۳.۲. مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای، حل مسأله موج در فضای یک بعدی، مسئله نخ مرتعش

می‌توان نشان داد که به ازای داده‌های F، f، g و h که در شرایط معینی صدق می‌کنند مسئله با مقادیر اولیه و کرانه‌ای زیر دارای جوابی یکتا است

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t); \qquad 0<x<l \quad ,\ t>0 \tag{1a}$$

$$u(x,0)=f(x); \qquad 0\leq x\leq l \tag{1b}$$

$$u_t(x,0)=g(x); \qquad 0\leq x\leq l \tag{1c}$$

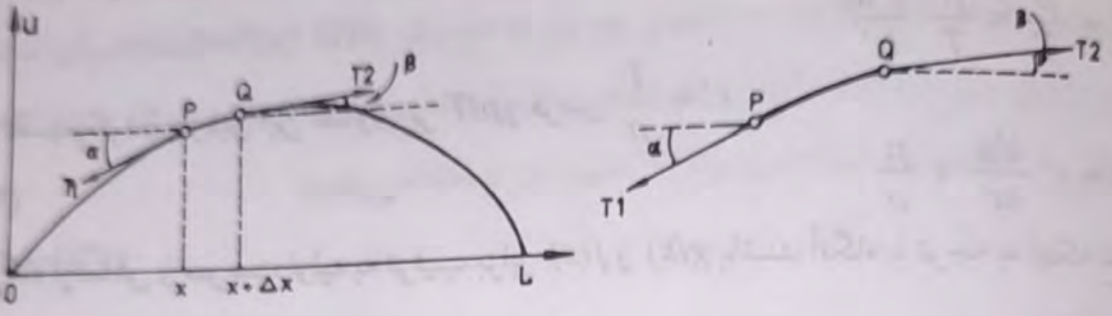
$$u(0,t)=p(t); \qquad t\geq 0 \tag{1d}$$

$$u(l,t)=q(t); \qquad t\geq 0 \tag{1e}$$

نخست یک مسئله فیزیکی را مدلسازی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ارتعاش یک نخ در مسئله فوق صدق می‌کند. با فرض اینکه مسئله فوق دارای جواب بوده و جواب آن یکتاست به چگونگی نمایش جواب آن می‌پردازیم.

نخی به طول l را که دو انتهای آن ثابت است در نظر می‌گیریم و آن را از وضع تعادل خارج کرده و ارتعاشات آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم یعنی می خواهیم ببینیم پس از تغییر اولیه در وضعیت نخ و رهاکردن آن در هر لحظه نخ در چه وضعیتی قرار دارد. برای این منظور لازم است نخ کاملاً کشسان بوده و جرم نخ در واحد طول ثابت و در مقابل نیروی کشش کوچک باشد و حرکت نخ یک ارتعاش کوچک عرضی دریک صفحه در امتداد قائم و هیچ‌گونه حرکتی در جهت افقی صورت نگیرد. فرض می‌کنیم نخ در فاصله $0<x<l$، در طول محور x باشد. هم اکنون نخ را از وضعیت تعادل خود خارج کرده و در لحظه‌ای که لحظه اولیه $t=0$ می‌نامیم نخ را با وضعیت معین و با سرعت مشخص می‌گیریم. برای بررسی وضعیت حرکت یک نخ بدیهی است که حرکت هر نقطه از نخ به x، طول آن نقطه، و زمان حرکت t بستگی دارد بنابراین u، ارتفاع یک نقطه از نخ، به صورت $u(x,t)$ یعنی تابعی از x و t خواهد بود.

چنانچه منحنی c وضعیت نخ در لحظه t باشد آنگاه برای پیدا کردن معادله حرکت نخ، دو نقطه بسیار نزدیک از نخ به طولهای x و $x + \Delta x$ را در نظر می‌گیریم.



هرگاه نیروهای کشش با مقادیر T_1 و T_2 به ترتیب در نقاط x و $x+\Delta x$ بر نخ وارد شوند آنگاه به علت عدم وجود حرکت در امتداد افق، تصویر نیروی کشش در طول محور x دارای اندازه ثابت $T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$ است و نیروی محرکه در امتداد قائم که بر اثر نیروی کشش ایجاد می‌گردد برابر

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha$$

است چنانچه فرض کنیم علاوه بر نیروی قائم فوق نیروی ثابتی در امتداد قائم وارد شود و اگر اندازه این نیرو بر واحد طول، در نقطه x برابر p باشد آنگاه اندازه نیرو بر طول Δx برابر $p\Delta x$ خواهد بود. بنابراین نیروی محرکه بر نخ که سبب حرکت آن می‌گردد برابر است با

$$F = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha + p\Delta x$$

از طرفی طبق قانون دوم نیوتن مقدار نیرو با حاصلضرب جرم جسم در شتاب متحرک برابر است بنابراین می‌یابیم

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha + p\Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر T نتیجه می‌گیریم

$$tg\,\beta - tg\,\alpha + \frac{p}{T}\Delta x = \frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین تساوی فوق بر Δx و با توجه به اینکه $tg\,\alpha$ و $tg\,\beta$ به ترتیب برابر ضریب

زاویه‌های خطوط مماس در نقاط xو $x+\Delta x$است می‌یابیم :

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+\frac{p}{T}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حال چنانچه Δx به سمت صفر میل کند داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{p}{T}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم کردن طرفین این تساوی بر ρ/Tو فرض $c^2=\dfrac{T}{\rho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{p}{\rho} \qquad (1)$$

هرگاه ارتعاش و سرعت اولیه به ترتیب برابر $f(x)$ و $g(x)$ باشند آنگاه با توجه به اینکه نخ در نقاط $x=0$و $x=l$دارای ارتعاشی نیست داریم .

$$u(x,0)=f(x) \quad ; \quad 0\leq x\leq 1 \qquad (2)$$

$$u_t(x,0)=g(x) \quad ; \quad 0\leq x\leq 1 \qquad (3)$$

$$u(0,t)=0 \quad ; \quad t\geq 0 \qquad (4)$$

$$u(l,t)=0 \quad ; \quad t\geq 0 \qquad (5)$$

معادله (۱) با شرایط (۲) تا (۵) یک نمونه فیزیکی برای مسئله (۱) می‌باشد.

هم اکنون به حل مسئله (۱) در حالتی خاص می‌پردازیم و مسئله زیر را حل می‌کنیم

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \quad ; \; 0<x<l\,,\; t>0 \qquad (2a)$$

$$u(x,0)=f(x) \quad ; \; 0\leq x\leq l\,, \qquad (2b)$$

$$u_t(x,0)=g(x) \quad ; \; 0\leq x\leq l\,, \qquad (2c)$$

$$u(0,t)=0 \quad ; \quad t\geq 0 \qquad (2d)$$

$$u(l,t)=0 \quad ; \quad t\geq 0 \qquad (2e)$$

این مسئله را مسئله (۲) می نامیم و برای حل این مسئله روش ضربی یا روش تفکیک متغیرها راکه حاصل تلاشهای اویلر در مدلسازی و حل مسئله موج است ارائه می کنیم. برای حل مسئله از خاصیت وجود و یکتایی جواب استفاده می‌کنیم یعنی به جای حل معادله ($2a$) در حالت کلی و رسیدن به یک جواب عمومی برای این معادله کوشش می‌کنیم جوابی

خصوصی برای معادله (۲a) را طوری بیابیم که در شرایط (۲b) تا (۲e) صدق کند. بدیهی است که این جواب با توجه به یکتا بودن جواب برای مسئله (۱) تنها جواب مسئله (۲) خواهد بود.

برای حل مسئله (۲) به جستجوی جوابی به صورت $u(x,t)=F(x)\ G(t)$ برای مسئله می‌پردازیم یعنی $F(x)$ و $G(t)$ را طوری می‌یابیم که حاصلضرب آنها در مسئله صدق کند با جایگزینی $u=FG$ و $u_{tt}=F\ddot{G}$ و $u_{xx}=F''G$ در معادله می‌یابیم.

$$F\ddot{G}=c^{2}F''G$$

و از آنجا

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^{2}G}$$

نظر به اینکه طرف اول این تساوی تنها تابعی از x و طرف دوم تنها تابعی از t است تساوی فوق فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که عدد ثابتی مانند k موجود باشد که هر یک از نسبتهای موجود در این تساوی با آن برابر باشند یعنی داشته باشیم

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^{2}G}=k,$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$F''-kF=0 \quad , \quad \ddot{G}-kc^{2}G=0$$

حال با توجه به شرط (۲b) داریم

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0,$$

بدیهی است که $G(t)\neq 0$ زیرا $G(t)=0$ منجر به جواب بدیهی $u=0$ می‌شود که با فرض وجود ارتعاش اولیه تناقض دارد، بنابراین لازم است که $F(0)=0$ همینطور با توجه به شرط $u(l,t)=0$ داریم $F(l)=0$ هم اکنون مسئله زیر را

$$F''-kF=0\ ; \qquad F(0)=0 \qquad , \quad F(l)=0$$

به ازای مقادیر مختلف k مورد بررسی قرار می‌دهیم. هرگاه $k=0$ آنگاه داریم $F''=0$ که دارای جواب عمومی $F(x)=ax+b$ است. با توجه به شرایط $F(0)=0$ و $F(l)=0$ می‌یابیم

$F=0$ و از آنجا $u=0$ که خلاف فرض وجود جواب غیر بدیهی برای مسئله است. بنابراین $k=0$ منجر به جوابی برای مسئله نمی‌شود.

حال فرض می‌کنیم $k=\mu^2>0$ آنگاه جواب عمومی معادله $F''-kF=0$ به صورت $F(x)=a\cosh\mu x + b\sinh\mu x$ می‌باشد. با توجه به شرط $F(0)=0$ داریم $a=0$ و از آنجا $F(x)=b\sinh\mu x$ شرط $F(l)=0$ نتیجه می‌دهد $b\sinh\mu l=0$ و چون μ و l هر دو مخالف صفر هستند بنابراین $b=0$ و از آنجا $F=0$ بنابراین تنها امکان حل مسئله جستجوی مقادیر منفی برای k است. برای این منظور قرار می‌دهیم $k=-p^2<0$ و از آنجا داریم $F''+p^2F=0$ که دارای جواب عمومی $F(x)=A\cos px+B\sin px$ است. با توجه به فرض $F(0)=0$ می‌یابیم $A=0$ و از آنجا $F=B\sin px$ حال بنابرفرض $F(l)=0$ به دست می‌آوریم $B\sin pl=0$، برای اینکه مسئله دارای جواب $F\neq 0$ باشد، لازم است که $B\neq 0$ و بنابراین p را باید طوری انتخاب کرد که $\sin pl=0$ با انتخاب $p=\frac{n\pi}{l}$ و به ازای هر عدد صحیح n مقدار $\sin pl=0$ برابر صفر خواهد شد و بنابراین لازم نیست مقدار B برابر صفرباشد و از آنجا به جوابی به صورت

$$F_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

می‌رسیم با جایگزین کردن $k=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ در معادله $\ddot{G}-kc^2G=0$ و قرار دادن $\lambda^2_n= c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ در نتیجه حاصل به معادله زیر برای متغیر t می‌رسیم.

این معادله دارای جواب عمومی

$$\ddot{G}+\lambda^2_nG=0\,;\quad \lambda_n= c\,\frac{n\pi}{l}$$

است و از آنجا

$$G_n(t) = A'\cos\lambda_nt+B'\sin\lambda_n t$$

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=(a_n\cos\lambda_nt+b_n\sin\lambda_nt)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که در آن $b_n= B'B$, $a_n= A'B$

نظر به اینکه $u_n(x,t)$ به ازای هر عدد طبیعی n جواب مسئله $(۲a)$, $(۲d)$ و $(۲e)$ است، بنابراین مجموع آنها جوابی از مسئله است یعنی

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{۶}$$

نیز جوابی از مسئله است. برای مشخص کردن a_n و b_n از شرایط دیگر مسئله (۲) یعنی از شرایط $(۲b)$ و $(۲c)$ استفاده می‌کنیم. با توجه به شرط $u(x,0)=f(x)$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

برای برقرار بودن این تساوی لازم است که طرف اول تساوی برابر بسط سینوسی فوریه تابع $f(x)$ باشد و برای این منظور کافی است a_n را برابر ضریب بسط سینوسی فوریه تابع $f(x)$ اختیار کنیم یعنی

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{۷}$$

حال با مشتقگیری از طرفین (۶) و با استفاده از $u_t(x,0)=g(x)$ می‌یابیم

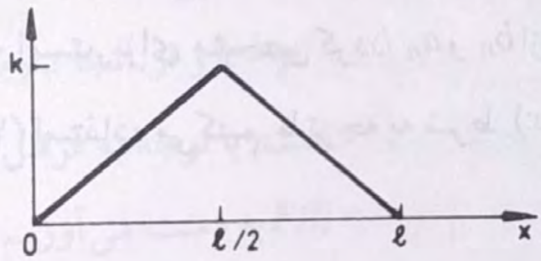
$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n\sin\frac{n\pi}{l}x=g(x)$$

و برای برقرار بودن این تساوی کافی است $b_n\lambda_n$ را برابر ضریب بسط سینوسی فوریه تابع $g(x)$ اختیار کنیم و از آنجا

$$b_n=\frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{۸}$$

بنابراین مسئله (۲) دارای جوابی به صورت (۶) است که در آن ضرایب a_n و b_n از روی (۷) و (۸) به دست می آیند.

مثال ۱. نخی به طول l را مطابق شکل زیر از وسط به ارتفاع k بالا برده و رهایش ساخته‌ایم. انحراف این نخ را در هر لحظه مشخص کنید.



$$u(x,\circ)=\begin{cases}\frac{۲k}{l}x & ; \quad \circ < x < l/۲\\ \frac{۲k}{l}(l-x) & ; \quad l/۲ < x < l\end{cases}$$

و سرعت اولیه ارتعاش برابر صفر است

$$u_t(x,\circ)=\circ$$

بنابراین

$$a_n=\frac{۲}{l}\int_\circ^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\ ,\ b_n=\circ$$

پیرو مثال ۶ بخش ۱.۱ می‌یابیم

$$a_n=\frac{۸k}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲}$$

از اینرو با توجه به (۶)داریم

$$u(x,t)=\frac{۸k}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}\sin\frac{n\pi}{۲}\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

حال مجدداً به مسئله (۱) برمی‌گردیم. برای حل این مسئله به جستجوی جوابی به صورت

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{۹}$$

می‌پردازیم و $w(x,t)$ را طوری می‌یابیم که $v(\circ,t)=\circ$ و $v(l,t)=\circ$ برای این منظور کافی است $w(x,t)$ را طوری بیابیم که جواب مسئله زیر باشد.

$$w(\circ,t)=p(t) \quad , w(l,t)=q(t)$$

بدیهی است که این مسئله تنها دارای یک جواب نیست. ولی چون تنها یک جواب مورد نظر است، برای یافتن جوابی برای این مسئله می‌توان به جستجوی جوابی به صورت

$$w(x,t)=ax+b$$

پرداخت. با توجه به شرط $w(\circ,t)=p(t)$ می‌یابیم $b=p(t)$ و از روی شرط

$$w(l,t)=q(t)$$

نتیجه می‌گیریم

$$a=\frac{1}{l}\,(q(t)-p(t))$$

بنابراین

$$w(x,t)=\frac{1}{l}\,(q(t)-p(t))x+p(t)$$

و از آنجا

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{l}\,(q(t)-p(t))x+p(t) \tag{۱۰}$$

حال مسئله مربوط به v را می‌یابیم. داریم

$$u_{tt}=v_{tt}+\frac{x}{l}\,(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p}\ ,\ u_{xx}=v_{xx}$$

با جایگزین کردن آن در ($1a$) به دست می‌آوریم

$$v_{tt}+\frac{x}{l}\,(\ddot{q}-\ddot{p})+\ddot{p}-c^2\,v_{xx}=F(x,t)$$

و از آنجا $v_{tt}-c^2\,v_{xx}=F_1(x,t)$ که در آن

$$F_1(x,t)=F(x,t)-\frac{1}{l}\,(\ddot{q}-\ddot{p})x-\ddot{p}$$

با توجه به شرط ($1b$) و (۱۰) می‌یابیم.

$$u(x,\circ)=v(x,\circ)+\frac{1}{l}\,(q(\circ)-p(\circ))x+p(\circ)=f(x)$$

که از آنجا $v(x,0)=f_1(x)$ که در آن

$$f_1(x)=f(x)-\frac{1}{l}\,(q(0)-p(0))x-p(0)$$

همینطور از روی (۱c) و (۱۰) می‌یابیم

$$u_t(x,0)=v_t(x,0)+\frac{1}{l}\,(\dot{q}(0)-\dot{p}(0))x+\dot{p}(0)=g(x)$$

در نتیجه $v_t(x,0)=g_1(x)$ که در آن

$$g_1(x)=g(x)-\frac{1}{l}\,(\dot{q}(0)-\dot{p}(0))x-\dot{p}(0)$$

بنابراین به مسئله زیر برای v می‌رسیم

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=F_1(x,t);\ 0<x<l,\ t>0 \tag{3a}$$

$$v(x,0)=f_1(x);\ 0\le x\le l, \tag{3b}$$

$$v_t(x,0)=g_1(x);\ 0\le x\le l, \tag{3c}$$

$$v(0,t)=0;\ t\ge 0 \tag{3d}$$

$$v(l,t)=0;\ t\ge 0 \tag{3e}$$

چنانچه در مسئله‌ای $F_1(x,t)$ برابر صفر گردد آنگاه جواب مسئله (۳) را می‌توان از روی (۶) به دست آورد و با توجه به (۱۰) به جواب مسئله (۱) رسید. حال اگر $F_1(x,t)\neq 0$ آنگاه به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11}$$

برای مسئله (۳) می‌پردازیم. با جایگزین کردن آن در (۳a) می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{G}_n+\lambda_n^2G_n)\sin\frac{n\pi}{l}x=F_1(x,t);\ \lambda_n=c\,\frac{n\pi}{l}$$

بنابراین $\ddot{G}_n+\lambda_n^2G_n$ را می‌توان برابر ضریب سینوسی فوریه تابع $F_1(x,t)$ گرفت یعنی

$$\ddot{G}_n + \lambda^2_n\, G_n = \frac{2}{l} \int_0^{\lambda} F_1(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \qquad (12)$$

با حل این معادله به جوابی عمومی به صورت

$$G_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + G^*_n(t) \qquad (13)$$

که در آن $G^*_n(t)$ یک جواب خصوصی معادله (۱۲) است، می‌رسیم. با توجه به آن (۱۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + G^*_n(t)) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (14)$$

با توجه به این تساوی و ($3b$) و($3c$) به ترتیب می‌یابیم

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + G^*_n(0)) \sin \frac{n\pi}{l} x = f_1(x)$$

و

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \lambda_n + \dot{G}^*_n(0)) \sin \frac{n\pi}{l} x = g_1(x)$$

و از آنجا

$$a_n = -G^*_n(0) + \frac{2}{l} \int_0^{l} F_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \qquad (15)$$

و

$$b_n = \frac{1}{\lambda_n} \left[-\dot{G}^*_n(0) + \frac{2}{l} \int_0^{l} g_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right] \qquad (16)$$

بنابراین مسئله (۱) دارای جوابی به صورت (۱۰) است که در آن v از فرمول (۱۴)با ضرایب (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آید.

مثال ۲. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} - u_{xx} = t; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x; \quad 0 \le x \le 1$$

$u_t(x,\circ)=۲\ ;\qquad \circ\leq x\leq ۱$

$u(\circ,t)=۲t\ ;\qquad t\geq\circ$

$u(۱,t)=t\ ;\qquad t\geq\circ$

چنین قرار می‌دهیم: $u(x,t) = v(x,t)+w(x,t)$ و w را طوری می‌یابیم که $v(\circ,t)=\circ$ و $v(۱,t)=\circ$ برای این منظور می‌نویسیم $w(x,t)=ax+b$ و با چنین فرضی می‌یابیم $a=\frac{t-۲t}{۱}=-t\ ,\ b=۲t$ بنابراین $w=-tx+۲t$ و از آنجا

$$u(x,t)=v(x,t)\ -\ tx+۲t$$

با توجه به اینکه

$$v(x,\circ)=u(x,\circ)=x\ ,\ u_{xx}=v_{xx}\ ,\ u_{tt}=v_{tt}$$

و

$$v_t(x,\circ)=u_t(x,\circ)+x-۲=x$$

مسئله مربوط به v به صورت زیر در می‌آید

$$v_{tt}-v_{xx}=t\ ,\ v(x,\circ)=x\ ,\ v_t(x,\circ)=x\ ,\ v(\circ,t)=\circ\ ,\ v(۱,t)=\circ$$

برای حل این مسئله به جستجوی جوابی به صورت زیر می‌پردازیم

$$v(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} G_n\ (t)\sin n\pi x$$

با قرار دادن آن در معادله می‌یابیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\ddot{G}_n+n^۲\pi^۲ G_n)\sin n\pi x=t$$

و از آنجا

$$\ddot{G}_n+n^۲\pi^۲ G_n = ۲t\int_{\circ}^{۱}\sin n\pi x dx= -\frac{۲t}{n\pi}\cos n\pi x\ \Big|_{\circ}^{۱}=\frac{۲t}{n\pi}\left(۱+(-۱)^{n+۱}\right)$$

و درنتیجه

$$G_n=a_n\cos n\pi t + b_n\sin n\pi t + \frac{۲t}{n^۳\pi^۳}\left(۱+(-۱)^{n+۱}\right)$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t+\frac{2t}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})\right]\sin n\pi x$$

با توجه به اینکه $v(x,0)=x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x=x$$

و از آنجا

$$a_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

از روی $v_t(x,0)=x$ می‌یابیم.

$$v_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\pi b_n+\frac{2}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})\right]\sin n\pi x=x$$

بنابراین

$$n\pi b_n+\frac{2}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

و یا

$$b_n=\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)+\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}$$

در نتیجه

$$u(x,t)=-tx+2t+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cos n\pi t+\left[\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right]\sin n\pi t+\frac{2t}{n^2\pi^2}(1+(-1)^{n+1})\right\}\sin n\pi x$$

مثال ۳. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt}-25u_{xx}=x+\frac{25}{2}\pi\ ;\quad 0<x<1\quad ,\ t>0$$

$$u(x,0)=\left(\frac{1}{2}-\pi/4\right)x^2\ ;\qquad 0\le x\le 1$$

$$u_t(x,0)=1+x\,; \qquad 0\leq x\leq 1$$

$$u_x(0,t)=\frac{\pi}{2}\,; \qquad t\geq 0$$

$$u_x(1,t)=1\,; \qquad t\geq 0$$

قرار می‌دهیم

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

حال $w(x,t)$ را طوری می‌یابیم که $v_x(0,t)=v_x(1,t)=0$ برای این منظور می‌توانیم چنین قرار دهیم $w=ax^2+bx$ که از آنجا $w_x=2ax+b$. با توجه به این مفروضات داریم

$$w_x(0,t)=\frac{\pi}{2}=b$$

و $w_x(1,t)=2a+b=1$ بنابراین

$$a=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

در نتیجه

$$u(x,t)=v(x,t)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)x^2+\frac{\pi}{2}x$$

با جایگزین کردن این تابع در مسئله می‌یابیم

$$v_{tt}-25v_{xx}=25+x\,;$$

$$v(x,0)=-\frac{\pi}{2}x\,,\quad v_t(x,0)=1+x\,;$$

$$v_x(0,t)=0\,,\ v_x(1,t)=0$$

نخست مسئله

$$v_{tt}=25v_{xx}\,;\quad v_x(0,t)=0\,,\ v_x(1,t)=0$$

را به تفکیک متغیرها $v(x,t)=F(x)G(t)$ تا تعیین $F(x)$ حل می‌کنیم. با توجه به $v_{tt}=25v_{xx}$ و $v=FG$ داریم

با توجه به تساوی فوق و شرایط $v_x(0,t)=0$ و $v_x(1,t)=0$ به مسئله زیر برای F می‌رسیم

$$\frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{25G}=k$$

$$F''-KF=0\quad;\ F'(0)=0\quad,\quad F'(1)=0$$

به ازای $k=0$ داریم $F=ax+b$ و $F'=a$ و با توجه به هر یک از شرایط $F'(0)=0$ یا $F'(1)=0$ نتیجه می‌گیریم $a=0$ در نتیجه $F=b$ یک جواب مسئله است.

به ازای $k=-p^2<0$ داریم

$$F''+p^2F=0 \quad ; F'(0)=0 \quad , \quad F'(1)=0$$

که دارای جواب عمومی زیر است

$$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

و از روی آن داریم

$$F'(x)=-Ap\sin px+Bp\cos px$$

با توجه به شرط $F'(0)=0$ نتیجه می‌شود $Bp=0$ و یا $B=0$ بنابراین

$$F'(x)=-Ap\sin px$$

نظر به اینکه $F'(1)=0$ داریم $F'(1)=-Ap\sin p=0$ که با انتخاب $p=n\pi$ می‌توان A را مخالف صفر انتخاب نمود و نتیجه گرفت که مسئله مربوط به تابع F دارای جواب $F_n(x)=A\cos n\pi x$ است. حال به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)\cos n\pi x$$

می‌پردازیم. با درج آن در معادله مسئله می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ddot{G}_n+25n^2\pi^2 G_n)\cos n\pi x=25+x$$

و از آنجا

$$\ddot{G}_n+25n^2\pi^2G_n=2\int_0^1 (25+x)\cos n\pi x dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1); n\neq 0$$

که دارای جواب عمومی

$$G_n(t)=a_n\cos 5n\pi t+b_n\sin 5n\pi t+\frac{2}{25n^2\pi^2}((-1)^n-1); n\neq 0$$

است. به ازای $n=0$ داریم

$$G_{\circ}=\int_{\circ}^{۱}(۲۵+x)dx=\frac{۵۱}{۲}$$

که دارای جواب عمومی

$$G_{\circ}=\frac{۵۱}{۴}t^{۲}+a_{\circ}t+b_{\circ}$$

است، بنابراین

$$v(x,t)=\frac{۵۱}{۴}t^{۲}+a_{\circ}t+b_{\circ}+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n\cos ۵n\pi t+b_n\sin ۵n\pi t+\frac{۲}{۲۵n^{۲}\pi^{۲}}((-۱)^n-۱)]\cos n\pi x$$

$$v(x,\circ)=b_{\circ}+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n+\frac{۲}{۲۵n^{۲}\pi^{۲}}((-۱)^n-۱)]\cos n\pi x=-\frac{\pi}{۲}x$$

$$b_{\circ}=\int_{\circ}^{۱}(-\frac{\pi}{۲}x)\,dx=-\frac{\pi}{۴}$$

$$a_n=\frac{۲}{۲۵n^{۲}\pi^{۲}}((-۱)^{n+۱}+۱)-\pi\int_{\circ}^{۱}x\cos n\pi x dx=\frac{۲}{n^{۲}\pi^{۲}}((-۱)^{n+۱}+۱)(\frac{۱}{۲۵n^{۲}\pi^{۲}}+\frac{\pi}{۲})$$

$$v_t(x,\circ)=a_{\circ}+\sum_{n=۱}^{\infty}۵n\pi b_n\cos n\pi x=۱+x$$

$$a_{\circ}=\int_{\circ}^{۱}(۱+x)dx=\frac{۳}{۲}$$

$$۵n\pi b_n=۲\int_{\circ}^{۱}(۱+x)\cos n\pi x dx=\frac{۲}{n^{۲}\pi^{۲}}((-۱)^n-۱)$$

بنابراین

$$b_n=\frac{۲}{۵n^{۳}\pi^{۳}}((-۱)^n-۱)$$

$$u(x,t)=(1/2-\pi/4)x^{2}+\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{51}{2}t^{2}+3t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n^{2}\pi^{2}}\left((-1)^{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{25n^{2}\pi^{2}}+\frac{\pi}{2}\right)\cos 5n\pi t\right.$$

$$\left.+\frac{2}{5n^{3}\pi^{3}}\left((-1)^{n}-1\right)\sin 5n\pi t+\frac{2}{25n^{4}\pi^{4}}\left((-1)^{n}-1\right)\right\}\cos n\pi x$$

۵.۲. تمرینات

۱ـ مسئله ارتعاش را در حالتی حل کنید که انحراف در روی مرز ناحیه صفر و سرعت اولیه و انحراف اولیه آن به صورت داده شده باشند.

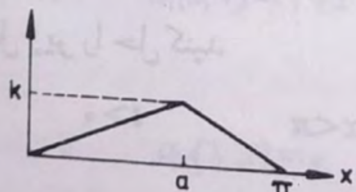
a. $u(x,0)=x(1-x), u_t(x,0)=0 \qquad 0\le x\le 1$

جواب. $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi^3}[1+(-1)^{n+1}]\cos n\pi ct \sin n\pi x$$

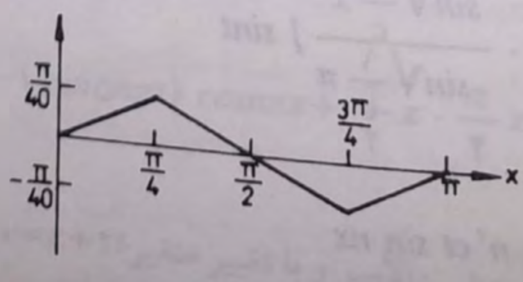
b. $u(x,0)=3\sin x \quad , \quad u_t(x,0)=0 \qquad 0\le x\le \pi$

جواب. $u(x,t)=3\cos ct \sin x$

۲ـ مسئله ارتعاش نخ را در حالتی حل کنید که انحراف اولیه ارتعاش برابر یکی از توابع زیر و سرعت اولیه آن صفر باشد. وضعیت ارتعاش را در چند لحظه که خود انتخاب خواهید نمود به کمک جواب حاصل ازروش دالامبر رسم کنید $(c=1)$.



جواب. $$u=\frac{2k}{a(\pi-a)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}\cos nt \sin nx$$



جواب. $u=\frac{۴}{۵\pi}(\frac{۱}{۴}\cos ۲t \sin ۲x - \frac{۱}{۳۶}\cos ۶t \sin ۶x + \frac{۱}{۱۰۰}\cos ۱۰t \sin ۱۰x - + \ldots)$

۳. جواب هر یک از معادلات زیر را به روش ضربی به دست آورید.

a. $u_x+u_y=۰$

جواب. $u=ke^{c(x-y)}$

b. $yu_x=xu_y$

جواب. $u=e^{k(x^۲+y^۲)}$

c. $xu_x=yu_y$

جواب. $u=cx^ky^k$

d. $u_{xy}=u$

جواب. $u=ke^{c(x+y)}$

e. $u_{xx}+u_x-۲u=۰$

جواب. $u=f(y)e^x+g(y)e^{-۲x}$

۴- هر یک از معادلات زیر را با تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

a. $u_{xx}+u_{xy}=۲u_{yy} \quad ; v=x+y \quad , \quad z=۲x-y$

b. $u_{xx}-۲u_{xy}+u_{yy}=۰ \; ; v=y \quad , \quad z=x+y$

c. $yu_{xy}=xu_{xx}+u_x \quad ; v=y \quad , \quad z=xy$

۵- هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a. $\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}+c^۲\frac{\partial^۴ u}{\partial x^۴}=۰ \quad ; \quad ۰<x<\pi \quad t>۰$

$u(x,۰)=۰ \; ; u_t(x,۰)=۰ \; ; \quad ۰\le x\le\pi$

$u(۰,t)=u(\pi,t)=u_{xx}(۰,t)=۰ \quad ; u_{xx}(\pi,t)=\sin t \quad ; \quad t\ge ۰$

جواب.

$$u(x,t)=\frac{c}{۲}\left[\frac{\sinh\sqrt{\frac{۱}{c}}\,x}{\sinh\sqrt{\frac{۱}{c}}\,\pi}-\frac{\sin\sqrt{\frac{۱}{c}}\,x}{\sin\sqrt{\frac{۱}{c}}\,\pi}\right]\sin t$$

$$+\frac{۲}{\pi c}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(-۱)^{n+۱}}{n^۴-(۱/c^۲)}\sin n^۲ct \sin nx$$

$\sqrt{\frac{۱}{c}}$ عددی صحیح نیست.

$$b.\ u_{tt}-9u_{xx}=x \quad , \quad 0<x<\pi \quad ; \quad t>0$$
$$u(x,0)=2 \quad , \quad u_t(x,0)=1+x \quad ; \quad 0\le x\le \pi$$
$$u_x(0,t)=t \quad , \quad u_x(\pi,t)=2t \quad ; \quad t\ge 0$$

جواب.
$$u(x,t)=\frac{\pi^2+6}{4\pi}t^2+a_0t+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos 3nt+b_n\sin 3nt$$
$$+\frac{2}{9\pi n^4}[(-1)^n-1]\}\cos nx+\frac{t}{2\pi}x^2+tx$$

$$a_0=1-\pi/6 \quad , b_0=2 \quad , a_n=\frac{2}{9\pi n^4}[(-1)^{n+1}+1] \ ,b_n=\frac{2}{3n^3\pi}(-1)^n$$

$$c.\ u_{tt}-25u_{xx}=5 \quad , \quad 0<x<1 \quad ; \quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2} \quad , \quad u_t(x,0)=1+x \quad ; \quad 0\le x\le 1$$

$$u_x(0,t)=\pi/2 \quad , \quad u_x(1,t)=0 \quad ; \quad t\ge 0$$

$$u(x,t)=(5-\frac{25}{2}\pi)\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t+\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n^2\pi(1-4n^2)}\cos 5n\pi t$$
$$+\frac{2}{5n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\sin 5n\pi t\}\cos n\pi x+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}x^2$$

۶- هر یک از مسائل زیر را به روش دالامبر و با تغییر متغیر $v=x+2t$ و $z=x-2t$ حل کنید.

* $a.\ u_{tt}=4u_{xx} \quad , \quad 0<x<\pi \quad , \quad t>0$

$$u(x,0)=0 \qquad u_t(x,0)=x+1 \qquad 0\le x\le\pi$$

۱۰.۲. حل مسئله موج در فضای دوبعدی

در این بخش به چگونگی حل مسئله با مقادیر اولیه و کرانه‌ای زیر می‌پردازیم

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}) \quad ; \ 0<x<a\ ,\ 0<y<b\ ,\ t>0 \tag{8a}$$

$$u(x,y,0)=f(x,y) \quad ; \ 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b \tag{8b}$$

$$u_t=(x,y,0)=g(x,y) \ ; \ 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b \tag{8c}$$

$$u=(x,0,t)=0 \quad ; \ 0\le x\le a\ ,\ t\ge 0 \tag{8d}$$

$$u=(x,b,t)=0 \quad ; \ 0\le x\le a\ ,\ t\ge 0 \tag{8e}$$

$$u=(0,y,t)=0 \quad ; \ 0\le y\le b\ ,\ t\ge 0 \tag{8f}$$

$$u=(a,y,t)=0 \quad ; \ 0\le y\le b\ ,\ t\ge 0 \tag{8g}$$

این مسئله به مسئله موج در فضای دو بعدی موسوم است. مثال فیزیکی برای این مسئله ارتعاش یک غشاء مستطیلی با ضلعهای a و b است. برای حل این مسئله به روش ضربی عمل می‌کنیم. نخست به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$$

می‌پردازیم. با درج تابع فوق در $(8a)$ می‌یابیم

$$F\ddot{G}=c^2(F_{xx}+F_{yy})G$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر c^2FG داریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})=k_1$$

که در آن k_1 عددی ثابت است و از آنجا به معادلات زیر می‌رسیم

$$F_{xx}+F_{yy}-k_1F=0 \quad , \quad \ddot{G}-k_1c^2G=0$$

برای حل معادله اول که خود نیز یک معادله با مشتق جزئی است به جستجوی جوابی به صورت $F(x,y)=H(x)Q(y)$ می‌پردازیم. با جایگزینی آن در معادله می‌یابیم

$$QH''+HQ''-k_1HQ=0$$

و یا

$$\frac{H''}{H}=\frac{1}{Q}(k_1Q-Q'')=k_2$$

و از آنجا به معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$H''-k_2H=0$$

$$Q''-(k_1-k_2)Q=0$$

از روی شرایط (۸d) تا (۸g) و $u(x,y,t)=H(x)Q(y)G(t)$ به شرایط زیر برای H و Q می‌رسیم

$$H(0)=0 \quad , \quad H(a)=0 \quad \text{و} \quad Q(0)=0 \quad , \quad Q(b)=0$$

همانند آنچه در بخش اول دیدیم مسئله

$$H''-k_2H=0 \quad H(0)=0 \quad H(a)=0$$

وقتی دارای جواب است که $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; $k_2=-\frac{m^2\pi^2}{a^2}$ و جواب این مسئله عبارت است

از $H_m(x)=\sin\frac{m\pi}{a}x$ و همینطور مسئله

$$Q''-(k_1-k_2)Q=0\ ,\ Q(0)=0\ ,\ Q(b)=0$$

به ازای $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; $k_1-k_2=-\frac{n^2\pi^2}{b^2}$ دارای جواب $Q_n(y)=\sin\frac{n\pi}{b}y$ است. برای مشخص کردن G به حل معادله $\ddot{G}-k_1c^2G=0$ می‌پردازیم. نخست توجه می‌کنیم که

$$-k_1=-k_2+\frac{n^2\pi^2}{b^2}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$$

با فرض

$$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}$$

داریم $\ddot{G}+\lambda^2_{mn}G=0$ که دارای جواب عمومی

$$G_{mn}(t)=a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

است از اینرو

$$u_{mn}(x,y,t)=(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y$$

Scanned with CamScanner

هم اکنون جوابی برای مسئله (۸) به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y$$

a_{mn} و b_{mn} را طوری می‌یابیم که u در شرایط ($8b$) و ($8c$) صدق کند. با توجه به ($8b$) داریم

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y=f(x,y)$$

بنابراین a_{mn} را می‌توان ضریب سینوسی تابع f گرفت، یعنی

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y\ dydx$$

از روی ($8c$) می‌یابیم

$$u_t(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\lambda_{mn}\ \sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y=g(x,y)$$

و از آنجا

$$b_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y\ dydx$$

مثال ۶. مسئله موج را به ازای $a=b=\pi$, $c=1$ سرعت اولیه صفر و ارتعاش اولیه $f(x,y)=xy\ \sin x\ \sin y$ حل کنید. به علت عدم وجود سرعت اولیه می‌یابیم $b_{mn}=0$ و

$$a_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f\sin m x\ \sin ny\ dx\ dy=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin x\sin mx\ dx\int_0^\pi y\sin y\sin ny\ dy$$

$$\int_0^\pi x\sin x\sin mx\ dx=\begin{cases}\dfrac{2m((-1)^{m+1}-1)}{(m^2-1)^2}\ ; & m\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4}\ ; & m=1\end{cases}$$

می‌یابیم

$$a_{mn}=\begin{cases}\dfrac{16}{\pi^2}\;\dfrac{mn((-1)^{m+1}-1)((-1)^{n+1}-1)}{(m^2-1)^2(n^2-1)^2}\;;\; m\neq 1;n\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi m((-1)^{m+1}-1)}{(m^2-1)^2}\;;\; m\neq 1;n=1\;;\;\lambda_{mn}=\sqrt{(m^2+n^2)}\\[2ex] \dfrac{\pi n((-1)^{n+1}-1)}{(n^2-1)^2}\;;\; m=1\;;\; n\neq 1\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{4}\;;\; m=1\,,\; n=1\end{cases}$$

با جایگزین کردن a_{mn} و b_{mn} در $u(x,y,t)$ جواب مسئله حاصل می‌شود. چنانچه در این بخش مشاهده کردیم جواب مسئله موج دو بعدی را به سادگی می‌توان از راه حل ارائه شده برای مسئله موج یک بعدی به دست آورد. همانند آن می‌توان به حل مسئله گرما دوبعدی و مسائل گرما و موج سه بعدی پرداخت، بنابراین بحث آینده را به معادلات لاپلاس و پواسن اختصاص می‌دهیم. چنانچه خواهیم دید در بسیاری موارد مسائل مربوط به آنها را نیز می‌توان با توجه به روشهائی که آموخته‌ایم به سادگی حل نمود.

از حل مسئله زیر به دست آورد

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0; \quad u(5)=10 \quad , \quad u(10)=5$$

با توجه به معادله مسئله می‌یابیم

$$r^{2}\frac{\partial u}{\partial r}=a \quad \text{ویا} \quad u=-\frac{a}{r}+b$$

با استفاده از شرایط کرانه‌ای مسئله نتیجه می‌شود

$$u=\frac{50}{r}$$

هم اکنون به حل مسئله لاپلاس یا پواسن در فضای دو بعدی می‌پردازیم. چگونگی حل این گونه مسائل را با حل یک مسئله روشن می‌کنیم.

م شال ۴ صفحه ۸۴

مثال ۱۰. مطلوب است حل مسائل زیر

$$u_{xx}+u_{yy}=x+2y \quad ; \quad 0<x<\pi \quad , \quad 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=x \quad ; \quad 0\leq x\leq \pi$$

$$u(x,\pi)=2 \quad ; \quad 0\leq x\leq \pi$$

$$u(0,y)=y \quad ; \quad 0\leq y\leq \pi$$

$$u(\pi,y)=\cos y \quad ; \quad 0\leq y\leq \pi$$

حل. قرار می‌دهیم $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ و w را چنان می‌یابیم که $v(x,0)=0$ و $v(x,\pi)=0$، برای این منظور فرض می‌کنیم $w(x,y)=ay+b$ و با توجه به شرایط مسئله و نیازهای فوق می‌یابیم $b=x$ ، $a=\frac{2-x}{\pi}$ و از آنجا داریم

$$w(x,y)=\frac{2-x}{\pi}y+x \quad \text{و} \quad u(x,y)=v(x,y)+\frac{2-x}{\pi}y+x$$

با توجه به $u(0,y)=y$ و $u(\pi,y)=\cos y$ به ترتیب می‌یابیم

$$v(0,y)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)y \quad \text{و} \quad v(\pi,y)=\cos y-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi$$

بنابراین مسئله زیر را برای v داریم

$$v_{xx}+v_{yy}=x+2y \quad ; \quad v(x,0)=0$$

$$v(x,\pi)=۰\ ,\ v(۰,y)=(۱-\frac{۲}{\pi})y\quad ,\ v(\pi,y)=\cos y-\frac{۲-\pi}{\pi}y-\pi$$

با فرض $v(x,y)=F(x)\ G(y)$ و درج آن در معادله $v_{xx}+v_{yy}=۰$ می‌یابیم

$$\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=k$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$G''+kG=۰ \qquad \text{و} \qquad F''-kF=۰$$

با توجه به شرایط اول و دوم مسئله مربوط به v می‌یابیم $G(۰)=۰$ و $G(\pi)=۰$ و از آنجا داریم $k=n^۲$ و $G_n(y)=\sin ny$

هم اکنون برای حل مسئله مربوط به v به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}F_n(x)\sin ny$$

می‌پردازیم. با درج آن در معادله می‌یابیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(F''_n-n^۲F_n)\sin ny=x+۲y$$

و از آنجا F_n را طوری می‌یابیم که

$$F''_n-n^۲F_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x+۲y)\sin ny\,dy=a_nx+b_n$$

که در آن

$$a_n=-\frac{۲}{n\pi}[(-۱)^n-۱]\ ,\ b_n=-\frac{۴}{n}(-۱)^{n+۱}$$

و جواب عمومی معادله فوق عبارت است از

$$F_n(x)=-\frac{a_n}{n^۲}x-\frac{b_n}{n^۲}+A_ne^{nx}+B_ne^{-nx}$$

و از آنجا

$$v(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty}(-\frac{a_n}{n^۲}x-\frac{b_n}{n^۲}+A_ne^{nx}+B_ne^{-nx})\sin ny$$

با توجه به شرایط سوم و چهارم مربوط به مسئله v به ترتیب می‌یابیم

$$v(\circ,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{b_n}{n^2}+A_n+B_n]\sin ny=(1-\frac{2}{\pi})y$$

$$V(\pi,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{b_n}{n^2}-\frac{a_n}{n^2}\pi+A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}]\sin ny=\cos y-\frac{2-x}{\pi}y-\pi$$

و از آنجا

$$A_n+B_n=\frac{b_n}{n^2}+\frac{2}{\pi}(1-\frac{2}{\pi})\int_{\circ}^{\pi}y\sin ny\,dy$$

$$A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}=\frac{b_n}{n^2}+\frac{a_n}{n^2}\pi+\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}(\cos y-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi)\sin ny\,dy$$

با حل این دو معادله A_n و B_n را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن $v(x,y)$ مشخص می‌شود و با درج آن در $u(x,y)=v(x,y)+\frac{2-x}{\pi}y+x$ جواب مسئله مورد نظر حاصل می‌شود

$$w_n(r)=J_{\circ}\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)$$

با درج $k=\frac{\alpha_n}{R}$ در معادله مربوط به G می‌یابیم

$$\ddot{G}_n+\lambda_n^{\text{۲}}G_n=\circ\ ;\ \lambda_n=c\frac{\alpha_n}{R}$$

که دارای جواب $G_n(t)=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t$ است. بنابراین

$$u(r,t)=\sum_{n=\circ}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t)\,J_{\circ}\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)$$

برای تعیین a_n و b_n از شرایط اولیه مسئله استفاده می‌کنیم

$$u(r,\circ)=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_n J_{\circ}\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)=f(r)$$

و با توجه به آن می‌گیریم

$$a_n=\frac{\text{۲}}{R^{\text{۲}}J^{\text{۲}}_{\text{۱}}(\alpha_n)}\int_{\circ}^{R}rf(r)J_{\circ}\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr$$

و همچنین

$$u_t(r,\circ)=\sum_{n=\circ}^{\infty}b_n\lambda_n J_{\circ}\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)=g(r)$$

و با توجه به آن می‌یابیم

$$b_n=\frac{\text{۲}}{c\alpha_n RJ_{\text{۱}}^{\text{۲}}(\alpha_n)}\int_{\circ}^{R}rg(r)J_{\circ}\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)dr$$

۱۵.۲. حل مسائل با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه و تبدیلات لاپلاس

به کمک تبدیلات فوریه و لاپلاس نیز می‌توان به حل مسائل با مشتقات جزئی پرداخت. در فصل اول با تبدیلات فوریه نامتناهی آشنا شدیم و در اینجا بعد از پرداختن به تعریف تبدیل فوریه متناهی و چند قضیه در مورد این تبدیلات به حل چند مسئله از مسائل با مشتقات

جزئی به کمک این تبدیلات می‌پردازیم و در پایان با ارائه یک مثال چگونگی حل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیل لاپلاس را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای در یک فاصله متناهی مثلاً بر فاصله $[0,\pi]$ باشد. آنگاه تبدیل سینوسی فوریه متناهی تابع $f(x)$ را که به $F_s\{f\}$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$F_s\{f\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = f_s(n) \ ; \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

تبدیل سینوسی فوریه متناهی معکوس را نیز چنین تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin nx$$

تبدیلات کسینوسی فوریه متناهی و فوریه متناهی معکوس را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم

$$F_c\{f\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = f_c(n) \ ; \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} f_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos nx$$

هرگاه $f'(x)$ و $f''(x)$ پیوسته تکه‌ای بر فاصله $[0,\pi]$ باشند آنگاه می‌توان ثابت کرد که (ثابت کنید)

$$F_s\{f''\} = \frac{2n}{\pi} [f(0) - (-1)^n f(\pi)] - n^2 F_s\{f\}$$

$$F_c\{f''\} = \frac{2}{\pi} [(-1)^n f'(\pi) - f'(0)] - n^2 F_c\{f\}$$

مثال ۱. مسئله زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 1 \quad ; \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$$

مشابه

$$u(x,\circ)=\circ \quad ; \quad u_t(x,\circ)=\circ \quad , \qquad \circ\le x\le\pi$$

$$u(\circ,t)=\circ \quad ; \quad u(\pi,t)=\circ \quad , \qquad t\ge \circ$$

تبدیل دو [illegible] ثابت به x

حل. مسئله را در حالت کلی یعنی $G(x,t)$ به جای تابع ثابت ۱ حل می‌کنیم. با تبدیل فوریه‌گیری از معادله نتیجه می‌شود

$$F_s\{u_{tt}\} - c^{\text{۲}}\, F_s\{u_{xx}\} = F_s\{G(x,t)\}$$

$$F_s\{u_{tt}\} = \frac{\text{۲}}{\pi}\int_\circ^\pi u_{tt}\sin nx\, dx = \frac{d^{\text{۲}}}{dt^{\text{۲}}}\left[\frac{\text{۲}}{\pi}\int_\circ^\pi u(x,t)\sin nx\, dx\right] = \frac{d^{\text{۲}}v(n,t)}{dt^{\text{۲}}}$$

که در آن $v(n,t)$ تبدیل سینوسی متناهی $u(x,t)$ است. از طرفی داریم

$$F_s\{u_{xx}\} = \frac{\text{۲}n}{\pi}\left[u(\circ,t)-(-\text{۱})^n u(\pi,t)\right] - n^{\text{۲}}\, v(n,t) = -n^{\text{۲}}v(n,t)$$

چنانچه $F_s(n,t)$ تبدیل سینوسی متناهی $G(x,t)$ باشد آنگاه می‌یابیم

$$\frac{d^{\text{۲}}v}{dt^{\text{۲}}} + n^{\text{۲}}c^{\text{۲}}v = F_s(n,t) = F_s\{\text{۱}\} = \frac{\text{۲}}{\pi n}\left[\text{۱}+(-\text{۱})^{n+\text{۱}}\right]$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است که دارای جوابی به صورت زیر است

$$v(n,t) = A\cos nct + B\sin nct + \frac{\text{۲}}{\pi c^{\text{۲}}n^{\text{۳}}}\left[\text{۱}+(-\text{۱})^{n+\text{۱}}\right]$$

با به کار بردن شرایط اولیه می‌یابیم

$$F_s\{u(x,\circ)\} = \frac{\text{۲}}{\pi}\int_\circ^\pi u(x,\circ)\sin nx\, dx = v(n,\circ) = \circ$$

و

$$F_s\{u_t(x,\circ)\} = \frac{dv(n,\circ)}{dt} = \circ$$

داریم $B=\circ$ و

$$A = \frac{\text{۲}}{\pi c^{\text{۲}}n^{\text{۳}}}\left[(-\text{۱})^n - \text{۱}\right]$$

از اینرو

$$v(n,t)=\frac{۲}{\pi c^{۲}n^{۳}}[۱+(-۱)^{n+۱}](۱-\cos nct)$$

بنابراین

$$u(x,t)=\frac{۲}{\pi c^{۲}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۱+(-۱)^{n+۱}]}{n^{۳}}(۱-\cos nct)\sin nx$$

مثال ۲. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_t=u_{xx}+u \qquad ; \quad ۰<x<l \qquad t>۰,$$

$$u(x,۰)=f(x) \qquad u_x(۰,t)=۰ \qquad u_x(l,t)=۰$$

چنانچه $V(n,t)$ تبدیل کسینوسی $u(x,t)$ باشد با تبدیل کسینوسی گرفتن از طرفین معادله و به کار بردن شرایط کرانه‌ای می‌یابیم

$$V_t+(n^{۲}-۱)V=۰$$

و جواب آن عبارت است از

$$V(n,t)=ce^{-(n^{۲}-۱)t}$$

با به کار بردن شرایط اولیه نتیجه می‌گیریم

$$V(n,t)=V(n,۰)e^{-(n^{۲}-۱)t}$$

که در آن

$$V(n,۰)=\frac{۲}{l}\int_{۰}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

بنابر این جواب عبارت است از

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}V(۰,۰)+\sum_{n=۱}^{\infty}V(n,t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

به ازای $۰<x<\pi$؛ $f(x)=x$ داریم $V(۰,۰)=\pi$ و

$$V(n,۰)=\frac{۲}{\pi n^{۲}}[(-۱)^{n}-۱]\;;\quad n=۱,۲,۳,\ldots$$

و جواب مسئله به ازای $f(x)=x$ عبارت است از

$$u(x,t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]e^{-(n^2-1)t}\cos nx$$

مثال ۳. درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید در صورتی که

$$u(x,0)=f(x)\ ; \qquad -\infty<x<\infty$$

و به ازای هر $t\geq 0$ داریم

$$u(x,t)\to 0 \quad \text{و} \quad u_x(x,t)\to 0 \quad \text{وقتی که} \quad |x|\to\infty$$

حل. با تبدیل فوریه نامتناهی گرفتن از معادله می‌یابیم

$$F\{u_t\}=c^2F\{u_{xx}\}=c^2(-w^2)F\{u\}=-c^2w^2\bar{u}$$

که در آن $\bar{u}$ تبدیل فوریه u است. از طرفی داریم

$$F\{u_t\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t\,e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-iwx}dx=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}$$

بنابراین

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=-c^2w^2t$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول دارای جواب

$$\bar{u}(w,t)=a(w)\,e^{-c^2w^2t}$$

است. از روی شرط اولیه $\bar{u}(w,0)=a(w)=\bar{f}(w)=F\{f\}$ و بنابراین

$$\bar{u}(w,t)=\bar{f}(w)\,e^{-c^2w^2t}$$

با تبدیل معکوس گیری داریم

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(w)\,e^{-c^2w^2t}\,e^{iwx}\,dw$$

با جایگزین کردن

$$\bar{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\,e^{-iwv}\,dv$$

در $u(x,t)$ می‌یابیم

Scanned with CamScanner

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2w^2t}\, e^{i(wx-wv)}\, dw\right]dv$$

با استفاده از فرمول اویلر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و توجه به اینکه انتگرال قسمت موهومی نسبت به w فرد است نتیجه می‌شود

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{0}^{\infty} e^{-c^2w^2t}\cos((x-v)w)\,dw\right]dv$$

به کمک تبدیل لاپلاس نیز می‌توان به حل معادلات با مشتقات جزئی پرداخت. برای روشن شدن به حل مسئله زیر به کمک تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

مثال ۴. مسئله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

$$u(0,t)=f(t)=\begin{cases}\sin t & ;\ 0\le t\le 2\pi\\ 0 & ;\ \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0\ \ ;\ t\ge 0$$

$$u(x,0)=0 \qquad\qquad u_t(x,0)=0$$

حل. با تبدیل لاپلاس‌گیری نسبت به t می‌یابیم

$$L\{u_{tt}\}=s^2L\{u\}-su(x,0)-L\{u_t(x,0)\}=c^2L\{u_{xx}\}$$

ولی

$$L\{u_{xx}\}=\int_0^{\infty} e^{-st}u_{xx}\,dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{\infty} e^{-st}u(x,t)dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}L\{u(x,t)\}$$

با نوشتن $V(x,s)=L\{u(x,t)\}$ داریم

$$S^2V=c^2V_{xx} \qquad \text{و یا} \qquad V_{xx}-\frac{S^2}{c^2}V=0$$

که یک معادله دیفرانسیل معمولی است و دارای جواب عمومی

$$V(x,s) = a(s)e^{(sx)/c} + b(s)e^{(-sx)/c}$$

است با توجه به شرط کرانه‌ای و نوشتن $F(s)=L\{f(t)\}$ می‌یابیم

$$V(0,s)=L\{u(0,t)\}=L\{f(t)\}=F(s)$$

$$\lim_{x\to\infty} V(x,s)=\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}\,u(x,t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty} u(x,t)dt=0$$

و این موضوع ایجاب می‌کند که $a(s)=0$ و

$$V(0,s)=b(s)=F(s)$$

در نتیجه

$$V(x,s)=F(s)\ e^{(-sx)/c}$$

با توجه به قضیه دوم انتقال تبدیلات لاپلاس و به ازای $a = \frac{x}{c}$ و با تبدیل معکوس‌گیری می‌یابیم

$$u(x,t) = f(t - \frac{x}{c})\ H(t - \frac{x}{c})$$

و یا

$$u(x,t)= \begin{cases} \sin(t-\frac{x}{c}) & ; \quad \frac{x}{c}<t<\frac{x}{c}+2\pi \\ 0 ; & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱۶.۲. مسائل حل شده

۱ - جواب مسئله زیر را به دست آورید

$$u_{tt} = u_{xx}\,;\ u(x,0) = \sin x+\sin 3x\ ,\ u_t(x,0)= 0\ ,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$A_n= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\sin x+\sin 3x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\begin{cases} 0 & ; n\neq 1,3 \\ 1 & ; n=1 \text{ یا } n=3 \end{cases}$$

بنابراین

$u(x,t)= \sin x \cos t + \sin ۳x \cos ۳t$

۲ـ جواب عمومی دستگاه معادلات $u_{xx}=۰$ و $u_{yy}=۰$ را بیابید.

از $u_{xx}=۰$ می‌یابیم $u=x\phi(y)+\psi(y)$ و از آنجا

$$u_{yy}=x\phi''(y)+\psi''(y)=۰$$

بنابراین

$$\phi''(y)=۰ \quad و \quad \psi''(y)=۰$$

در نتیجه

$$\psi(y)=cy+d \quad و \quad \phi(y)=ay+b$$

بنابراین

$$u=x(ay+b)+cy+d = axy+bx+cy+d$$

۳ـ جواب عمومی معادله $u_{xy}+u_x+x+y+۱ = ۰$ را بیابید.

داریم $u_{xy}+u_x=-(x+y+۱)$ نخست جواب عمومی معادله بدون طرف ثانی یعنی جواب معادله $u_{xy}+u_x=۰$ را می‌یابیم. با فرض $u_x=p$ می‌یابیم $P_y+p=۰$ و یا $\frac{P_y}{p}=-۱$ و در نتیجه $\ln \frac{p}{h(x)}=-y$ و از آنجا $p=h(x)e^{-y}$ و یک جواب خصوص معادله $p_y+p=-(x+y+۱)$ عبارت است از $p=-(x+y)$ و در نتیجه این معادله دارای جواب عمومی

$$p=h(x)e^{-y}-(x+y)$$

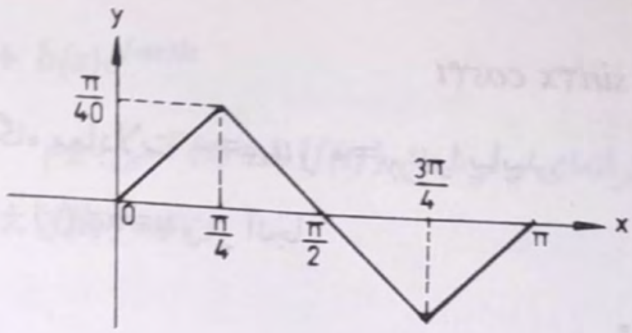
است. با توجه به آنکه $p=u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(x)e^{-y}-(x+y)$$

و از آنجا

$$u = e^{-y} \int h(x)dx- \frac{x^۲}{۲} -xy+ \psi(y)= \phi(x)e^{-y} + \psi(y) - \frac{x^۲}{۲} - xy$$

۴ـ مسئله موج را در حالتی حل کنید که $u_{tt} = c^۲u_{xx}$ ، $u_t(x,۰)=۰$ و انحراف اولیه برابر باشد با



$$u(x,0)=\begin{cases} \frac{x}{10} \ ; \ 0\le x\le \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{10}(-x+\frac{\pi}{2}) \ ; \ \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{10}(x-\pi) \ ; \ \frac{3\pi}{4}\le x\le \pi \end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi/4}\frac{x}{10}\sin nx\,dx+$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(-\frac{x}{10}+\frac{\pi}{20})\sin nx\,dx+\int_{3\pi/4}^{\pi}(\frac{x}{10}-\frac{\pi}{10})\sin nx\,dx]$$

$$=\frac{4}{5\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

و از آنجا

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{4}\cos cnt\sin nx$$

۵ ـ معادله $u_x=yu_y$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ می‌یابیم $F'G=yFG'$ و یا

$$\frac{F'}{F}=\frac{yG'}{G}=k$$

با توجه به آن داریم

$$\frac{G'}{G}=\frac{k}{y} \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F}=k$$

که به ترتیب دارای جوابهای عمومی $F=ae^{kx}$ و $G=y^k$ است بنابراین

$$u(x,y)=ay^k\, e^{kx}$$

۶ـ معادله $u_x+u_y = ۲(x+y)u$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ و جایگزین کردن آن در معادله می‌یابیم

$$F'G + FG' = ۲(x+y)FG$$

و یا

$$\frac{F'}{F} - ۲x = -\frac{G'}{G} + ۲y = k$$

و از آنجا به دو معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{G'}{G} = ۲y-k \quad و \quad \frac{F'}{F} = ۲x+k$$

جوابهای این معادلات عبارت‌اند از

$$G=e^{y^۲-ky} \qquad و \qquad F=ce^{x^۲+kx}$$

بنابراین

$$u = ce^{x^۲ + y^۲ + k(x-y)}$$

۷ـ معادله $u_{xx}+u_{yy}=۰$ را به روش ضربی حل کنید.

با قراردادن $u(x,y)=F(x)G(y)$، در معادله می‌یابیم $F''G+FG''=۰$ و یا $\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K$

با فرض $k=\mu^۲$ می‌یابیم $F''-\mu^۲F=۰$ و $G''+\mu^۲G=۰$ که دارای جوابهای

$$G=c\cos\mu y+d\sin\mu y \qquad و \qquad F=a\cosh\mu x+b\sinh\mu x$$

و

$$u(x,y)=(a\cosh\mu x+b\sinh\mu x)\,(c\cos\mu y+d\sin\mu y)$$

و همینطور به ازای $k=-p^۲$ می‌یابیم

$$u(x,y)=(a\cos px+b\sin px)\,(c\cosh py+d\sinh py)$$

به ازای $k=۰$ نتیجه می‌شود $F''=۰$ و $G''=۰$ و از آنجا

$$F=ax+b\,,\ G=cy+d \quad و \quad u(x,y)=(ax+b)\,(cy+d)$$

حال G را طوری می‌یابیم که

$$\dot{G}_n+k^2_n\ G_n=2\int_0^1(1-2t)\cos k_n x\,dx=2(1-2t)\ \frac{\sin k_n}{k_n}=c_1t+c_2$$

و از آنجا
$$G_n(t)=A_n\ e^{-k^2_n t}+\frac{c_1}{1+k^2_n}\,t+\frac{c_2}{k^2_n}$$

بنابراین

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\ (A_n\ e^{-k^2_n t}+\frac{c_1}{1+k^2_n}\,t+\frac{c_2}{k^2_n})\cos k_n x\ \ ;\ \ k_n=(2n+1)\ \frac{\pi}{2}$$

با توجه به $v(x,0)=2x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ (A_n+\frac{c_2}{k^2_n})\ \cos k_n x=2x$$

بنابراین فرض می‌کنیم

$$A_n+\frac{c_2}{k^2_n}=2\ \int_0^1 2x\cos k_n x\,dx=\frac{4}{k^2_n}\ [k_n\sin k_n-1]$$

و یا

$$A_n=\frac{1}{k^2_n}\ \ [4((-1)^n k_n-1)-c_2]$$

و در نتیجه

$$u(x,t)=(x-1)t+t^2+\sum_{n=0}^{\infty}\ \{\ \frac{1}{k^2_n}\,[4((-1)^n k_n-1)-c_2]e^{-k^2_n t}+\frac{c_1}{1+k^2_n}+\frac{c_2}{k^2_n}\ \}\ \cos k_n x$$

مثال ۱۳. مطلوب است حل مسئله پواسن زیر

$$u_{xx}+u_{yy}=x+2y\ \ ;\ \ 0<x<\pi\ \ \ ;\ \ 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=x\ \ \ ,\ \ u(x,\pi)=2\ \ \ ,\ 0\le x\le\pi$$

$$u(0,y)=y\ \ \ ,\ \ u(\pi,y)=\cos y\ \ \ ,\ 0\le y\le\pi$$

حل. به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت $u(x,y)=V\ (x,y)+w(x,y)$ می‌پردازیم و w را طوری می‌یابیم که $V(\pi,y)=0, V(0,y)=0$. برای این منظور می‌نویسیم

$$w(x,y)=a(y)x+b(y)$$

$b(y)=y \quad , \quad y=\circ+b(y)$ و یا $u(\circ,y)=V(\circ,y)+w(\circ,y)$

$a(y)=\frac{1}{\pi}(\cos y-y)\ ,\ \cos y=a\pi+y$ و یا $u(\pi,y)=V(\pi,y)+w(\pi,y)$

در نتیجه

$$u(x,y)=\frac{x}{\pi}(\cos y-y)+y+V(x,y)$$

و

$$w(x,y)=\frac{x}{\pi}(\cos y-y)+y$$

از $u(x,\circ)=V(x,\circ)+w(x,\circ)$ نتیجه می‌شود

$V(x,\circ)=(1-\frac{1}{\pi})x$ و یا $x=V(x,\circ)+\frac{x}{\pi}$

همینطور

$V(x,\pi)=\frac{x}{\pi}(1+\pi)-\pi+2$ و یا $u(x,\pi)=V(x,\pi)+w(x,\pi)$

و

$u_{yy}=V_{yy}-\frac{x}{\pi}\cos y \qquad u_{xx}=V_{xx}$

در نتیجه مسئله زیر را برای V داریم

$$V_{xx}+V_{yy}=x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y\ ;\ V(x,\circ)=(1-\frac{1}{\pi})x\ ,\ V(x,\pi)=\frac{1}{\pi}(1+\pi)x-\pi+2$$
$$V(\circ,y)=\circ\ ,\ V(\pi,y)=\circ$$

نخست به حل مسئله بدون طرف ثانی به روش ضربی با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ می‌پردازیم و به مسئله زیر برای F می‌رسیم

$$F''-kF=\circ\quad ;\ F(\circ)=\circ\ ,\ F(\pi)=\circ$$

که از آن نتیجه می‌شود $k=-n^2$ و $F_n(x)=\sin nx$

حال به جستجوی جوابی به صورت

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(y)\,\sin nx$$

برای مسئله مربوط به V می‌پردازیم. با درج آن در $V_{xx}+V_{yy}=x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n-n^2G_n)\,\sin nx = x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y$$

و از آنجا G را طوری می‌یابیم که

$$\ddot{G}_n-n^2G_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y)\sin nx\,dx$$

در نتیجه

$$G_n(t)=a_n\cosh y\, ny + b_n \sinh ny + G_n^*(y)$$

که در آن $G_n^*(y)$ یک جواب خصوص معادله فوق است ($G_n^*(y)$ را بیابید) و

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cosh ny + b_n \sin h\, ny + G_n^*(y))\,\sin nx$$

با توجه به شرایط کرانه‌ای می‌یابیم

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + G_n^*(0))\,\sin nx = (1-\frac{1}{\pi})\,x$$

$$V(x,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cosh n\pi + b_n \sinh n\pi + G_n^*(\pi))\,\sin nx=\frac{1}{\pi}(1+\pi)x-\pi+2$$

و از آنجا

$$a_n+G_n^*(0)=\frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{\pi})\int_0^{\infty} x\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\frac{1}{\pi})(-1)^{n+1}$$

$$a_n\cosh n\pi + b_n\sinh n\pi + G_n^*(\pi) = \frac{۲}{n\pi}(۱+\pi)(-۱)^{n+۱} + (۲-\pi)\frac{۲}{\pi}((-۱)^{n+۱}+۱)$$

که با حل آنها a_n و b_n محاسبه می‌شوند.

مثال ۱۴. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} = u_{xx}+u_{yy}+x+y+t \; ; \quad ۰\le x\le\pi \quad ۰\le y\le\pi \quad t\ge ۰$$

$$u(x,y,۰)=x+۲y \quad , \quad u_t(x,y,۰)=۲x-y$$

$$u(۰,y,t)=y+t \quad , \quad u(\pi,y,t)=y-t$$

$$u(x,\pi,t)=۲x-t \quad , \quad u(x,۰,t)=x-۲t$$

حل. با فرض $u(x,y,t)=V(x,y,t)+w(x,y,t)$ و $w=ax+b$ ، V را طوری می‌یابیم که $V(۰,y,t)=V(\pi,y,t)=۰$ و از آنجا

$$w=-\frac{۲t}{\pi}x+y+t$$

و مسئله برای V عبارت است از

$$V_{tt}=V_{xx}+V_{yy}+y+x+t$$

$$V(x,y,۰)=y+x \; ; \quad V_t(x,y,۰)=۲x-y+\frac{۲x}{\pi}-۱$$

$$V(۰,y,t)=۰ \; ; \quad V(\pi,y,t)=۰$$

$$V(x,۰,t)=x-۳t+\frac{۲t}{\pi}x \; ; \quad V(x,\pi,t)=۲x-۲t+\frac{۲t}{\pi}x-\pi$$

هم اکنون از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم و با قرار دادن

$$H=F_s(V)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} V(x,y,t)\sin nx\,dx$$

و تبدیل فوریه گرفتن از معادله مربوط به V می‌یابیم

$$H_{tt}=-n^۲H+H_{yy}+\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(x+y+t)\sin nx\,dx$$

با فرض

$$A=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}$$

$$B=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \sin nx\, dx\, \frac{۲}{n\pi}\left(۱+(-۱)^{n+۱}\right)$$

می‌یابیم

$$H_{tt}+n^۲H-H_{yy}=A+B(y+t)$$

$$H(n,y,۰)=By+A\ ,\ H_t(n,y,۰)=(۲+\frac{۲}{\pi})A-(y+۱)B$$

$$H(n,۰,t)=(۱+\frac{۲t}{\pi})A-۳tB$$

$$H(n,\pi,t)=(۲+\frac{۲t}{\pi})A-(۲t+\pi)B$$

حال چنین قرار می‌دهیم

$$H(n,y,t)=Q(n,y,t)+R(n,y,t)$$

و $R(n,y,t)=ay+b$ را طوری می‌یابیم که $Q(n,۰,t)=Q(n,\pi,t)=۰$. برای برقرار بودن این شرایط لازم است که

$$R(n,y,t)=\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(۱+\frac{۲t}{\pi})-۳Bt$$

با توجه به آن مسئله برای Q به صورت زیر در می‌آید

$$Q_{tt}-Q_{yy}+n^۲Q=A+(y+t)B-n^۲[(A+Bt-B\pi)\frac{y}{\pi}+A(۱+\frac{۲t}{\pi})-۳Bt]$$

$$Q(n,y,۰)=-A\frac{y}{\pi}+۲By$$

$$Q_t(n,y,۰)=۲A-By+۲B-\frac{B}{\pi}y$$

$$Q(n,۰,t)=Q(n,\pi,t)=۰$$

با قرار دادن $Q=\sum_{m=۱}^{\infty} G_{mn}\sin my$ در این مسئله می‌توان به حل مسئله پرداخت و به جواب رسید.

$$Q(n,y,t)=\sum_{m=۱}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^۲_{mn}}[B\pi-n^۲(A+Bt-B\pi)]+$$

$$\frac{D}{\pi\lambda^{۲}_{mn}}\,[A\pi+B\pi t-n^{۲}(A\pi+۲At-۳B\pi t)]\}\sin my$$

که در آن

$$c=\frac{۲}{m}(-۱)^{m+۱},\quad D=\frac{۲}{m\pi}[(-۱)^{m+۱}+۱]$$

$$E_{mn}=\frac{۱}{\pi\lambda^{۲}_{mn}}\{۲AD(\pi\lambda^{۲}_{mn}+n^{۲})+BD\pi\,(۲m^{۲}-n^{۲}-۱)-\pi Bc\lambda^{۲}_{mn}-Bcm^{۲}\}$$

$$F_{mn}=\frac{۱}{\pi\lambda^{۲}_{mn}}\{AD\pi(n^{۲}-۱)-c(m^{۲}A-B\pi+n^{۲}B\pi-۲B\pi m^{۲})\}$$

بنابراین

$$u(x,y,t)=y+t-۲\frac{t}{\pi}x+\sum_{n=۱}^{\infty}\{\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(۱+\frac{۲t}{B})-۳Bt\}\sin nx$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^{۲}_{mn}}[B\pi-n^{۲}(A+Bt-B\pi)]$$

$$+\frac{D}{\pi\lambda^{۲}_{mn}}[A\pi+B\pi t-n^{۲}(A\pi+۲At-۳B\pi t)]\}\sin my\sin nx$$

۱۷.۲. تمرینات متفرقه

۱ ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a. $u_{tt}-c^{۲}u_{xx}=۰\ ;\ u(x,۰)=۰\ ,u_t(x,۰)=۸\sin^{۲}x\ ,\ u(۰,t)=u(\pi,t)=۰$

جواب. $$u(x,t)=\sum_{\substack{n=۱\\ n\neq ۲}}^{\infty}\frac{۳۲[(-۱)^n-۱]}{\pi cn^{۲}(n^{۲}-۴)}\sin nct\sin nx$$

b. $u_{tt}+au_t+bu=c^{۲}u_{xx}\quad ,۰<x<۱\quad ,t>۰$

$u(x,۰)=f(x)\ ,\ u_t(x,۰)=۰$

$u(۰,t)=u(۱,t)=۰$

جواب
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n(t)\sin n\pi x$$

که در آن $a_n = 2\int_0^{\pi} f(x)\sin n\pi x\,dx$ و

$$G_n(t)=\begin{cases} e^{-at/2}\left(\cosh\alpha t+\dfrac{a}{2\alpha}\sinh \alpha t\right) ; \alpha>0 \\ e^{-at/2}\left(1+\dfrac{at}{2}\right) ; \alpha=0 \\ e^{-at/2}\left(\cos\beta t+\dfrac{a}{2\beta}\sin \beta t\right) ; \alpha<0 \end{cases}$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left[4(b+n^2\pi^2c^2)-a^2\right]^{1/2} , \alpha=\frac{1}{2}\left[a^2-4(b+n^2\pi^2c^2)\right]^{1/2}$$

c. $u_{tt}=c^2u_{xx}+\sinh x$; $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=u(1,t)=1$

جواب.
$$u(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$$

که در آن

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-2\int_0^1 w(x,v)\sin n\pi v\,dv\right]\cos nct\sin n\pi x$$

$$w(x,t)=-c^2\sinh x+(c^2\sinh 1)x+1$$

d. $u_t=4u_{xx}$; $u(x,0)=x^2(1-x)$, $u(0,t)=u(1,t)=0$

جواب.
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi^3}\left[2(-1)^{n+1}-1\right]e^{-4n^2\pi^2t}\sin n\pi x$$

۲ ـ مطلوب است حل مسئله زیر

$u_{tt}-u_{xx}=x+t$; $u(x,0)=2$, $u_t(x,0)=x$, $u(0,t)=\sin t$, $u(\pi,t)=2t$

جواب.
$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) ;\ w(x,t)=\frac{2t-\sin t}{\pi}x+\sin t$$

$$v(x,t)=a_1\cos t+b_1\sin t+\frac{4t}{\pi}+2-\frac{1}{\pi}t\cos t$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{a_n\cos nt+b_n\sin nt+\frac{2}{\pi n^3}\left[\pi(-1)^{n+1}+((-1)^{n+1}+1)t\right]+\frac{2\sin t}{n(n^2-1)\pi}\right\}\sin nx$$

که در آن $a_1=0\ ,\ a_n=\dfrac{2(-1)^n}{n^3}\ ,\ b_1=2-\dfrac{10}{\pi}$

$$b_n=\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\left[(-1)^{n+1}+2-\pi\right]+\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^3}-\frac{2}{\pi(n^2-1)n^2}$$

۳-مطلوب است حل هر یک از مسائل زیر

۱. تبدیل فوریه کسینوسی

-2 $u=v+w,\ w=ax^2+bx$

$v=\sum G_n(t)\cos n\pi x$

a. $$\begin{cases} u_t-4u_{xx}=xt\ ;\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u(x,0)=\sin\pi x\ ;\ 0\le x\le 1\\ u_x(0,t)=t\ ,\ u_x(1,t)=t^2\ ;\ t\ge 0\end{cases}$$

۱-تبدیل فوریه سینوسی

-2 $u=v+w,\ w=ax+b$

$v=\sum G_n(t)\sin nx$

b. $$\begin{cases} u_t-k\,u_{xx}=x\cos t\ ;\ 0<x<\pi\ ,\ t>0\\ u_{tt}(x,0)=\sin x\ ;\ 0\le x\le\pi\\ u(0,t)=t^2\ ,\ u(\pi,t)=2t\ ;\ t\ge 0\end{cases}$$

فقط سری فوریه (جداسازی)

$u=v+w,\ w=ax+b$

$v=F(x)G(t)$

[illegible] ← [illegible]

$v=\sum G_n(t)F(x)$

c. $$\begin{cases} u_t-u_{xx}=t\ ;\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u(x,0)=x\ ;\ 0\le x\le 1\\ u_x(0,t)=1\ ,\ u(1,t)=t^2\ ;\ t\ge 0\end{cases}$$

فقط سری فوریه (جداسازی)

$u=v+w,\ w=ax^3+bx^2$

d. $$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ;\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u_t(x,0)=x\ ,\ u_{tt}(x,0)=0\ ;\ 0\le x\le 1\\ u_{xx}(0,t)=t^2\ ,\ u_{xx}(1,t)=\cos t\ ;\ t\ge 0\end{cases}$$

فقط سری فوریه (جداسازی)

$u=v+w,\ w=ax^3+bx^2$

e. $$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=xt\ ;\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=0\ ;\ 0\le x\le 1\\ u_{xx}(0,t)=0\ ,\ u_x(1,t)=1+t\ ;\ t\ge 0\end{cases}$$

$u = v + w$
$v = ax + b$

$$
*f.\quad \begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \;; & 0 < x < 1 \,,\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{2} \,,\ u_t(x,0) = 1 + x \;; & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = \dfrac{\pi}{2} \,,\ u_x(1,t) = 2t \;; & t \ge 0 \end{cases}
$$

۴ - نشان دهید که با جانشانی $u = v(x,y,z)e^{-iwt} \;;\ i = \sqrt{-1}$ در معادله موج سه بعدی معادله هلمهولتز

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0 \;;\ k = \frac{w}{c}$$

حاصل می‌شود و با توجه به آن و با استفاده از جوابهای معادله موج جوابهای معادله هلمهولتز را بیابید.

۵ - مطلوب است حل مسئله زیر *

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) \;;\ 0 < r < R \,,\ 0 < \theta < 2\pi \,,\ t > 0$$

$$u(r,\theta,0) = r\cos\theta \,,\ u_t(r,\theta,0) = 0 \;;\ 0 \le r \le R \,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$u(R,\theta,t) = 0 \,,\ u(0,\theta,t) = 0 \;;\ 0 \le \theta \le 2\pi \,,\ t \ge 0$$

۶ - مطلوب است حل هر یک از مسائل زیر

$$
*a.\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + xy\sin t \;; & 0 < x < \pi \,,\ 0 < y < \pi \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = 0 \,,\ u_t(x,y,0) \;; & 0 \le x \le \pi \,,\ 0 \le y \le \pi \\ u_x(0,y,t) = 0 \quad u_x(\pi,y,t) = 0 \;; & 0 \le y \le \pi \,,\ t \ge 0 \\ u_y(x,0,t) = 0 \;;\ u_y(x,\pi,t) = 0 \;; & 0 \le x \le \pi \;;\ t \ge 0 \end{cases}
$$

۲ - $u(x,y,t) = \sum_{n=1}\sum_{m=1} G(t) \cos mx \cos ny$

$$
*b.\quad \begin{cases} u_{t} - 4(u_{xx} + u_{yy}) = x + y + t \;; & 0 < x < \pi \,,\ 0 < y < \pi \,,\ t > 0 \\ u(x,y,0) = 0 \;; & 0 \le x \le \pi \,,\ 0 \le y \le \pi \\ u(x,0,t) = 0 \,,\ u(x,\pi,t) = 0 \;; & 0 \le x \le \pi \,,\ t \ge 0 \\ u(0,y,t) = 0 \,,\ u(\pi,y,t) = 0 \;; & 0 \le x \le \pi \;;\ t \ge 0 \end{cases}
$$

۲ - $u(x,y,t) = \sum_{n=1}\sum_{m=1} G(t) \sin mx \sin ny$

Scanned with CamScanner

c. $$\begin{cases} u_{tt}=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+r+t \ ; & 0<r<1 \ , \ t>0 \\ u(r,0)=r \ , \ u_t(r,0)=2r+1 \ ; & 0\le r\le 1 \\ u(1,t)=2t \ ; \ t\ge 0 \end{cases}$$

$u(r,t)=\sum G(t)\,J_0(a_n r)$

d. $$\begin{cases} u_{tt}=u_{\theta\theta} \ ; & 0<\theta<\pi \ , \ t>0 \\ u(\theta,0)=\theta \ , \ u_t(\theta,0)=\sin\theta \ ; & 0\le\theta\le\pi \\ u(0,t)=t \ , \ u(\pi,t)=2t \ ; & t\ge 0 \end{cases}$$

$u=v+w$

$w=a\theta+b$

$v=F(\theta)G(t)$

۷- نشان دهید که

a. $$F_s\{f''\}=\frac{2n\pi}{l^2}[f(0)-(-1)^n f(l)]-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_s\{f\}$$

b. $$F_c\{f''\}=\frac{2}{l}[(-1)^n f'(l)-f'(0)]-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_c\{f\}$$

و به ازای $l=\pi$

$$F_c\{f''\}=\frac{2}{\pi}[(-1)^n f'(\pi)-f'(0)]-n^2 F_c\{f\}$$

۸- هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید

a. $u_t=u_{xx}+x+t \ ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0$

$u(x,0)=x^2 \ , \ 0<x<\pi$

$u(0,t)=0 \ , \ u(\pi,t)=t \ ; \ t>0$

b. $u_t=u_{xx}+x+\sin t \ ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0$

$u(x,0)=0 \ ; \ 0\le x\le\pi$

$u(0,t)=0 \ ; \ u_x(\pi,t)+2u(\pi,t)=0$

$$\begin{cases} F''-kF=0 \\ F(0)=0 \\ F'(\pi)+2F(\pi)=0 \end{cases}$$

$u=G_0F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_nG_n$

c. $u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0 \ ; \ 0<x<\pi \ , \ t>0$

$u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=0 \quad ; \quad 0\le x\le \pi$

$u(0,t)=u(\pi,t)=0 \quad , \quad u_{xx}(0,t)=0 \quad , \quad u_{xx}(\pi,t) = \sin t \; ; \quad t\ge 0$

e تمرینات $۳a$ و $۳d$ را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید.

۹ - جواب مسئله دیریکله زیر را به کمک تبدیل فوریه بیابید

$u_{xx}+u_{yy} = 0 \quad ; \quad -\infty<x<\infty \quad , \quad y>0$ Tyn-Myint-U ص 314

$u(x,0)=f(x) \quad ; \quad -\infty<x<\infty$

u وقتی که $y\to\infty$ کراندار است و u و u_x وقتی که $|x|\to\infty$ به سمت صفر میل می‌کند.

جواب. $u(x,y)= \dfrac{y}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\, dt$

۱۰ - جواب مسئله نی‌من زیر را بیابید

$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad ; \quad -\infty<x<\infty \quad , \quad y>0$ T. M. U ص 314

$u_y(x,0)=g(x) \quad ; \quad -\infty<x<\infty$

$|u| <\infty \quad , \quad u, u_x \to 0$

$y\to\infty \qquad |x|\to\infty$

جواب.

$$u(x,y)= \frac{1}{\pi} \int_a^y v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)dt}{(t-x)^2+v^2}\, dv+c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)Ln\left[\frac{(t-x)^2+y^2}{(t-x)^2} \right] dt+c$$

۱۱ - هر یک از مسائل زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید. آیا این مسائل به این روش به جواب یکتا منجر می‌شوند؟

a. $u_{tt}-u_{xx}=x+t \quad ; \quad 0<x<\pi \quad , \quad t>0$ $u=v+w$

$u(x,0)=2x-1 \quad ; \quad 0\le x\le\pi$ $w=ax+b$

$v=\sum G(t)\sin nx$

$u_{tt}(x,\circ)=x+1 \quad ; \quad \circ \le x \le \pi$

$u(\circ,t)=t^{2} \quad ; \quad t \ge \circ$

$u(\pi,t)=t \quad ; \quad t \ge \circ$

b. $u_t - 4u_{xx}=x-t \quad ; \quad \circ < x < \pi \quad , \quad t > \circ$

$u = v + w$
$w = ax + b$
$v = \sum G(t) \cdots$

$u(x,\circ)=\cos x \quad ; \quad \circ \le x \le \pi$

$u_x(\circ,t)=t \quad ; \quad t \ge \circ$

$u_{xx}(\pi,t)=t-1 \quad ; \quad t \ge \circ$

۱۲ - هریک از مسائل زیر را حل کنید.

a. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+2t \quad ; \quad \circ \le x \le \pi \quad , \quad \circ \le y \le \pi \quad , \quad t \ge \circ$

ابتدا با تبدیل فوریه سینوسی نسبت به x و بار دیگر نسبت به y

$u(x,y,\circ)=y \; , \; u_t(x,y,\circ) = \circ$

$u(\circ,y,t)= t + y \; , \; u(\pi,y,t)= -y$

$u(x,\circ,t)=\circ \; , \; u(x,\pi,t)= x - t$

b. $u_t=u_{xx}+u_{yy}-x \quad ; \quad \circ \le x \le \pi \quad , \quad \circ \le y \le \pi \quad , \quad t \ge \circ$

ابتدا با تبدیل فوریه سینوسی نسبت به x و بار دیگر نسبت به y

$u_t(x,y,\circ)=\circ$

$u(\circ,y,t)=\circ \; , \; u(\pi,y,t)=2$

$u(x,\circ,t)=2t \; , \; u(x,\pi,t)=\circ$

c. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=x-z \quad ; \quad \circ \le x \le \pi \quad , \quad \circ \le y \le \pi \quad , \quad \circ \le z \le \pi$

ابتدا با تبدیل فوریه سینوسی نسبت به x و سپس نسبت به y

$u(\circ,y,z)=z \; , \; u(\pi,y,z)=\circ$

$u(x,\circ,z)=\circ \; , \; u(x,\pi,z)=x$

$u(x,y,\circ)=y \; , \; u(x,y,\pi)=\circ$

d. $u_{tt} - (u_{xx}+u_{yy}) = \cos x \cos y \cos t$; $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, $t \ge 0$

$u(x,y,0) = \cos x \cos y$, $u_t(\pi,y,0)=0$

$u(0,y,t)= \cos y \cos t$, $u(\pi,y,t)= -\cos y \cos t$

$u(x,0,t)= \cos x \cos t$, $u(x,\pi,t)= -\cos x \cos t$

۱۳- هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

* a. $u_{tt}=c^2 u_{xx}+f(t)$; $0<x< \infty$, $t>0$ تبدیل فوریه سینوسی

$u(x,0)=0$; $0 \le x<\infty$ F_s $u(0,t)$

$u_t(x,0)=0$; $0 \le x<\infty$ F_c $u_x(0,t)$

$u(0,t)=0$; $t \ge 0$

هرگاه $x \to \infty$ آنگاه $u_x(x,t) \to 0$

* b. $u_t= u_{xx}-2u$; $0<x<\infty$, $t>0$ تبدیل فوریه سینوسی

$u(x,0)=0$; $0 \le x<\infty$

$u(0,t)=0$; $t \ge 0$

هرگاه $x \to \infty$ آنگاه $u(x,t) \to 0$

c. $\alpha^2 u_{xx}=u_t$; $0<x<\infty$; $t>0$ تبدیل فوریه سینوسی ؟

$u(x,0)=0$; $0 \le x<\infty$

$u_x(0,t)=-1$; $t \ge 0$

هرگاه $x \to \infty$ آنگاه $u(x,t) \to 0$

۱۴- مسائل زیر را حل کنید

* a. $u_{xx}+u_{yy}=x-y$; $0<x<\pi$; $0<y<\pi$ تبدیل فوریه سینوسی نسبت به x

$u(x,0)=0 \ , \ u(x,\pi)=x^2 \quad ; \quad 0\le x\le \pi$

$u(0,y)=2y \ , \ u(\pi,y)=0 \quad ; \quad 0\le y\le \pi$

b. $u_{xx}+u_{yy}=0 \ ; \ 0<x<\pi \ ; \ 0<y<\pi$

$u_y(x,0)=2x-1 \ , \ u_y(x,\pi)=0 \quad ; \quad 0\le x\le \pi$

$u_x(0,y)=1+y \ , \ u_x(\pi,y)=2 \quad ; \quad 0\le y\le \pi$

c. $u_{xx}+u_{yy}=1 \ , \ 0<x<\pi \ ; \ 0<y<\pi$

$u_y(x,0)=0 \ , \ u(x,\pi)=\sin x \ ; \ 0<x<\pi$

$u(0,y)=\sin 2y \ , \ u_x(\pi,y)=0 \ ; \ 0<y<\pi$

$u = v + w$

$w = ax + b$

d. $\nabla^2 u=0 \ ; \ 1<r<2 \ , \ 0<\theta<\pi$

$u(1,\theta)=\sin\theta \ , \ u(2,\theta)=0 \ ; \ 0\le\theta\le\pi$

$u(r,0)=0 \ , \ u(r,\pi)=0 \ ; \ 1\le r\le 2$

$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$

$r^2 R'' + \alpha r R' + \beta R = 0$

$r = e^z$

e. $\nabla^2 u=0 \ ; \ 0<x<1 \ ; \ 0<y<1 \ , \ 0<z<1$

$u(0,y,z)=\sin\pi y \, \sin\pi z \ , \ u(1,y,z)=0$

$u(x,0,z)=u(x,1,z)=0$

$u(x,y,0)=u(x,y,1)=0$

f. $\nabla^2 u=0 \ ; \ r<1 \ ; \ 0<y<1 \ , \ 0<\theta<2\pi \quad 0<\varphi<\pi$

$u(1,\theta,\varphi)=\cos^2\phi$