^2)\qquad (z\neq 1).$$

چراوقتی $z\neq 1$ این تابع باید درمعادلهٔ لاپلاس صدق کند؟

۲۹. نمای مختلط

فرمول(۶) وتمرین ۱۰ بخش قبل این ایده را به‌ما می‌دهد که z^c را، که درآن نمای c عدد مختلطی‌است، بارابطهٔ زیر تعریف کنیم

$$z^c=\exp(c\log z)\qquad (z\neq 0). \qquad (۱)$$

البته تابع‌نمایی که درسمت راست رابطهٔ(۱) به‌کار رفته‌است برطبق‌رابطهٔ(۴) بخش ۲۱ تعریف می‌شود و $\log z$ نمایش‌تابع لگاریتم چندمقداری است. بنابراین تعریف(۱)تعریفی است سازگار به‌این‌معنی که این تعریف حالات خاص مذکور درفوق وقتی

$c=1/n$ $(n=1,2,\ldots)$ و $c=n$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$

را شامل می‌شود.

به‌طور کلی، چنین‌توانهایی از z چندمقداری‌اند. مثلاً

$$i^{-2i}=\exp(-2i\log i)=\exp[-2i(\pi/2+2n\pi)i]$$
$$=\exp[(4n+1)\pi]\qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

توجه‌کنید که بنا برخاصیت $e^{-z}=1/e^z$، دومجموعه اعداد z^{-c} و $1/z^c$ یکی هستند. پس می‌توان‌نوشت

$$z^{-c}=\frac{1}{z^c}\qquad (z\neq 0). \qquad (۲)$$

سایرخواص معمولی نماها ازنظریه متغیرهای حقیقی دراینجا صادق‌اند. مثلاً فرض کنید $z=re^{i\theta}$ و α عددی حقیقی باشد. تابع

$$\log z=\mathrm{Log}\,r+i\theta\qquad (r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi) \qquad (۳)$$

درحوزهٔ تعیین شده تکمقداری وتحلیلی است، تابع مرکب $\exp(c\log z)$ نیزچنین است. پس تابع z^c که بارابطهٔ(۱) تعریف شد، که درآن $\log z$ بارابطهٔ(۳) داده‌می‌شود، درحوزهٔ

$\alpha<\theta<\alpha+2\pi$ ، $r>0$ تکمقداری و تحلیلی است. مشتق این شاخه از تابع توانی چند مقداری را می‌توان، برحسب تابع لگاریتمی تعریف‌شده با رابطهٔ (۳)، به‌شکل زیر بیان کرد

$$\frac{d}{dz}z^c=\frac{d}{dz}\exp(c\log z)=\exp(c\log z)\frac{c}{z}$$

$$=c\frac{\exp(c\log z)}{\exp(\log z)}=c\exp[(c-1)\log z].$$

در اینجا جملهٔ آخر عبارت‌از تابع تکمقداری cz^{c-1} است، بنابراین

$$\frac{d}{dz}z^c=cz^{c-1}\qquad(|z|>0,\ \alpha<\arg z<\alpha+2\pi). \tag{۴}$$

وقتی $\alpha=-\pi$، چون که $-\pi<\arg z<\pi$، تابع

$$z^c=\exp(c\,\mathrm{Log}\,z)\qquad(z\neq 0) \tag{۵}$$

شاخهٔ اصلی تابع توانی چند مقداری (۱) نامیده می‌شود. این تابع در حوزهٔ $0<|z|$ ، $-\pi<\mathrm{Arg}\,z<\pi$ تکمقداری و تحلیلی است.

مثلاً مقدار اصلی $(-i)^i$ عبارت است از

$$\exp[i\,\mathrm{Log}(-i)]=\exp\left[i\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right]=\exp\frac{\pi}{2}.$$

به‌عنوان مثالی دیگر، شاخهٔ اصلی $z^{2/3}$ ،

$$\exp\left(\frac{2}{3}\mathrm{Log}\ z\right)=\exp\left(\frac{2}{3}\mathrm{Log}\,r+\frac{2}{3}i\Theta\right)=\sqrt[3]{r^2}\exp\left(i\frac{2}{3}\Theta\right),$$

درحوزهٔ $r>0$ ، $-\pi<\Theta<\pi$ تحلیلی است. همان‌طور که ازقضیهٔ بخش ۱۸ نیز دیده می‌شود.

توجه کنید که اگر در تعریف (۱) بگذاریم $z=e$، کمیت e^c در سمت چپ، در حالت کلی چندمقداری است. وقتی شاخهٔ اصلی را بگیریم تعریف معمولی e^c پیدا می‌شود.

بنابر تعریف (۱)، تابع‌نمایی بامبنای c، که در آن c یک‌عدد مختلط ثابت و ناصفر است به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$c^z=\exp(z\log c)\qquad(c\neq 0). \tag{۶}$$

وقتی یک‌مقدار $\log c$ مشخص شود، c^z تابع تامی از z خواهد بود. بسادگی دیده می‌شود که

$$\frac{d}{dz}c^z=c^z\log c\qquad(c\neq 0). \tag{۷}$$

۳۰. توابع مثلثاتی معکوس

معکوس توابع هذلولی‌گون ومثلثاتی را می‌توان برحسب لگاریتم بیان کرد.

برای تعریف تابع معکوس‌سینوس، $\sin^{-1}z$، می‌نویسیم $w=\sin^{-1}z$ درصورتی که

$w=\sin^{-1}z$ درصورتی که $z=\sin w$؛ یعنی،

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

برای اینکه w را برحسب z بیان کنیم ابتدا با حل معادلهٔ

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0,$$

که معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به e^{iw} است، e^{iw} را به‌دست‌می‌آوریم. درمی‌یابیم که

$$e^{iw}=iz+(1-z^2)^{1/2}$$

که در آن، همان‌طور که می‌دانیم $(1-z^2)^{1/2}$ یك تابع دومقداری از z است. اگر از هر طرف معادله لگاریتم بگیریم و به‌یادآوریم که $w=\sin^{-1}z$، به‌فرمول‌ذیر می‌رسیم

(۱)
$$\sin^{-1}z=-i\log[iz+(1-z^2)^{1/2}].$$

توجه کنید که $\sin^{-1}z$ تابعی چندمقداری با تعدادی نامتناهی مقدار در هر نقطهٔ z است. درصورتی که‌شاخه‌های مشخص جذر و لگاریتم به کار برده شوند، این تابع تحلیلی‌وتکمقداری است زیرا، بدین‌ترتیب، ترکیبی‌است از توابع تحلیلی.

به‌روشی مشابه، توابع‌معکوس کسینوس و تانژانت رامی‌توان چنین‌نوشت

(۲)
$$\cos^{-1}z=-i\log[z+i(1-z^2)^{1/2}],$$

(۳)
$$\tan^{-1}z=\frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}.$$

مشتق این سه تابع بسهولت ازفرمولهای‌فوق به‌دست‌می‌آید. مشتق دوتابع‌اول بستگی به‌مقادیر انتخاب شده برای جذرها دارد:

(۴)
$$\frac{d}{dz}\sin^{-1}z=\frac{1}{(1-z^2)^{1/2}};\quad \frac{d}{dz}\cos^{-1}z=\frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

معهذا‌مشتق تابع‌آخری،

(۵)
$$\frac{d}{dz}\tan^{-1}z=\frac{1}{1+z^2},$$

به‌نحوهٔ تکمقداری‌شدن تابع بستگی ندارد.

باروش متناظری‌می‌توان توابع‌معکوس هذلولی گون را بررسی کرد. نتیجه‌می‌شود که

(۶)
$$\sinh^{-1}z=\log[z+(z^2+1)^{1/2}],$$

(۷)
$$\cosh^{-1}z=\log[z+(z^2-1)^{1/2}],$$

(۸)
$$\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

سرانجام تذکر می‌دهیم که علامت متداول دیگری برای‌همهٔ این‌توابع معکوس‌عبارت است‌از $\arcsin z$ ، $\arccos z$ ومانند اینها.

تمرینات

۱. نشان دهید که وقتی $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$
(الف) $(1+i)^i=\exp(-\pi/4+2n\pi)\exp[(i/2)\operatorname{Log}2]$؛
(ب) $(-1)^{1/\pi}=\exp[(2n+1)i]$.

۲. مقدار اصلی عبارات زیر را پیدا کنید (الف) i^i؛ (ب) $[(e/2)(-1-i\sqrt{3})]^{3\pi i}$؛
(ج) $(1-i)^{4i}$.
جواب (الف) $\exp(-\pi/2)$؛ (ب) $-\exp(2\pi^2)$.

۳. نشان دهید که اگر $z\neq0$ و k عددی حقیقی باشد، $|z^k|=\exp(k\operatorname{Log}|z|)=|z|^k$.

۴. فرض کنیم c، d و z معرف اعداد مختلطی باشند که $z\neq0$. ثابت کنید که اگر همهٔ توانها مقادیر اصلی باشند، (الف) $z^{-c}=1/z^c$؛
(ب) $(z^c)^n=z^{cn}$ $(n=1, 2, \ldots)$؛ (ج) $z^cz^d=z^{c+d}$؛ (د) $z^c/z^d=z^{c-d}$.

۵. با استفاده از شاخهٔ اصلی z^i، توابع $u(r, \theta)$ و $v(r, \theta)$ را بنویسید وقتی که $z^i=u(r, \theta)+iv(r, \theta)$.

۶. فرمول (۷) بخش ۲۹ را استنتاج کنید.

۷. با فرض اینکه $f'(z)$ موجود باشد، فرمول $d[c^{f(z)}]/dz$ را پیدا کنید.

۸. مقادیر هریك از عبارات زیر را پیدا کنید (الف) $\tan^{-1}(2i)$؛ (ب) $\tan^{-1}(1+i)$؛
(ج) $\cosh^{-1}(-1)$؛ (د) $\tanh^{-1}0$.
جواب (الف) $(n+1/2)\pi+\frac{i}{2}\operatorname{Log}3$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$؛
(د) $n\pi i$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

۹. فرض کنیم c یك عدد مختلط ناصفر مشخص باشد و توجه می‌کنیم که i^c چندمقداری است. چه محدودیتی باید روی عدد ثابت c گذاشت تا همهٔ مقادیر $|i^c|$ یکی باشند.
جواب c حقیقی باشد.

۱۰. معادلهٔ $\sin z=2$ را به‌طرق زیر نسبت به z حل کنید (الف) بامساوی قراردادن قسمتهای حقیقی وقسمتهای موهومی؛ (ب) با استفاده از فرمول (۱) بخش ۳۰.
جواب $(2n+1/2)\pi\pm i\operatorname{Log}(2+\sqrt{3})$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

۱۱. معادلهٔ $\cos z=\sqrt{2}$ را نسبت به z حل کنید.

۱۲. فرمولهای (۲) و (۴) بخش ۳۰ را استنتاج کنید.

۱۳. فرمولهای (۳) و (۵) بخش ۳۰ را استنتاج کنید.

۱۴. فرمولهای (۶) و (۸) بخش ۳۰ را استنتاج کنید.